INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO DE PROBLEMAS ECONÓMICOS[1]

1. La noción de función matemática: cocientes incrementales

El concepto matemático de *función* expresa la dependencia entre dos cantidades, una de las cuales es conocida y la restante es la resultante. Una función asocia un único resultado a cada insumo extraído de un conjunto fijo, como el de los números reales *R*. En cambio, distintos insumos matemáticos pueden tener el mismo resultado.

Hay diversas formas de expresar una función, ya sea mediante una fórmula, o haciendo un gráfico, o mediante un algoritmo que computa el resultado, o también describiendo sus propiedades. A veces una función puede ser descripta por medio de su relación con otras funciones (por ejemplo, la función inversa). En las disciplinas aplicadas como la economía, muchas veces expresaremos una función mediante una tabla de valores o mediante una fórmula. No todo tipo de descripción es posible para cualquier función, y debemos establecer una diferencia clara entre la función en sí y las múltiples maneras de representarla.

Se puede tener una idea de la importancia enorme que juegan las funciones en la matemática usando la *composición* de funciones: si *z* es una función de *y* y ésta es a su vez una función de *x*, entonces *z* resulta una función de *x*. Esto lo puedo decir de modo informal de la manera siguiente: la función compuesta es obtenida como producto de la primera función usando como insumo al resultado de la segunda función. Ésta es una característica de las funciones que las hace distintas de otros entes matemáticos, como los números o las figuras, y otorga a la teoría de las funciones su estructura más poderosa.

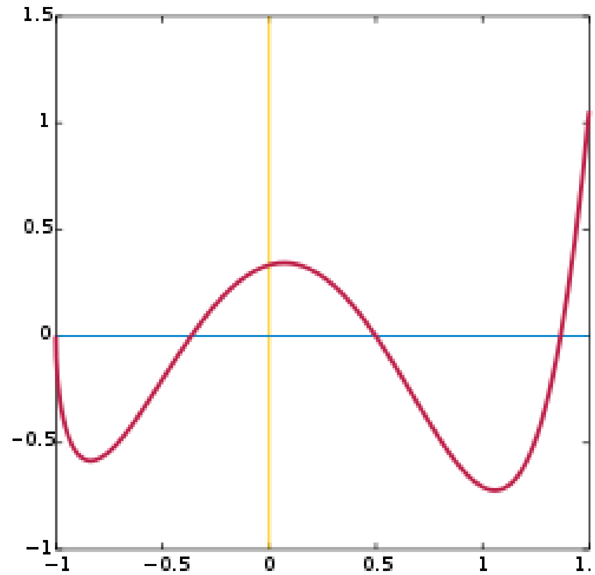

Figura 1
Función $y=[(4x^3-6x^2+1)\sqrt{(x+1)}] / (3-x)$
$f: [-1,1.5] \rightarrow [-1,1.5]$

Supongan que tienen un producto generado usando trabajo. Denotamos como *y* a la cantidad de producto y como *x* a la cantidad de trabajo aplicado. Si cada vez que incremento el trabajo en 1 unidad (por ejemplo, una hora) la cantidad de producto (digamos, trigo) se incrementa en 2 unidades (por ejemplo, en 2 quintales), puedo escribir una relación que responde a la forma:

[1] $y=2x$

Más aún, si el incremento de trabajo es muy pequeño (lo que denotaremos como Δx) entonces *y* aumentará en Δy, y tendremos que:

---

[1] V. Tom Apostol, Calculus, Volume I, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra, John Wiley & Sons, Inc., 1967; David Friedman, Price Theory: An Intermediate Text (acceso directo en http://ebour.com.ar/index.php?option=com_weblinks&task=view&id=4181&Itemid=0); Taro Yamane, Mathematics for Economists – An Elementary Survey, Prentice-Hall, Inc. 1962. Se recomienda hacer ejercicios prácticos de este último libro para fijar conceptos.

[2] $y+\Delta y = 2(x+\Delta x) = 2x + 2\,\Delta x$.

Como se cumple, por [1], que $y=2x$, la ecuación [2] implica que:

[3] $\Delta y = -y + 2x + 2\Delta x = 2\Delta x.$

Si divido por Δx miembro a miembro, obtengo que

[4] $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.$$

En conclusión, por cada pequeño incremento unitario de x (trabajo), y (trigo) aumentará en 2 quintales. Éste es cociente incremental de la función ¿Medido cómo? La unidad en que el cociente debe ser medido es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \text{ quintales de trigo/unidades de trabajo.}$$

Tomemos un ejemplo de la macroeconomía. Keynes popularizó una expresión de la función consumo global de una economía del tipo siguiente:

[5] $C = a + bY$

en la cual C representa al gasto agregado de consumo, Y al ingreso de la población, y a y b son constantes (a la constante b la llamó la "propensión marginal al consumo"). Cuando Y aumenta en una pequeña fracción ΔY, C aumentará en ΔC, y se tendrá:

[6] $C + \Delta C = a + b(Y+\Delta Y) = a + bY + b\Delta Y.$

Por lo tanto,

[7] $\Delta C = - C + a + bY + b\Delta Y = b\Delta Y$

Dividiendo por el pequeño incremento ΔY:

[8] $$\frac{\Delta C}{\Delta Y} = b$$

cuya unidad de medida es b ($ de consumo/$ de ingreso), es decir la propensión marginal al consumo, que también es un cociente incremental.

La econometría proporciona los métodos de medir la PMC. En base a la información de los seis años que van de 2003 a 2008 la PMC en nuestro país habría orillado un coeficiente próximo a 0.64. Esto es, de cada peso ganado en la economía argentina, el argentino promedio habría destinado 64 centavos a gastos de consumo privado en bienes durables y no durables. Cabe destacar que, por convención, estos gastos de consumo incluyen los gastos de consumo del gobierno general, fundamentalmente en salarios.

Llamaremos a la y de la ecuación [1] la *variable dependiente*, y a la x la *variable independiente*. Por consiguiente, el cociente $\Delta y/\Delta x$ ($\Delta C/\Delta Y$) indica la *tasa de cambio de la variable dependiente y* *con respecto a la variable independiente x*. También puede expresarse como el cambio de *y* con respecto a un cambio pequeño de la variable independiente *x*.

2. El concepto de derivada de una función

Supongamos ahora que la relación entre *x* (trabajo) e *y* (trigo) viene dada por la expresión:

[9] $y=3x^2$

Ahora, cuando *x* se incrementa en una pequeña dosis Δx, se tendrá:

[10] $$y + \Delta y = 3(x+\Delta x)^2$$
$$=3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2$$
$$\Rightarrow \Delta y = 6x\Delta x + 3\Delta x^2$$

Divido por Δx y obtengo

[11] $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$$

Si hemos aumentado muy poco la cantidad de trabajo, $3\Delta x$ será muy pequeño con relación a $6x$ y lo podemos considerar de magnitud despreciable. Luego tendremos como *aproximación*:

[12] $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x$$

Ahora escribamos *dy* en lugar de Δy y *dx* en lugar de Δx. La expresión resultante *dy/dx* es llamada la *derivada* de la función $y= 3x^2$ que proporciona como resultado $dy/dx=6x$.

Ésta es una definición que no es demasiado rigurosa, y ahora veremos otras dos que sí lo son: la derivada como un *límite* y también como la *pendiente* de una curva.

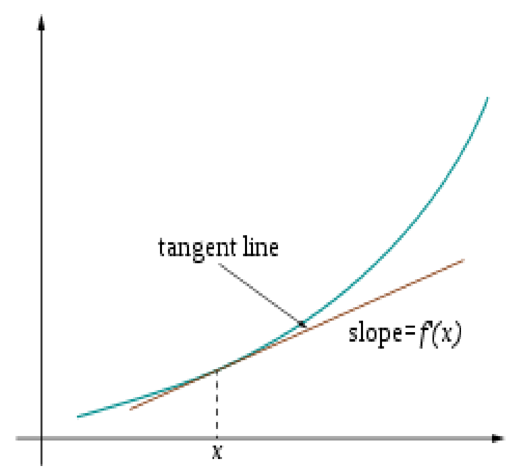

Figura 2

Voy a emplear una notación más general, en lugar de utilizar ejemplos como los de las expresiones [1] o [9]. Para ello denotaré a la función como *y=f(x)* y la representaré en un gráfico de dos dimensiones como el de la Fig. 2. Sea ahora un ejemplo de "derivada deslizante": http://en.wikipedia.org/wiki/File:Graph_of_sliding_derivative_line.gif, que es un ejemplo que usaremos en forma repetida, donde se puede ver una definición de derivada de la función $f(x) = x*sen(x^2)+1$ como pendiente de una línea tangente a la curva[2]. *Atención*: *como este gráfico es dinámico, es imprescindible ver este ejemplo en una computadora*. Verán una línea tangente que va deslizándose a lo largo de la curva de color

[2] La función *sen(x)* ("seno de x", en inglés *sine of x*) es una de las funciones *trigonométricas*, pero no será utilizada en este libro.

azul, que representa el gráfico de la función; la pendiente de esta línea tangente es la derivada de la función. Observen que cuando la pendiente es de color verde la derivada debe ser interpretada como positiva, cuando es de color rojo como negativa, y cuando es de color negro como cero. En la figura 3 tenemos la otra definición de la derivada, como límite de una serie de rectas secantes a una curva dada en un punto cualquiera *x*. Llamemos *y=f(x)* a la función dibujada en color verde. Fíjense ahora que, cuando la variable independiente adopta el valor *x+h* (*h* es un incremento arbitrario de *x*), queda determinada la secante que corta a la curva en los puntos (*x,f(x))* y (*x+h,f(x+h)*). Ahora vamos a ir reduciendo el segmento *h*, primero a *h'*, luego a *h''*, y así sucesivamente, siempre manteniendo fijo el punto *x*. ¿Qué sucede con la pendiente de la recta secante inicial? Pues irá disminuyendo hasta coincidir, en el límite, con la recta que es justo tangente a la curva *f(x)* en el punto *x*. Si la comparan con la figura 2, verán que hemos reproducido la línea tangente de color rojo de aquella figura (*slope* quiere decir *pendiente*). Suele representarse a la pendiente de una curva *f(x)* en el punto *x* como *f'(x).*

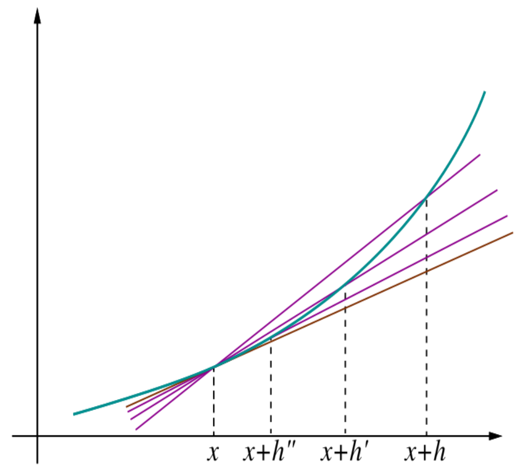

Figura 3

¿Por qué empleamos este último gráfico que muestra que la derivada es un *límite* y no otra definición más simple como la del gráfico 2? Bueno, porque es típico de los matemáticos usar el concepto de límite para definir muchos otros conceptos. Para nuestro fin, es suficiente que entiendan que si lo quiero expresar en forma rigurosa cuando escribo *dy/dx* no estoy hablando de un cociente de valores, sino de un límite. Pero a la expresión *dy/dx* muchas veces la vamos a interpretar de la forma menos rigurosa, como si fuera un promedio o tasa de cambio. La derivada *dy/dx* será entonces la cantidad en que cambia *y* cuando *x* cambia en una unidad (es decir, un pequeño incremento). Ahora vamos a explorar un poco más el concepto de límite.

3. <u>Límite de una sucesión</u>

Una sucesión matemática es una aplicación definida sobre los números naturales. Es costumbre emplear las letras u, v, w... para designar a una sucesión, en lugar de f, g, h... usadas para las funciones. Del mismo modo, a la variable se la denota usualmente *n* (porque la variable es un número natural) en lugar de *x*, habitual para las variables reales. Por convención, se escribe u_n [en lugar de *u(n)*], para denotar la imagen de *n* por la sucesión *u*, o sea el término número *n+1* de la sucesión *u* (ya que el primer término es habitualmente u_0). Las sucesiones suelen ser definidas de dos maneras: en forma explícita (mediante una expresión matemática) o en forma implícita (cuando u_n no sólo depende de *n* sino también de otros términos de la sucesión, que se tendrán que calcular antes). La fórmula que define un término con relación a los anteriores se llama *relación de inducción*.

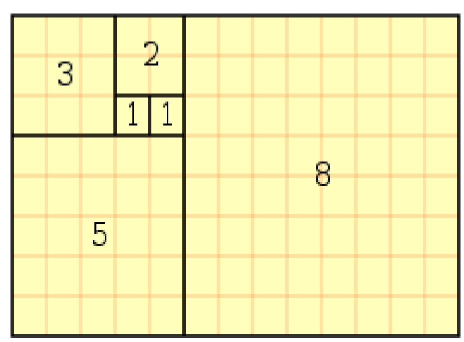

Figura 4: Al construir bloques cuya longitud de lado sean números de Fibonacci se obtiene un dibujo semejante al rectángulo áureo

Cuando el término general u_n sólo depende del término anterior, u_{n-1}, es decir cuando existe f tal que $u_n=f(u_{n-1})$ o, lo que viene a ser lo mismo $u_{n+1}=f(u_n)$ (para todo natural *n,* llamado el *índice* de la sucesión), entonces existe un "método" explícito de construirla. Por ejemplo la sucesión de Fibonacci (Figura 4) está definida por $u_{n+2} = u_{n+1}+u_n$:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

El primer elemento es 0, el segundo es 1 y cada elemento restante es la suma de los dos anteriores. Los números de Fibonacci aparecen en numerosas aplicaciones diferentes. Por ejemplo, se encuentra tanto en algunas figuras geométricas de la naturaleza, en elementos tales como los caracoles, las nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, en modelos de la crianza de conejos o de plantas, al contar el número de cadenas de bits de longitud n que no tienen ceros consecutivos y en una vasta cantidad de contextos diferentes. Se llamó *número áureo* al número irracional $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618033988749...$ Se trata de un número algebraico - una relación o proporción - que posee muchas propiedades interesantes, descubierto en la antigüedad.[3]

Volviendo a las sucesiones, tendremos sucesiones *finitas* cuyos términos pertenecen a un conjunto S (supongo que tienen las nociones básicas de la teoría de los conjuntos) y son funciones que van desde {1, 2,..., n} al conjunto S para algún n. Una sucesión es *infinita* en S si es una función cuyos términos son una función desde {1, 2,...} (es decir, el conjunto de números naturales) al conjunto S.

El concepto de *límite* es utilizado para describir cómo se comporta una función a medida que su argumento o *input* se "aproxima" a cierto punto, o a medida que ese argumento tiende a ser indefinidamente grande, o cómo se comportan los elementos de una sucesión a medida que su índice aumenta en forma indefinida. Utilizaremos el concepto de límite para asociarlo con el de derivada que ya hemos visto, y el de continuidad.

Tomemos la sucesión definida por la fórmula $x_n=1/n$,

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},...$

La diferencia entre dos ítems sucesivos de la sucesión puede expresarse como:

$x_1 - x_2 = 1 - \frac{1}{2}$, $x_2 - x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ...

La distancia entre cada ítem x_n y 0 es $x_n - 0$. Podemos ver que la sucesión irá tendiendo a 0 a medida que n aumente, por lo cual la distancia x_n a 0 se hará más pequeña cuando n aumenta. Si esta distancia continúa disminuyendo y por consiguiente se aproxima a cero cuando n se hace cada vez más grande, decimos que la sucesión es *convergente* (en este caso converge a 0).

[3] Hay tres números de gran importancia en matemáticas que denotamos con letras. Estos números son: 1) El número designado con la letra griega π = 3,14159... relaciona la longitud de la circunferencia con su diámetro (Longitud = 2.π.radio= π.diámetro). 2) El número e = 2,71828......, inicial del apellido de su descubridor Leonhard Euler, matemático suizo del siglo XVIII, que aparece como límite de la sucesión con término general $(1 + (1/n))^n$. 3) El número designado con la letra griega Φ= 1,61803..., llamado número de oro, es la inicial del nombre del escultor griego Fidias (Φειδίας) que fue el más famoso escultor de la Antigua Grecia, pintor y arquitecto, perteneciente al primer clasicismo griego. Fidias diseñó las estatuas de la diosa Atenea en la Acrópolis de Atenas (Atenea Partenos dentro del Partenón y Atenea Promacos) y la colosal estatua sentada de Zeus en Olimpia. El cociente de dos números de Fibonacci consecutivos F_{n+1}/F_n tiene como límite Φ (J. Kepler).

Si tenemos otra sucesión

[13] $x_n= (1/n) + 2,$ podemos apreciar que la distancia

$x_n - 2 = 1/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \propto$ (se lee como "*1/n tiende a 0 cuando n tiende a infinito*")

Luego la sucesión tiende al límite 2 o converge a 2.

En estos ejemplos hemos explicado en forma intuitiva la convergencia a 0 en el primer caso y a 2 en el segundo. En lugar de 0 o de 2 vamos a utilizar el símbolo general *x* de la manera siguiente: cuando en una sucesión $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ la distancia entre x_n y $x,$ que será denotada $\rho(x_n,x),$ se acerca a 0 a medida que $n\rightarrow\infty,$ x_n será una sucesión convergente que convergirá a *x,* llamado el *límite*. En términos simbólicos,

[14] $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} x_n = x$

Si x_n converge a *x* pero también a *y*, esto significa que

[15] $\rho(x_n, x)\rightarrow 0$ y que $\rho(x_n,y)\rightarrow 0.$

Por una conocida *desigualdad triangular* sabemos que $\rho(x,y)\leq\rho(x_n,x)+\rho(x_n,y).$ Pero como $\rho(x_n, x)\rightarrow 0$ y $\rho(x_n,y) \rightarrow 0$ al tender *n* a $\propto$, tendremos que también $\rho(x,y) \rightarrow 0.$ Esto significa que $x=y$. Por lo tanto, *sólo puede haber un único límite para una sucesión* $\{x_n\}$.

Si una sucesión no alcanza un límite se dice que la sucesión diverge o que es *divergente*. He aquí un ejemplo elemental de sucesión divergente:

$x_n = n+3$

como ustedes lo pueden comprobar.

Todo lo que dije se aplica también al caso en que x_n sea un vector en un espacio euclídeo R^m de *m* dimensiones. De modo que no repetiré los resultados obtenidos.

Una presentación alternativa Volvamos a la sucesión [13], cuyo límite es 2. Denominamos a la sucesión de enteros *1, 2, 3,...* el *dominio* y a la sucesión de valores $x_n=(1/n)+2$ el *rango* o *codominio* de la sucesión. A medida que los enteros *1, 2, 3,...* van progresando hacia un número más elevado, el rango irá disminuyendo hacia 2, y la *distancia* $|x_n - 2|$ se irá reduciendo.[4] Supongan que la distancia es menor que un número positivo muy pequeño ε, digamos ε=½,

[16] $|x_n - 2| < \varepsilon = ½.$

Ahora bien, ¿Es posible hallar un entero N tal, que cuando $n \geq N$ se cumpla la desigualdad [16]? Bueno, la respuesta es que sí. Poniendo N=3, encuentro que

$|x_n - 2| = |(1/n)+2 -2| = |(1/n)| = ⅓ < \varepsilon = ½.$

¿Y si la distancia hubiera sido menor que ε = 1/10? Pues tomo N=11, con lo cual

$|x_n - 2| = |(1/n)| < \varepsilon = 1/10.$

[4] La expresión $|x_n - 2|$ se lee como "valor absoluto de la diferencia entre x_n y 2". Siempre es un número no negativo. Expresa la diferencia entre ambos números, pero siempre con signo no negativo.

Hacer que $\varepsilon \to 0$ es lo mismo que decir que la distancia entre x_n y 2 se aproxima a cero, con lo cual el límite de x_n es 2. Por tanto, puedo resumir lo explicado y dar una definición de *convergencia de una sucesión a un límite* como sigue: *La sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tiene un límite x a medida que $n \to \infty$, si para todo $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, se puede hallar un N tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.*

4. <u>El concepto de función</u>. <u>Costo y demanda</u>

Hemos introducido desde el vamos el concepto de función. Ahora analizaremos un poco más de cerca de qué estamos hablando cuando decimos *función matemática*. Como se dijo, este concepto expresa una dependencia entre dos cantidades, una conocida y otra que resulta como consecuencia de aquélla. En la Fig. 5, cada elemento del conjunto Y está asociado con uno del conjunto X, pero podría no ser éste el caso. Ya hemos dicho que a X se lo llama el dominio de la función, y a Y el codominio. Entonces, a cada punto del dominio se le asigna un punto del codominio, y en forma recíproca. Por la primera propiedad decimos que la función es *inyectiva*, y cuando todo punto del codominio resulta de algún punto del dominio decimos que también es *suryectiva*. Una aplicación simultáneamente inyectiva y suryectiva es denominada *biyectiva*.

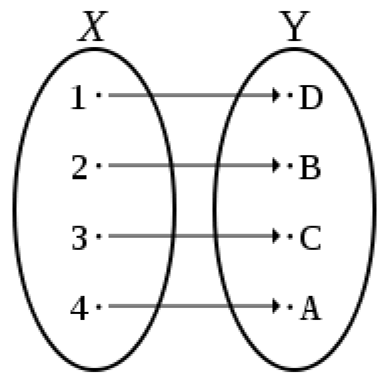

Figura 5: Aplicación biyectiva

En la Fig. 6 tenemos una aplicación sólo inyectiva, pero no suryectiva. Les dejo que imaginen por su cuenta una aplicación que sea suryectiva pero no inyectiva, y, para agotar todas las posibilidades, otra que no sea ni inyectiva ni suryectiva.

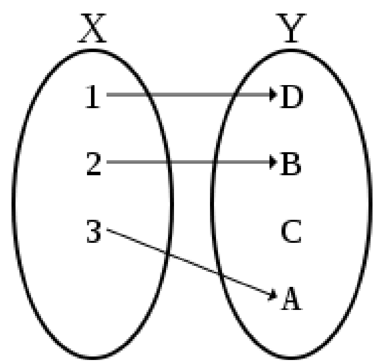

Figura 6: Una aplicación inyectiva que no es biyectiva

En economía utilizamos muchísimo el concepto funcional, por ejemplo al hablar de la *función de costos* de una empresa. Sé que ustedes saben lo que son los costos de producir una cierta cantidad *q* de un bien: lo único que tenemos que conocer es cuánto dinero costó producirla *(CT)*, por Costo Total de producción. *Pero ésta no es una función, sino una definición*: si llamo w_j al precio unitario del insumo *j* que fue utilizado en cantidad z_j, resulta claro que el costo es $\sum_j w_j z_j$. Pero como se verá, el proceso de programación de la empresa puede ser descompuesto en dos etapas: la primera, dado un nivel cualquiera de producción *q*, consiste en *minimizar* el costo total de producción de ese nivel de producto si los precios de los insumos también están dados. Obtendremos como solución *funciones de demanda de insumos condicionales* $z_j(q, w_1, \ldots w_n)$.

Estas funciones me indican cómo el empresario debe ir ajustando hacia arriba o hacia abajo la utilización de algunos factores productivos cuando varíe la cantidad producida *q* y cambien los precios de algunos de sus *n* insumos $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Las llamamos *condicionales* porque dependen de una condición: la cantidad de producto *q que debe producirse.* Después puedo reemplazar estas funciones de demanda de insumos condicionales en la definición previa de costo total $\sum_j w_j z_j$ y escribir $\sum_j w_j z_j(q, w_1 \ldots w_n)$. Ésta es la que se conoce como *función de costos de la empresa*. Naturalmente, las elecciones que hace el empresario están limitadas, por lo que se dijo en el capítulo anterior, por sus objetivos – que aquí son meramente el de bajar lo más posible su costo de producción, con la tecnología de la que dispone – de la que hablaremos en detalle más adelante, pero que en el corto plazo para él es un dato, por la estructura del mercado de sus insumos, etc.

La segunda etapa de programación consiste en hacer máximo su *beneficio*. Si su ingreso total R viene dado por $R=pq$ (precio por cantidad producida), su beneficio o ingreso neto será $R\text{-}CT=pq-\sum_j w_j z_j(q,w_1...w_n)$. Luego, su beneficio es una función de q y de los precios de los factores $(w_1...w_n)$.

Microeconomía de los costos Ahora vamos a simplificar un poco. Supondremos que el empresario enfrenta precios dados de sus insumos – es decir que por ejemplo, no puede adquirir en el mercado los servicios de un pintor de determinada habilidad a un precio más bajo que el que se paga corrientemente en ese mercado. Luego, a los fines analíticos, podemos suponer dados los precios de los insumos que intervienen en su función de costos y escribir, por ejemplo,

[17] $$CT=f(q)= a+bq+cq^2$$

donde a, b y c son constantes.

Costo marginal (MC), que es la función derivada del costo total:

[18] $$MC(q)=\frac{dCT}{dq} = b+2cq$$

Vayan apreciando que el costo marginal de una empresa es a) una función del nivel producido; b) lineal en q si el costo total es una función cuadrática en la misma variable; c) como es de esperar que el costo total sea creciente en q, también es de esperar que el costo marginal sea *positivo* (recuerden el gráfico dinámico de nuestro paradigma); d) finalmente, hay fuertes razones para esperar que sea una *función creciente en q*, como veremos en el capítulo siguiente.

Costo medio de producción (AC)

[19] $$(CT/q) = (a/q) + b + cq$$

Relación entre las pendientes de MC y AC

A la pendiente de la curva de costo medio la obtenemos hallando la derivada de *(CT/q)*. Usando la fórmula de derivada del cociente de funciones (fórmula de la derivada de *u/v*, ver más adelante) se tiene:

[20] $$\frac{d}{dq}\left(\frac{CT}{q}\right) = \frac{1}{q}\left(\frac{dCT}{dq} - \frac{CT}{q}\right) = \frac{1}{q}(MC - AC)$$

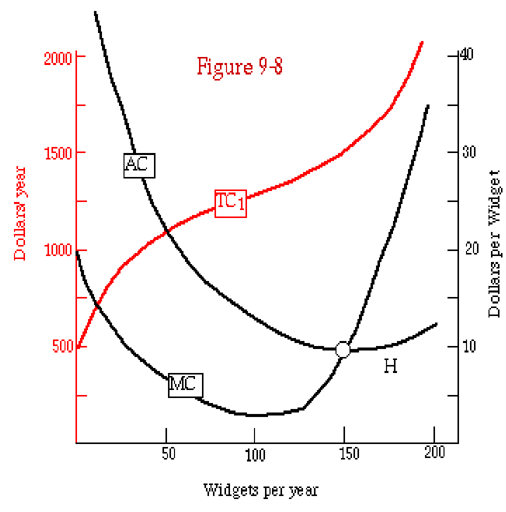

Figura 7: Funciones de costo total TC_1, Medio (AC) y Marginal (MC)
Fuente: D. Friedman (la numeración de la curva en rojo corresponde a su libro)

En la Fig. 7, la curva *AC* tiene una forma de *U* (la curva TC_1 en color rojo es una curva de costo total cúbica, que es una función creciente de lo que produce la empresa por año (“widgets” que podríamos traducir como “aparatos”). A los economistas nos gusta dibujar funciones de costo total que tienen esta forma, crecientes, cóncavas al principio pero convexas al final. Luego analizaremos qué razones hay para suponer este tipo de curvatura. Como ven, la función de costo marginal *MC* también tiene forma de *U*. La proposición [20] dice entonces que, cuando la curva de costo medio es decreciente, es decir cuando $d/dq\ (CT/q) < 0$, esto implica $MC-AC<0$, lo que significa que cuando el costo medio es decreciente, $MC<AC$. En el punto más bajo de la curva de costo medio, su pendiente es horizontal – recuerden la función que vimos previamente, $f(x) = x*sen(x^2)+1$ que al alcanzar un mínimo o un máximo tiene una tangente (en color negro) siempre horizontal, paralela al eje de abscisas. Lo cual significa que se tendrá $d/dq\ (CT/q)=0$, y por lo tanto $MC-AC=0$. Efectivamente, *la curva MC debe cortar a la curva AC en su punto mínimo*. Dejo para el análisis de ustedes demostrar que si la curva *AC* es creciente, se tendrá $MC>AC$.

Pasemos ahora a otra aplicación importante: la *curva de demanda*. Denotamos como *p* al precio y como *q* la cantidad que un comprador (p.ej. el jefe o o la jefa del hogar) desea realizar de un bien. La curva de demanda de este bien por este hogar se representa entonces mediante

[21] $q=f(p)$

Cuando analicemos en detalle el tema, vamos a ver que en realidad deberíamos además del precio considerar otras variables – tales como el ingreso disponible, el precio de otros bienes sustitutivos o complementarios del bien analizado, etc. – pero por ahora vamos a manejarnos con la máxima síntesis posible. Por ejemplo, tengo la siguiente curva de demanda, que podría representar cómo responde la cantidad demandada de impresoras láser que pongo en venta:

[22] $q=30 - 4p - p^2$.

Nos interesa analizar esta curva (cuadrática) desde el punto de vista de una empresa, la mía, que le vende a los hogares, sin competidores a la vista (que es un tema habitualmente tratado como el de un monopolio, del griego *monos*, único o solo + *polein*, vender). Hay algunos conceptos básicos que vamos a estudiar:

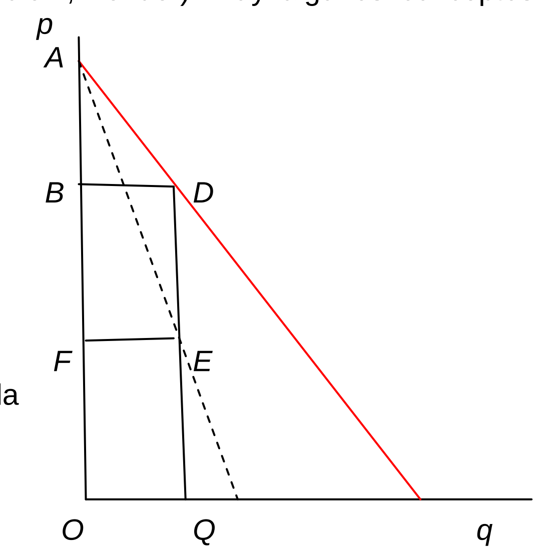

Figura 8: Curvas de Ingreso Medio y Marginal

Elasticidad de la demanda

La elasticidad de demanda η se define mediante

[23] $$\eta = -\frac{dq/q}{dp/p} = -\frac{p}{q}\frac{1}{dp/dq}$$

Para calcular la elasticidad de demanda de [23] al precio $p=3$, requiero calcular la cantidad demandada y la derivada con respecto al precio:

$$q=30 - 4p - p^2=9.$$

$$\frac{dq}{dp} = - 4 - 2p = -4 -6 = -10 \quad \Rightarrow dp/dq= -0{,}10$$

$$\Rightarrow \quad \eta = - (3/9)/(-0{,}1) = 0{,}33$$

Ingreso marginal El ingreso marginal se define como dR/dq. Entonces,

[24] $IM = dR/dq = p + (dp/dq) = p\,(1 + \dfrac{q}{p}\,\dfrac{dp}{dq}) = p\,(1 - \dfrac{1}{\eta})$

En nuestro ejemplo, para *p=3, q=9* se tiene:

$$\frac{dR}{dq} = 3\,(\,1 - \frac{1}{30/9}) = 2{,}1$$

Relación entre AR e IM La velocidad a la que cae la curva de ingreso marginal *IM* es el doble de la de caída del ingreso medio (*AR*), *definido* como *R/q.* En términos de la Fig. 8, donde ha sido representada en color rojo una curva de demanda lineal (para simplificar) que, al mismo tiempo representa el ingreso medio del vendedor, el segmento *AF=2AB*. Cuando el ingreso total es *R=pq,* el ingreso marginal es:

[25] $dR/dq = p + q\,(dp/dq)$.

Hacemos *p=DQ, q=OQ, dp/dq= - AB/BD, dR/dq=QE*. Se puede comprobar que:

$$QE = dR/dq = DQ + OQ\,(-AB/BD) = DQ + OQ\,(-AB/OQ) = DQ - AB = DQ - DE.$$

Por consiguiente,
$$DQ - DE = DQ - AB$$
$$DE = AB = BF$$
$$AF = 2\,AB.$$

Ejemplos adicionales Así como hemos calculado una *elasticidad-precio de la demanda*, en los mercados también resulta útil trabajar con el concepto de *elasticidad-precio de la oferta*. Ambos conceptos tienden a dar una idea acerca de cuán sensible es la cantidad demandada (u ofrecida) a un cambio del precio del bien. Así, por ejemplo, si cuando el precio de la nafta aumenta en un 1% la cantidad demandada se reduce en un 0,2%, podríamos decir que la demanda de nafta no es demasiado sensible al precio. Para dar un ejemplo opuesto, si cuando el precio de las joyas de oro aumenta en 1% la cantidad demandada cae en un 2,6%, diremos que la joyería de oro es bastante sensible al precio. El mismo concepto lo podemos aplicar a la oferta: cuando el precio de una pintura de Da Vinci aumenta en 1% y la oferta no cambia en absoluto, la cantidad ofrecida de pinturas de Da Vinci es completamente insensible al precio. Si cuando el precio de la carne aumenta en 1% la cantidad ofrecida lo hace en un 5%, diremos que la oferta de carnes es muy sensible o elástica al precio.

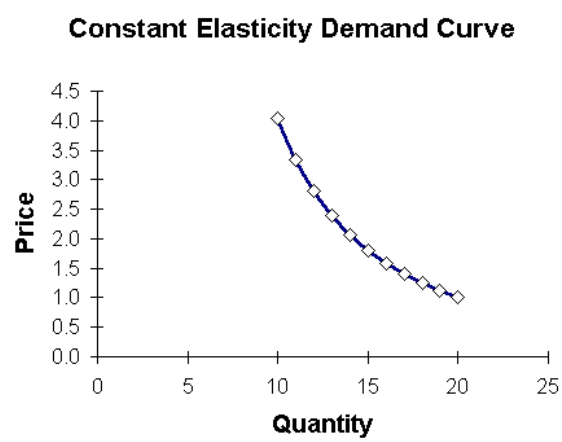

Figura 9. Curva de demanda de elasticidad constante

¿Cuáles son las correspondientes elasticidades de demanda y de oferta? En los dos primeros ejemplos, son 0,2 y 2,6. En los dos últimos, 0 y 5. Fíjense que el concepto de elasticidad no tiene dimensión (es un número). Como la elasticidad es tomada en valor absoluto – no interesa su signo, excepto en el caso de bienes inferiores – lo que resulta importante es su dimensión. Así, los economistas hablan de bienes *inelásticos al precio* (como el caso de la nafta o las pinturas de Da Vinci) o *elásticos al precio* (como la joyería de oro y la oferta de carnes), siendo la elasticidad de referencia el valor *unitario*.

Hay también bienes de *elasticidad constante* como se exhibe en la Fig. 9, que responden a la siguiente fórmula de demanda:

[26] $qp^n=C$

en la cual n y C son constantes. Vamos a demostrar que esta curva tiene una elasticidad igual a n. Para ello pasamos la variable precio al segundo miembro:

[27] $q= Cp^{-n} \equiv C / p^n$

Luego $dq/dp = (-n)Cp^{-n-1}$. (Para ello, aplicamos una fórmula que veremos más adelante)

Por lo tanto, $\eta= - (p/q).(dq/dp) =- \dfrac{p}{Cp^{-n}} (-n)\, Cp^{-n-1} = n$

Luego, si tengo $n=1$, entonces la curva $pq=C$ es una curva de demanda de elasticidad *unitaria* (llamada *curva de gasto constante*).

Resumiendo,

Elast. Unitaria

Inelást. <----- ------------------------------------> *Elástica*

|------------ ☻ --------------|--------------|--------------|-------------|------------|------>

0 1 2 3 4 5 6

La elasticidad también puede ser *expresada en logaritmos*. Si tengo una curva de demanda $q= f(p)$ y obtengo la derivada de los logaritmos (ver más adelante):

[28] $d \ln q/d p = (1/q). (dq/dp)$;

también se verifica que $d \ln p/dp = 1/p$.

Por lo tanto, la elasticidad de la curva de demanda es:

[29] $\eta=-(d \ln q/dp)/(d\ln p/dp)=-d(\ln q)/d(\ln p)$ (*elasticidad como cociente de derivadas logarítmicas*).

5. <u>Límite de una función</u>

La definición del matemático Weierstrass del límite de una función considera una función f definida en un intervalo abierto que contiene al punto c (exceptuando tal vez al mismo punto c) y establece un número L (que es un número real). Luego la notación:

[30] $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

significa que para todo número real ε > 0 existe un número real δ > 0 con la propiedad siguiente: para todos los números *x* que verifican $0 < |x - c| < \delta$, se tendrá $|f(x) - L| < \varepsilon$. El hecho de que ε pueda ser cualquier número positivo arbitrario corresponde a la noción de que somos capaces de aproximar *L* por medio de *f(x)* tanto como se desee. El δ indica una distancia “suficientemente próxima” de los valores de *x* a *c* tales que *f(x)* permanece a una distancia menor que ε del límite *L*.

Límite de una función en infinito Un concepto vinculado al límite cuando *x* se aproxima a algún número finito es el límite cuando *x* se acerca al infinito positivo o negativo. Esto no debe ser tomado literalmente como que significa que la diferencia entre *x* e infinito se va haciendo pequeña, porque el infinito *no* es un número real; en su lugar, cabe interpretarlo como que *x* crece sin límite positivo (infinito positivo) o decrece sin ningún límite negativo (infinito negativo).

Advertencia sobre la definición de Weierstrass La definición de Weiertrass sólo nos proporciona un método de *reconocer* si estamos en presencia de un límite, pero no nos da una pista acerca de cómo *calcularlo*. A menudo es necesario el uso de métodos informales, en particular si *f(x)* es discontinua en el punto *c*, por ejemplo si *f* es un cociente cuyo denominador se hace nulo en *c*. Siempre se debe verificar que el resultado cumpla con la definición de Weierstrass en estos casos.

Por ejemplo, con la función $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)}$

Entonces $f(100)=1.9802$; $f(1000)=1.9980$; $f(10000)=1.9998$.

A medida que *x* crece ilimitadamente, el valor de *f(x)* se aproxima a 2, y lo que es más, podemos hacer que este valor sea tan próximo a 2 como se desee, con tal de tomar un *x* bien grande. En tal caso, decimos que el límite de *f(x)* a medida que *x* se aproxima a infinito es igual a 2. O, en notación matemática, $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$.

Podríamos haber razonado de otra manera: dividimos numerador y denominador de *f(x)* por *x*, con lo cual no se altera el valor de la función. Nos queda:

$$f(x) = \frac{2}{(1+(1/x))}$$

Como el lím *f(x)* es igual al cociente del límite del numerador y el límite del denominador (ésta es una regla que no demostraré pero que es conveniente que recuerden), la respuesta es inmediata: 2 es un número fijo, y el límite del denominador es 1, porque es igual a lim (1+(1/*x*)), compuesto por la suma de 1 más una fracción (1/*x*) que tiende a cero cuando *x* tiende infinito. Luego, 2 es el límite buscado.

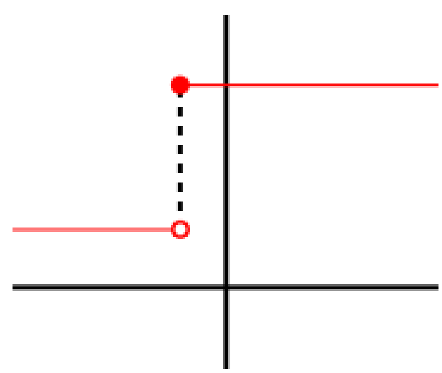

Figura 10

Cotas superior e inferior Imaginen la sucesión $x_n=1 - 1/n$ *: 0, 1-½, 1-⅓, ...* Fíjense que ningún elemento de esta sucesión es mayor que 1. Diremos que *β*=1 es una *cota superior* de esta sucesión, de la misma forma que lo son 2, 3, etc. En forma simétrica, una *cota inferior α* de un conjunto de números reales *R* debe cumplir que *x*≥ *α* para todo *x* de *R*.

De las numerosas cotas superiores, podemos seleccionar la más pequeña, que es la *mínima cota superior* (también denominada *supremo*). En forma simétrica, definimos a la *máxima cota inferior* o *ínfimo* de un conjunto. Si la sucesión fuera $x_n=1-1/n$, todo número menor que 1, por ejemplo 1 - ε, tomando ε como un número muy pequeñito, *no sería una cota superior*, porque si fijamos un *n* suficientemente grande podremos encontrar muchos números mayores que 1 - ε, es decir entre 1 - ε y 1. No hay más remedio que definir al supremo en este caso como 1.

Continuidad Una función se dice continua si en puntos muy próximos del dominio se producen pequeñas variaciones de los valores de la función. Si la función no es continua, se dice que es *discontinua*. Intuitivamente, una función continua es aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Las funciones graficadas en las páginas anteriores son todas continuas. Hay definiciones modernas más complicadas que han extendido el concepto de continuidad funcional para contemplar funciones que tienen saltos acotados como en la Figura 10. Esta función es *continua a la derecha* del punto donde se produce el salto, porque cuando nos vamos aproximando a ese punto desde la derecha llegamos al punto rojo que satisface la función. En cambio si el punto rojo fuera el punto inferior, diríamos que la función analizada es *continua a la izquierda* de ese punto. Pero estas complicaciones no van a aparecer en el curso, pero las tienen que conocer porque cuando trabajamos con tecnologías lineales se da con suma frecuencia este tipo de continuidad “para un solo lado”. Por ejemplo consideren la siguiente función definida por tramos, f(x) = –1 si x < 0 y f(x) = 1 si x ≥ 0. Ésta función es semi-continua superiormente pero no inferiormente, como indica la Figura 10.

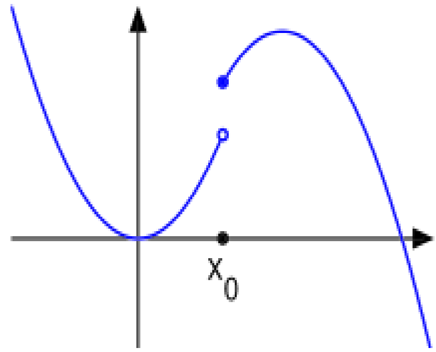

Figura 12. Función inferiormente semi-continua

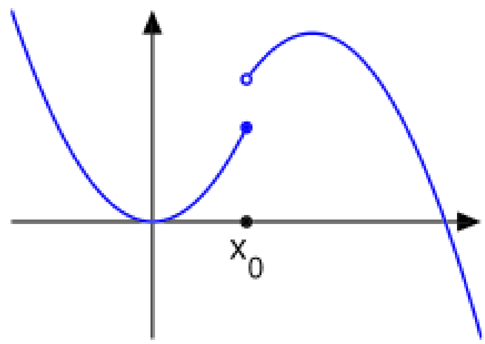

Figura 11. Función superiormente semi-continua

Reglas de diferenciación Ya hemos hablado del concepto de derivada. Ahora voy a analizar cómo extraer la derivada de una función dada. Ustedes pueden acceder a la página de wikipedia del listado de identidades de diferenciación en http://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_derivatives

Lo primero que hay que tener en cuenta es que, a partir de una función *f(x)*, la derivada permite obtener *otra función de x* que vamos a denotar como *f’(x)*. Empezaremos con algunas funciones simples, para luego pasar a otras más complejas.

Derivada de una constante (y=c) y de la función identidad (y=x)

$c'=0$
$x'=1$

Lo primero es evidente, dado que la constante no depende de *x*, y por lo tanto no hay ningún cociente de incrementos para calcular y extraer luego el límite. Para la función identidad, escribo

$y+\Delta y=x+\Delta x$
$\Delta y= - y + x +\Delta x=\Delta x$

$\Delta y/\Delta x=1$

Derivada del producto de x por una constante

$y=cx \quad \rightarrow y+\Delta y=cx+c\Delta x$
$\Delta y= - y + cx + c\Delta x$
$\Delta y/\Delta x = c$

Luego, simplemente $(dy/dx)=c$

Derivada de una potencia

$y=x^c$ (usando la expansión binomial [5])

$= y+\Delta y=x^c+({}^c{}_1)\ x^{c-1}\Delta x +({}^c{}_2)\ x^{c-2}(\Delta x)^2+\ldots+ ({}^c{}_{c-1})\ x\ (\Delta x)^{c-1}+(\Delta x)^c$

donde la forma $({}^c{}_k)$ es el coficiente del binomio.[6] Recordar que $({}^c{}_k)=c!/(c-k)!\ k!$ *(k! es llamado el "factorial de k").* Luego

$\Delta y/\Delta x = ({}^c{}_1)\ x^{c-1}+({}^c{}_2)\ x^{c-2}(\Delta x) +\ldots+({}^c{}_{c-1})\ x\ (\Delta x)^{c-2}+(\Delta x)^{c-1}$

Extrayendo el límite miembro a miembro:

$\lim\limits_{\Delta x\rightarrow\infty} (\Delta y/\Delta x)= ({}^c{}_1)x^{c-1}= c\ x^{c-1}$

La fórmula general, por lo tanto, es: $dy/dx= d/dx\ (x^c)= cx^{c-1}$.

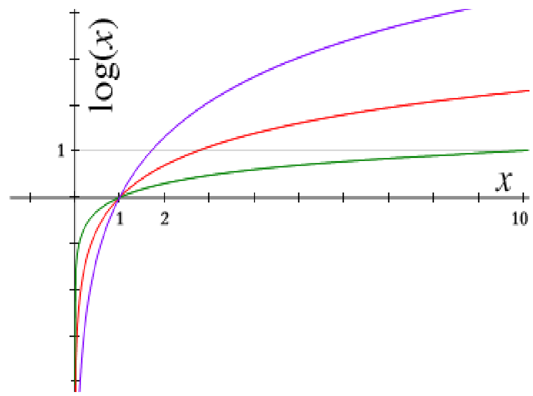

Figura 13
Representación gráfica de logaritmos en varias bases: el rojo representa el logaritmo en base e, el verde corresponde a la base 10, y el púrpura al de base 1,7. Los logaritmos de todas las bases pasan por el punto (1, 0), esto es debido a que cualquier número elevado a cero es igual a uno, y también los puntos (b, 1) para la base b, debido a que cualquier número elevado a la unidad es igual a sí mismo.

Tabla de derivadas No voy a continuar este tratamiento aquí, pero las funciones básicas que deben recordar, tratando de resolver los problemas de la sección 3.2 del libro de Yamane, son: la constante, la identidad, la potencial, la exponencial, la logarítmica, así como las derivadas de sumas, restas, productos y cocientes de funciones. Para que tengan una referencia incluyo a continuación un listado de las funciones derivadas más usuales, publicado por "profesores de la UBA". Cabe tener en cuenta que el logaritmo es una función matemática inversa de la función exponencial. Dado un número real (argumento), la función logaritmo asigna el exponente (o potencia) a la que un número fijo (base) se ha de elevar para obtener dicho argumento. Es la función inversa de la exponencial $x = b^n$, que permite obtener n. Esta función se escribe como: $n = \log_b x$. Así, en la expresión $10^2 = 100$, el logaritmo de 100 en base 10 es 2, y se escribe como $\log_{10} 100 = 2$. Se denomina logaritmo neperiano o logaritmo natural (ln) al logaritmo en base e de un número. Esta base (e=2,718 281 828...) es un número trascendente muy importante en economía.[7]

[5] V. http://mathworld.wolfram.com/BinomialIdentity.html
[6] V. http://mathworld.wolfram.com/BinomialCoefficient.html
[7] http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_trascendental

FUNCION LOGARITMICA

Funciones	**Derivadas**
$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} = \dfrac{u'}{u} \log_a e$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$

FUNCIONES ALGEBRAICAS

Funciones	**Derivadas**
$y = a$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = u \pm v \pm \ldots$	$y' = u' \pm v' \pm \ldots$
$y = a \cdot u$	$y' = a \cdot u'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + v' \cdot u$
$y = u \cdot v \cdot \ldots$	$y' = u' \cdot v \cdot \ldots + v' \cdot u \cdot \ldots + \ldots$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$y = \dfrac{a}{u}$	$y' = \dfrac{-a \cdot u'}{u^2}$
$y = \dfrac{u}{a}$	$y' = \dfrac{u'}{a}$

FUNCIONES POTENCIALES
EXPONENCIALES y de V.A.

Funciones	**Derivadas**
$y = u^a$	$y' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$
$y = u^{-a}$	$y' = \dfrac{-a \cdot u'}{u^{a+1}}$
$y = u^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{u}$	$y' = \dfrac{1}{a} \cdot u^{\frac{1}{a}-1} \cdot u' = \dfrac{u'}{a \sqrt[a]{u^{a-1}}}$
$y = a^u$	$y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$
$y = u^v$	$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \cdot \ln u$
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
$y = \lvert u \rvert$	$y' = \dfrac{u}{\lvert u \rvert} u'$

Finalmente, no olvidar la importante <u>regla de la cadena</u> *y=f(u), u=g(x)→ y'=(dy/du).(du/dx).*

6. Funciones de varias variables

El ejemplo que vimos antes, de que el trigo puede ser producido usando un único insumo (trabajo) es demasiado simple. Más realista sería expresar que el trigo producido depende no sólo del trabajo realizado sino de la extensión de terreno sembrado, lo cual nos lleva a postular una función de dos variables *z=f(x,y)*. El caso más simple (incluyendo una constante) es la proporcionalidad directa con respecto a ambos insumos, por ejemplo:

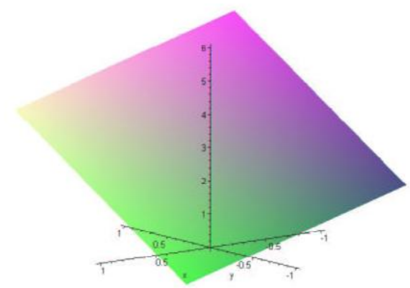

Figura 14
Gráfico de *z=ax+by+c*

[31] $z=ax+by+c$

donde *a, b* y *c* son constantes (Fig. 14).

Los distintos pares ordenados[8] *(x,y)* indican entonces diversas combinaciones de trabajo y tierra. Tomen un punto *P* sobre esa superficie. Entonces la superficie *f(x,y)* indica en el eje *z* cuánto trigo será producido por la combinación de *x* e *y*. Esta superficie es llamada superficie de producto total (en contraste con la curva de producto total del caso bidimensional).

En la Figura 15 se tiene una representación gráfica más general de una *función de producción* Y=*f*(K,L) que vincula la utilización de dos factores, K (capital) y L (trabajo) con Y (producto). A diferencia del caso anterior, el producto no crece proporcionalmente con el uso de los factores. Esta superficie tiene una gran riqueza de información que vamos a tratar de extraer. En primer lugar, observen que el producto aumenta *a medida que aumenta la aplicación de los dos insumos*, pero que lo hace en forma de S – es decir, los mayores incrementos de producción se verifican con las dosis iniciales de aplicación de ambos insumos, pero que a medida que seguimos expandiendo su aplicación el crecimiento del producto se va haciendo menos pronunciado. Este comportamiento es denominado *ley de los rendimientos variables a escala*, la cual enuncia que para una reducida utilización de insumos, un aumento de ambos insumos (capital y trabajo) redundará en un incremento más que proporcional del producto, pero que habrá algún punto de inflexión en que incrementos adicionales de ambos insumos no conseguirán sino aumentos menos que proporcionales del producto. Si por el contrario tuviéramos una superficie como en la Fig. 14 que pasa por el origen (e.d. *c=0*, cuando la producción es directamente proporcional al uso de insumos) un incremento de *todos* los insumos en 1% también conducirá a una expansión del producto del 1%. Este último comportamiento conduce a la *ley de rendimientos constantes a escala*. Funciones matemáticas con estas características son llamadas *homogéneas de grado 1*. Las analizaremos más adelante en este capítulo.

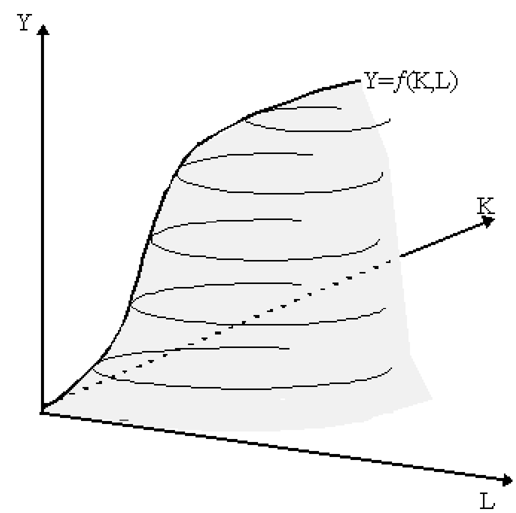

Figura 15
Gráfico de Y=*f*(K,L)

[8] http://es.wikipedia.org/wiki/Par_ordenado.

Todavía no hemos terminado con la Fig. 15, ¡y ya apareció la Fig. 16! Aprecien en la figura 15 que se han trazado algunas líneas que parecen centroides para determinados niveles de la producción. Si lo piensan, pueden deducir que son *combinaciones* de capital y trabajo que permiten producir el mismo nivel de producto. Son tan importantes que hasta merecen ser tener nombre propio: son *isocuantas*. La forma de las isocuantas va a depender de la forma de la función de producción. Comencemos con las de la Fig. 14, que han sido graficadas en el margen adjunto. Matemáticamente las obtenemos manteniendo z=constante (arbitraria)=$ax+by$ y despejando y en términos de x:

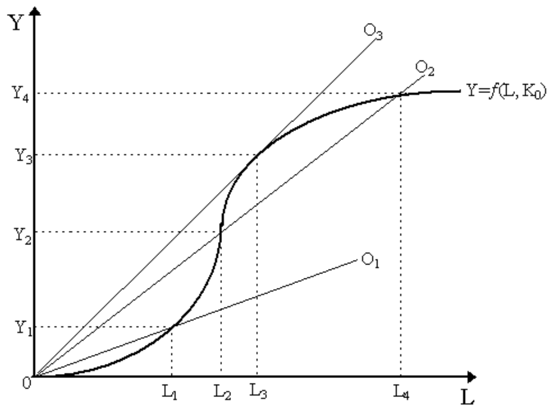

Figura 16
Curva de Producto Total de Trabajo (L) dado K_0

$$y= -(a/b)\, x + constante/b$$

Las distintas isocuantas de [31] son simplemente segmentos rectos tales que Q_1 (un nivel de producción arbitrario)$<Q_2<Q_3$. Como los coeficientes a y b son positivos (reciben el nombre de *productividad marginal física* de cada insumo) las isocuantas son de pendiente *negativa*. ¿Por qué hemos dibujado 3 isocuantas? Por el simple motivo de que hice 3 hipótesis sobre el nivel de la *constante* arbitraria (que representa nuestro nivel de producción). Este procedimiento es universal. Los economistas tenemos la manía (¡en el buen sentido!) de reducir los gráficos de muchas dimensiones a gráficos de menores dimensiones que no pierdan las propiedades de los originales. Al cociente de productividades marginales físicas se le da el nombre de *relación técnica de sustitución* o RTS. La RTS del gráfico 15 es algo más complicada, y hay que hacer algo más de matemática. Pero todo lo que hemos dicho seguirá siendo válido. ¡Ánimo!

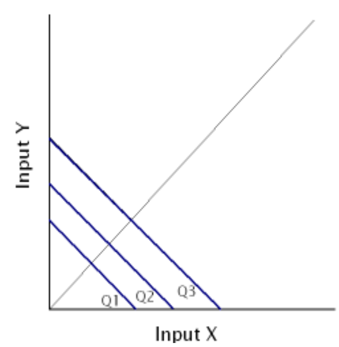

Figura 17 Isocuantas de la Figura 14

7. <u>El concepto de derivada parcial</u>

Volvamos a la función $z=f(x,y)$, donde z representa la cantidad producida de trigo, x es trabajo aplicado, e y es la tierra. ¿Cuál será el cambio de z (trigo) cuando aplicamos una pequeña dosis adicional de x (trabajo), manteniendo y (la cantidad de tierra) constante? (Para aquellos que estén esperando una interpretación legal, les sugiero que consideren que z es la sanción obtenida por un demandado en un juicio civil, comercial o criminal, por ejemplo, x es la calidad del sistema de instituciones vigente e y es la cantidad y calidad del trabajo realizado por el abogado defensor, teniendo en cuenta, además, las pruebas del ilícito por el que se lo demanda y otras variables que por el momento no es necesario especificar). Lo que haremos es suponer que $y=y_0=k$. Luego,

$$z=f(x,y_0)=f(x,k).$$

Como $y=y_0=k$, z pasa a ser una función de *una sola variable*, a saber x. Ya sabemos cómo hallar la derivada, en este caso con respecto a x, que suele ser denotada de varias formas:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \text{ o } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ o } f_x$$

Observen que utilizamos la letra griega ∂ en lugar de la *d* para indicar que las restantes variables de la función (en nuestro caso, *y*) han sido mantenidas constantes. Esta derivada es llamada la *derivada parcial de f(x,y) con respecto a x (trabajo)*. Lo importante es que la técnica de diferenciación para obtener la derivada con respecto a una variable – manteniendo constantes las demás – es exactamente la misma que para una sola variable (según lo que ya hemos visto).

Ejemplos (a) Volviendo a nuestra función de producción lineal $z=f(x,y)=ax+by+c$ ¿cuál es la derivada parcial con respecto a *x* (trabajo)? Tendremos que $f_x=a$.

(b) Pasemos ahora a la Fig. 16, en la que está indicada la producción total de trigo variando el trabajo L pero manteniendo el capital constante en K_0. A esta curva se la denomina *curva de producto total del trabajo (dado $K=K_0$)*. Resulta una curva convexa hasta el nivel L_2 y a partir de allí pasa a ser una función cóncava. ¿Cuál es el *producto de trigo por hora de trabajador empleado*? Hay una forma sencilla de obtenerlo, que es calcular la pendiente de semirrectas como O_1, O_2 u O_3. El producto por trabajador es, por ejemplo para L_1, igual a Y_1/L_1; ¡pero entonces, la geometría del secundario nos dice que éste resulta entonces exactamente igual al cateto (opuesto) del triángulo en L_1 dividido por el cateto adyacente OL_1 (es decir, Y_1/L_1)! Ésta es precisamente la definición matemática de la *tangente trigonométrica* del ángulo que forma la semirrecta O_1 con el eje de abscisas (L). Cuando esta última aumenta, también lo hace la primera. *Luego, basta verificar los ángulos que forman las semirrectas OL_1, OL_2, etc. con el eje de abscisas para sacar el producto medio del trabajo (otro tanto se podría decir acerca del capital).* ¿Y el producto marginal? Éste viene dado por la pendiente del segmento tangente en cada punto de la curva. Esta pendiente es muy reducida para un empleo igual a 0, pero aumenta hasta que llegamos al empleo L_2; a partir de allí la pendiente vuelve a decrecer. Ténganlo en cuenta: *el nivel de empleo que maximiza el producto medio del trabajo (L_3) es superior al que maximiza el producto marginal (L_2).*

(c) Si la producción de *z* (trigo) guarda la siguiente relación con *x* (trabajo) e *y* (tierra):

$$z=f(x,y)=x^2+4xy+y^2$$

será sencillo hallar la productividad marginal del trabajo para una cantidad de tierra dada: hay que obtener la derivada parcial de *z* con respecto a *x*:

$$f_x= 2x+4y$$

Una vez hallada la derivada parcial con respecto a *x* es fácil hallar las derivadas de orden superior:

De 2º orden con respecto a *x*: f_{xx} (también denotada como $(\partial^2 f/\partial x^2)$)= 2

De 3º orden con respecto a *x* = 0 (y también de 4º, 5º, etc.)

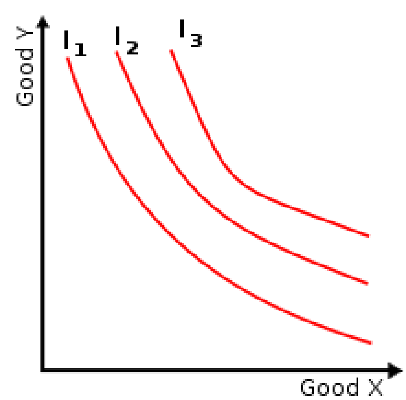

Figura 18
Mapa de isocuantas, caso gral
(comparar Fig. 17)

Hay una derivada parcial que es importante: la *derivada parcial cruzada*, obtenida derivando en 1º término con respecto a *x*, y en 2º término con respecto a *y*, denotada como f_{xy}, que en nuestro ejemplo es igual a 2. También es denotada como $\partial^2 z/\partial x\partial y$. Un teorema nos asegura que, siempre que las derivadas cruzadas f_{xy} y f_{yx} sean continuas en la región considerada, es irrelevante el orden de diferenciación (es decir, $f_{xy}=f_{yx}$) por el teorema de Clairaut-

Schwartz.[9] ¿Qué nos indica esta derivada, p.ej. si es positiva? Tomemos una cantidad dada de tierra, y obtengamos el producto marginal del trabajo, que como hemos visto es positivo para cantidades de horas trabajadas y de tierra labrada positivas. Si ahora volvemos a extraer la derivada con respecto a la tierra, obtenemos el número positivo 2. Lo cual significa que *los insumos se refuerzan entre sí.*

(d) La *productividad marginal de un insumo* (trabajo) en el caso más general de la Fig. 16, aumentará hasta llegar al empleo L_2 (denominado el *punto de inflexión de la curva de producto total del trabajo*, es decir cuando pasa de ser convexa a cóncava), punto en el que alcanza su máximo, y a partir de entonces comenzará a descender en la región cóncava de la curva de producto total. Ahora explotaremos esta información para hallar la RTS de esta función. Para ello necesitamos introducir un concepto matemático muy útil, que es el de *diferencial total de una función*.

Cuando escribimos la función de producción anterior $z=f(x,y)$ podemos preguntarnos ¿qué cambio se producirá en z (trigo) si introducimos un pequeño cambio en x (trabajo) y en y (tierra)? Luego podemos aplicar nuestras definiciones previas de derivadas parciales: Si x cambia en Δx, se tendrá un cambio del producto igual a $f_x\Delta x$. En forma semejante, cuando hay un cambio pequeño de y en Δy, el cambio del producto será $f_y\Delta y$. Luego, como primera aproximación, si variamos las cantidades de x e y en magnitudes suficientemente pequeñas, podemos aplicar el *principio de superposición* que establece que la respuesta neta en cierto espacio y tiempo causada por dos o más estímulos es igual a la suma de respuestas que hubieran sido causadas si cada estímulo hubiera actuado en forma individual (que en nuestro caso es una propiedad de la diferenciación) y escribir

$$\Delta z=f_x\Delta x + f_y\Delta y.$$

Ahora usaremos la notación diferencial poniendo $dz=\Delta z$, $dx=\Delta x$ y $dy=\Delta y$. Entonces, en forma abreviada,

$$dz=f_xdx +f_ydy.$$

Ejemplo $z=f(x,y)=4x^2+3y^2$. El *diferencial total* es $dz= f_xdx +f_ydy$ donde $f_x=8x$, $f_y=6y$. Luego,

$$dz=8xdx + 6ydy.$$

Ahora podemos responder a la pregunta inicial. ¿Cómo se calcula la RTS de una función de producción cualquiera? Ya hemos visto que, en el caso de la Fig. 17, la RTS resulta igual al cociente a/b. Primero conviene graficar el mapa de isocuantas de esta misma función (Fig. 17). Este mapa es obtenido calculando el diferencial total de la función de producción y suponiendo que el producto no cambia (es decir, $dz=0$). Por lo tanto nos queda

$$0= f_xdx +f_ydy, \text{ de donde}$$
$$dy/dx= - f_x/f_y.$$

Como las productividades marginales físicas de los insumos son habitualmente positivas, la pendiente dy/dx es la pendiente negativa de una curva isocuanta (ver ahora Fig. 18). En los ejes son representados dos insumos productivos: "Good X" y "Good Y". I_1, I_2 e I_3 corresponden a tres índices de producción crecientes. La forma convexa de estas curvas refleja el supuesto de *convexidad* del proceso productivo: si tomando un segmento secante a una de las curvas que

[9] http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Clairaut.

permite producir, digamos, I_1, una combinación de insumos consistente en utilizar la ½ de la canasta de uno de los extremos y la ½ de la canasta del otro extremo nos ubicará en una isocuanta más elevada: perseguir una política de producción más equilibrada siempre tendrá un beneficio de mayor producción. Es útil advertir que éste es un supuesto que no necesariamente tiene por qué ser válido. La hipótesis de convexidad es típica de los modelos económicos.

8. Funciones homogéneas

En economía suelen ser utilizadas a veces funciones homogéneas. Comenzaremos con un ejemplo: Si se tiene la función:

$$f(x,y)=x^2-y^2$$

y reemplazamos x por tx e y por ty $(t>0)$:

$$f(tx,ty)= (tx)^2-(ty)^2=t^2f(x,y).$$ (Es decir, el resultado es la función original multiplicada por t^2).

Si la función hubiera sido $f(x,y)=x^3-y^3$, luego

$$f(tx,ty)= (tx)^3-(ty)^3=t^3f(x,y).$$

Por inducción se tiene

$f(x,y)=x^n-y^n$ y por consiguiente
$f(tx,ty)= (tx)^n-(ty)^n=t^nf(x,y).$

Otro ejemplo es el siguiente:

$$f(x,y)=x^2+xy-3y^2.$$

En este caso,

$$f(tx,ty)=t^2f(x,y).$$

Este tipo de funciones se caracteriza por tener el comportamiento siguiente:

$$f(tx,ty)=t^hf(x,y)$$

y las llamamos *funciones homogéneas de grado h*. Uno de los más utilizados es el tipo de funciones de grado 1 y 0. La denominada función de producción *Cobb-Douglas,*[10] de grado 1, se escribe:

$$Y=bL^{\alpha}K^{1-\alpha} \qquad [32]$$

en la cual Y es el producto, L es trabajo y K capital, siendo b y α constantes. Escribiéndola como $Y=f(L,K)$ resulta inmediato que:

$$f(tL,tK)=b(tL)^{\alpha}(tK)^{1-\alpha}=tbL^{\alpha}K^{1-\alpha}=tf(L,K),$$

[10] http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Cobb-Douglas.

es decir que la función es homogénea de grado 1. Lo que esto quiere decir es que si duplicamos el trabajo y el capital empleados (*t=2*) el producto también se duplicará.

Ahora escribiremos el producto marginal del trabajo de la ecuación [32]:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = b\alpha\, L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}$$

Escrito en notación funcional, esto es equivalente a:

$$f_L = f_L(L,K) = b\alpha\, L^{\alpha-1}K^{1-\alpha} = b\alpha\,(L/K)^{\alpha-1},$$

expresión que muestra que el producto marginal del trabajo sólo depende del *cociente L/K* pero no de sus valores absolutos. *Un incremento de ambos factores en idéntica proporción dejará invariante el cociente y por consiguiente el producto marginal del trabajo (y también del capital). Ergo, las productividades marginales de la función Cobb-Douglas son homogéneas de grado 0*.

El teorema de Euler Este teorema es válido para funciones homogéneas, y aplicado en economía con relación a la teoría de la productividad marginal. También es conocido como *teorema de la adición*. Supongan que $z=f(x,y)$ es una función homogénea de grado h. La tesis es que:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} \equiv hz$$

Vamos a demostrar esta propiedad mediante una diferenciación implícita, con la hipótesis:

$$f(tx,ty) = t^h f(x,y)$$

Tomando la derivada con respecto a t del 1º miembro:

$$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial(tx)}\,.\,\frac{\partial tx}{\partial t} + \frac{\partial f(tx,ty)}{\partial(ty)}\,.\,\frac{\partial ty}{\partial t} = f_{(tx)}\,x + f_{(ty)}\,y$$

Haciendo lo propio con el 2º miembro:

$$\frac{\partial t^h}{\partial t} f(x,y) + t^h\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial t} = ht^{h-1}f(x,y) + 0 = ht^{h-1}f(x,y)$$ (porque $f(x,y)$ no depende de t).

Dado que ambos miembros son iguales,

$$xf_{(tx)} + yf_{(ty)} = ht^{h-1}f(x,y)$$

Como t puede ser cualquier número (positivo), haciendo $t=1$:

[33] $$xf_x + yf_y = hf(x,y)$$

expresión en la cual h es el grado de la ecuación. Para una función *lineal homogénea*, se tendrá $h=1$, y por lo tanto:

[34] $xf_x+yf_y= f(x,y) = z$,

según lo cual el producto será agotado en pagos a los insumos o factores productivos si se les paga de acuerdo con su productividad marginal. Una función que verifica la propiedad de ser lineal homogénea es la función Cobb-Douglas (Queda como ejercicio).

Elasticidad parcial Ya hemos hablado de la elasticidad-precio de una curva de demanda. Consideramos ahora una función

[35] $q_a=f(p_a,p_b)$

en la cual q_a es la cantidad demandada de un bien *A*, p_a es su precio y p_b el precio de otro bien *B*.

Definimos la *elasticidad-precio parcial directa* del bien *A* como

[36] $$\eta_{a/a}= -\frac{\partial q_a}{\partial p_a}.\frac{p_a}{q_a}$$

Asimismo definimos la *elasticidad-precio parcial cruzada* del bien *A* con respecto a *B* como

[37] $$\eta_{a/b}= -\frac{\partial q_a}{\partial p_b}.\frac{p_b}{q_a}$$

Ejemplo Supongan que *a* es el bien “carnes rojas”, y que *b* es el bien “carnes blancas” (por ejemplo, pescado). Sea la función de demanda de carnes rojas $q_a=50 – 0,3*p_a – 4p_b$. Se pide: calcular la elasticidad-precio parcial directa de *a* y la elasticidad-precio cruzada con respecto a *b,* suponiendo que los precios son $p_a=p_b=5$.

Para el cómputo de [36] necesito conocer

$$\frac{\partial q_a}{\partial p_a}= -0,3$$

Por consiguiente,

$$\eta_{a/a}= - (-0,3)\,\frac{p_a}{50-5p_a-4p_b}$$

Luego $\eta_{a/a}$= -0,3. Pregunta: ¿pueden ustedes calcular la elasticidad-precio cruzada $\eta_{a/b}$? ¿Cuál es su significado económico?

9. <u>Funciones crecientes y decrecientes, cóncavas y convexas. Máximos y mínimos</u>

Llamemos *x* al nivel de producto e *y* al costo medio. Además, vamos a suponer que la relación entre *x* e *y* es $y=40-6x+x^2$. La podemos imaginar como representando una *función de costo medio.* La pregunta a responder es ¿cómo se comportará *y* a medida que *x* aumenta? La forma más simple de responderla es dibujar la curva. Lo hacemos armando una tabla como la siguiente en la cual vamos asignando varios números a *x* y calculando el *y* que le corresponde a cada uno:

x	*y*
1	35
2	32
3	31
4	32
5	35
6	40
7	47
8	56
9	67

Luego, como está representado en la Fig. 19, observamos que al crecer el nivel de producción (*x*) el costo medio (*y*) disminuye, alcanza un mínimo para una producción igual a *x*=3, y luego comienza a crecer. Las funciones cuyo valor va disminuyendo son denominadas *funciones decrecientes* como lo verifica *y=f(x)* en el segmento que va de 1 a 3, pero se torna *creciente* a partir de la producción *x*=3. Esto también lo podemos apreciar seleccionando un punto cualquiera de la curva y dibujando una recta tangente a la curva en ese punto. La pendiente de esta recta tangente en un punto *P* es precisamente la derivada de la función en ese punto. Si la curva es decreciente en *P*, su tangente corresponde a la tangente de un ángulo (α) mayor que un ángulo recto de 90º. Pero *los ángulos mayores que un ángulo recto tienen tangente negativa* (ejemplo, tan 135º=tan (180º-45º)=-tan 45º=-1). Por consiguiente, la derivada será igual a f_x= tan α= -1 si α=135º= -1<0. En general, cuando α>90º, se tendrá $f_x<0$. Y en conclusión decimos que *y=f(x)* es decreciente en el punto *x* cuando $f_x<0$. Mediante un argumento similar, decimos que *y=f(x)* es creciente en el punto *x* cuando $f_x>0$.[11]

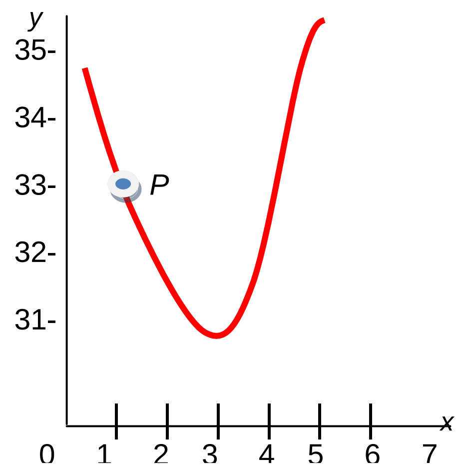

Figura 19
Curva de Costo Medio

En la función de costos usada, ¿tenemos un comportamiento creciente o decreciente del costo medio cuando *x=2* y *x=4*? Por lo que hemos dicho, debemos calcular la derivada de la función de costo medio, que era $y=40-6x+x^2$. La derivada es $f_x=-6+2x$. En *x=2* la derivada es igual a –6+4= -2<0. Por lo tanto, es decreciente en *x=2*. Lo cual puede ser interpretado así: cuando la producción es de 2 unidades, un pequeño incremento de la producción reducirá el costo medio en 2 pesos por unidad producida.

En *x=4*, la derivada alcanza un valor igual a –6+8=2>0. Luego, en ese punto la función es creciente.

La función $f(x) = x*sen(x^2)+1$ con la “derivada deslizante” que hemos visto en la página 3 ejemplifica bien estos conceptos: cuando la curva es *estacionaria* – es decir paralela al eje

[11] Sugiero repasar trigonometría en http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_trigonom%C3%A9trica

horizontal – su tangente trigonométrica es tan α=tan 0º = 0. Esta función tiene varios puntos estacionarios.

Una función es *convexa* en un intervalo si las líneas tangentes a la función en ese intervalo están por debajo de la función. Una función es *cóncava* en un intervalo si las líneas tangentes a la función de ese intervalo están por encima (Fig. 20).

La denominación de convexidad y concavidad depende del punto de vista que se adopte para considerar qué es una concavidad, esto es si se mira a la función "desde arriba" o "desde abajo". Por ello, algunos textos denominan convexas a las funciones que se curvan "hacia abajo", en contraste con la definición que se acaba de dar en el párrafo anterior. Luego, es frecuente que en ocasiones se adopten las denominaciones “cóncava hacia arriba” y “cóncava hacia abajo” para evitar ambigüedades. La técnica del análisis diferencial permite determinar si una función es creciente, decreciente, cóncava o convexa estudiando las derivadas de segundo orden.

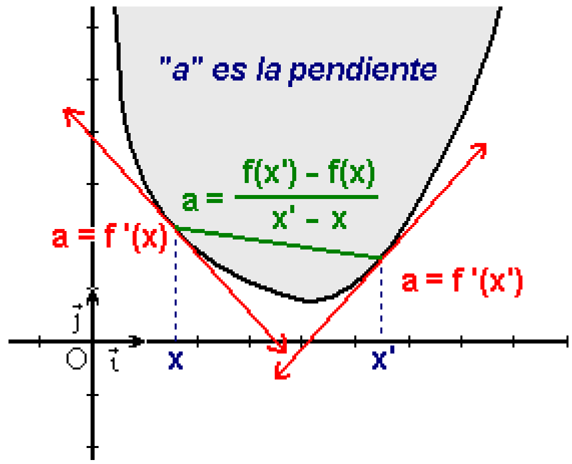

Figura 20
Función convexa (pendiente=a)

Máximos, mínimos y puntos de inflexión Vamos a utilizar como ejemplo básico la función $x*sen(x^2)+1$ que es nuestro paradigma. Observen que esa función alcanza un máximo en el punto *x*=1,3552. Es máximo porque si nos desplazamos un poco hacia la izquierda o a la derecha de ese punto la función ya no alcanza su valor máximo (igual a 2,3076). Pero es denominado un *máximo relativo* porque como pueden apreciar, si *x* sigue aumentando, la función alcanzará una posición extrema de *mínimo relativo* correspondiente a *x*=2,1945 (y un valor funcional igual a –1,1828), y de seguir aumentando el argumento *x* se vuelve a alcanzar otro máximo relativo en *x*=2,81137 con *y*=3,8081 que, a su vez, dentro del intervalo considerado – que oscila entre *x*= -1 y *x*=3 – puede ser considerado el *máximo absoluto de la función*. Para completar el análisis de las posiciones de máximo y mínimo, nos falta tomar en cuenta los valores en los extremos de definición de la función. En el primero de ellos, cuando *x*= -1 la función adopta un valor igual a 0; en el segundo, la función alcanza otro mínimo relativo. Pero, ¿existe otra alternativa que graficar la función y apreciar visualmente estos puntos (llamados *críticos*)?

Sí. Lo primero que tenemos que observar es que *en un extremo interior* del intervalo (-1,3) la derivada primera tiene que hacerse necesariamente *nula*, es decir el gráfico tiene que mostrar una tangente paralela al eje horizontal. *Ésta es llamada condición necesaria de valor extremo*. Pero atención: también tenemos los *puntos de inflexión* que son puntos donde los valores de *x* de una función continua pasa de un tipo de curvatura a otro. La curva "atraviesa" a la tangente. Esto es lo que sucede en el punto (0,1). Por consiguiente, la condición de tangente paralela al eje horizontal *no es suficiente* para localizar un máximo o un mínimo.

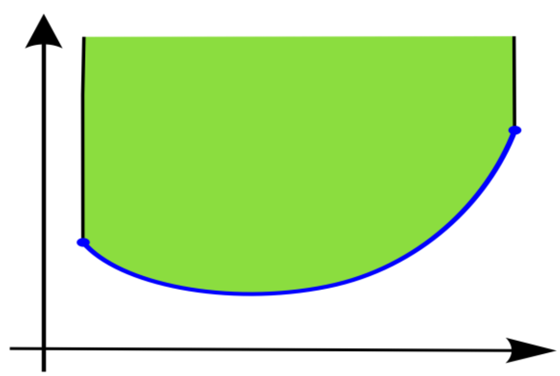

Figura 21
Función convexa con un mínimo absoluto

Resumiendo: como condición necesaria para ubicar un extremo (máximo o mínimo) de la función, debo calcular en qué puntos la función tiene derivada nula (equivalente a la condición de recta o plano tangente horizontal). Si supiéramos que la función es siempre cóncava o convexa, el problema lo tendríamos resuelto, y la derivada cero sería lo que los matemáticos llaman la *condición necesaria y suficiente*. Pero no siempre tenemos garantizado que la función con la que estamos trabajando sea cóncava o convexa (como en la Fig. 21 cuyo mínimo relativo es su mínimo absoluto; el conjunto de color verde es llamado el *epigrafo* de la función. Si consideramos al conjunto que queda por debajo de la función, se obtiene el llamado *hipografo* de la misma). Estos conjuntos nos proporcionan otra definición de función cóncava, ya que en tal caso su hipografo será un conjunto convexo. Para una función convexa, su epigrafo es un conjunto convexo (Fig. 21).

La solución es ver que en nuestro caso paradigmático, a la izquierda de un máximo relativo como el que se tiene en $x=1,3552$, la tangente a la curva era creciente pero a una tasa decreciente. Es decir, que $\partial^2 y/\partial x^2<0$, razón por la cual la pendiente $\partial y/\partial x$ se aproximó gradualmente a cero. Y a la derecha de $x=1,3552$, la curva es decreciente, razón por la cual $\partial y/\partial x<0$. Pero empezó a caer a una velocidad creciente (se aceleró su caída). Como en esta región $\partial y/\partial x<0$, esto significa que $\partial^2 y/\partial x^2<0$. Tomando en cuenta los dos lados de ese punto vemos que debe verificarse $\partial^2 y/\partial x^2<0$ para que tengamos un máximo. Esta condición es llamada de “curvatura de la función” y por sí misma no indica que estemos en presencia de un máximo. También necesitamos la condición $\partial y/\partial x=0$, y *entre ambas tenemos las condiciones necesarias y suficientes de máximo*.

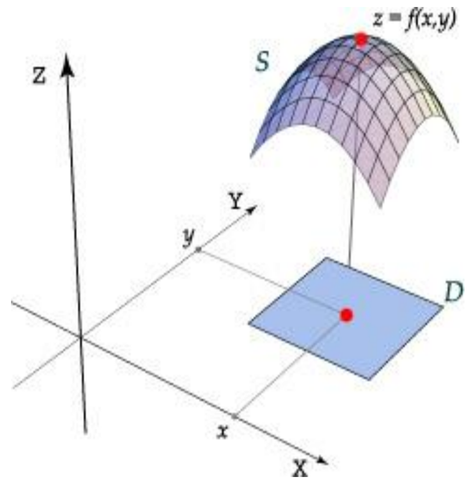

Figura 22

Ejemplo Nuestra función de costo medio era $y=40 - 6x + x^2$. Luego, la condición necesaria para que tenga un valor extremo es que $dy/dx= -6+2x= 0 \Rightarrow x=3$. Pero ahora nos preguntamos ¿es éste un máximo o un mínimo? Para responder hallamos la segunda derivada a fin de encontrar qué curvatura tiene la función. Ésta es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0.$$

Entonces, la curva es convexa vista desde abajo y tiene un valor mínimo en $x=3$, es decir que en $x=3$ se alcanza el costo medio mínimo igual a

$$Y=40 - 6x + x^2= 40 - 6x3 + 3^2 = 31.$$

10. <u>Máximos y mínimos de funciones de dos o más variables</u>

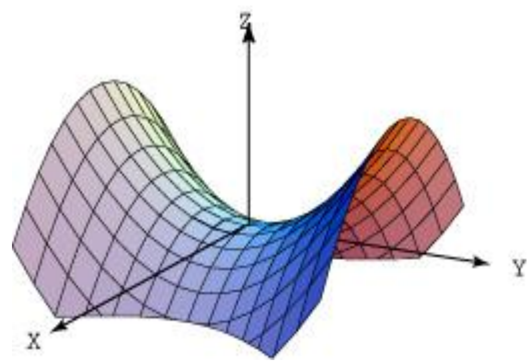

Figura 23. Hiperboloide parabólico $z=f(x,y)=x^2-y^2$

Cuando tratamos con una función de dos variables $z=f(x,y)$ las ideas de máximo y mínimo que hemos introducido se extienden de manera natural. En la Fig. 22 está representada una función de dos variables x e y, definida en un dominio D y que alcanza un máximo absoluto en un punto ***(x,y)***. La superficie S proporciona el gráfico de la función, representada por la variable z.

Condiciones necesarias para un valor extremo Las condiciones necesarias y suficientes para un extremo de $z=f(x,y)$ pueden ser explicadas de manera similar a lo que se hizo antes. En el punto $\boldsymbol{z}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ podemos cortar a la superficie *S* mediante dos planos, uno paralelo al plano *z-x* y otro paralelo al plano *z-y*. Sobre cada plano, la superficie describirá una curva de la cual podemos sacar su tangente geométrica en cada punto. Es inmediato extraer la conclusión de que, en el punto ***z***, la tangente a la curva descripta sobre el plano *z-x* deberá ser horizontal, lo mismo que la tangente a la curva descripta sobre el plano *z-y*. Luego,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Pero, como en el caso de una única variable, que las primeras derivadas parciales sean cero constituye una condición necesaria, no suficiente de que estamos situados en un punto extremo. Hay dos situaciones que podrían darse en que esto no sería así: (a) en realidad, podemos estar en un punto de inflexión; (b) estamos en un punto de ensilladura (como el de la Fig. 23), y en ambos las derivadas parciales nulas no indican un extremo de la función. Fíjense que este último gráfico tiene la forma de una silla de montar, de ahí su denominación.

También sabemos que cuando estamos en el caso de una única variable independiente, si $d^2y/dx^2<0$, la curvatura es convexa hacia arriba. Viendo la Fig. 22 e imaginando los dos cortes por los planos, tendremos dos curvas proyectadas sobre estos planos que también serán convexas hacia arriba. Luego,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$$

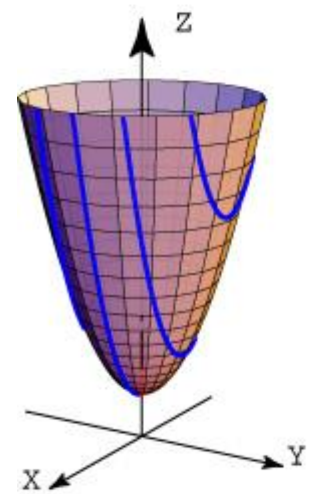

Figura 24.
Paraboloide
$z=x^2+y^2+1$

Resulta así que *dadas las condiciones necesarias* $f_x=0$, $f_y=0$, será necesario y suficiente para un máximo de $z=f(x,y)$ que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$$

y además (esto no lo vamos a demostrar), que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2$$

Las condiciones necesarias y suficientes para un *mínimo* (como el de la Fig. 24) son:

$f_x=0, \quad f_y=0$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2$$

Ejemplo $z= x^3+x^2-xy+y^2+4$

Obtenemos en primer término las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} =3x^2+2x-y=0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}= -x+2y=0$$

Éste es un sistema de ecuaciones que debe ser resuelto en forma simultánea:

$$\begin{aligned} 3x^2+2x-y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación tenemos $x=2y$. Sustituyendo en la primera se obtiene:

$$3(2y)^2+2(2y) - y =0$$
$$\Rightarrow \quad y(12y+3) =0$$
$$\Rightarrow \quad y=0 \text{ o bien } y=-¼$$

Cuando $y=0$ $\Rightarrow x=2y =0.$
Cuando $y=-¼$ $\Rightarrow x=2y = -½$.

Luego, obtuvimos dos puntos que son candidatos para cumplir con las condiciones: *(0,0)* y *(-½,-¼). Lo que haremos ahora es verificar si estos números satisfacen la condición para un máximo o para un mínimo*. Se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}= 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}= -1$$

En el punto *(0,0)* se tiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6.0 + 2=2>0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}= 2>0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x2 = 4 > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Por lo tanto, *(0,0)* satisface las condiciones para un valor mínimo. El valor mínimo alcanzado por la función es

$$z = x^3+x^2-xy+y^2+4 = 4.$$

Dejo como ejercicio verificar si el punto restante $(-½,-¼)$ satisface las condiciones para un extremo.

Notación en términos de diferenciales Como dx y dy pueden tener cualquier valor, a fin de asegurar que el plano tangente en el punto extremo sea paralelo al plano x-y de tal forma que el valor de z sea estacionario, la condición requerida es que el diferencial de z, a saber $dz=f_x dx+f_y dy$ sea nulo, es decir $dz=0$. Esto implica precisamente que $f_x=f_y=0$.

La condición suficiente es expresada en términos de la *tasa de variación de dz*. Si $d^2z>0$ significa que z está aumentando a una velocidad creciente (se está *acelerando*). En términos de curvas tendríamos una curva convexa vista desde abajo. Luego, cuando $dz=0,\ d^2z>0$ están dadas las condiciones necesarias y suficientes para un mínimo, y cuando $dz=0,\ d^2z<0$ tenemos las condiciones necesarias y suficientes para un máximo.

El diferencial de segundo orden d^2z puede expresarse como:

$$d^2z = f_{xx}dx^2+f_{xy}dx\,dy+f_{yx}\,dy\,dx+f_{yy}\,dy^2 =$$
$$= f_{xx}dx^2+2f_{xy}\,dx\,dy+f_{yy}\,dy^2.$$

Éste tiene una forma similar a la que tiene una forma cuadrática como la siguiente:

$ax^2+2hxy+by^2$ equivalente a $a(x+h/a.\ y)^2 + (ab-h^2)/a.\ y^2$

En consecuencia, para que la expresión sea positiva, tiene que cumplirse:

$$a>0, \quad ab-h^2>0.$$

Teniendo en cuenta los diferenciales obtenidos, esto implica las correspondencias siguientes:

$$a \Leftrightarrow f_{xx},\ (ab-h^2) \Leftrightarrow (f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2).$$

Para que $d^2u>0$, se requiere que

$$f_{xx}>0, \quad f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2>0.$$

Por consiguiente, las condiciones necesarias y suficientes para un mínimo son las siguientes:

1) $dz=0$, *equivalente a* $f_x=0,\ f_y=0$ *(necesarias)*
2) $d^2z>0$, *equivalente a* $f_{xx}>0,\ f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2>0$ *(suficientes).*

Observen que las condiciones $f_{xx}>0,\ f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2>0$ implican que $f_{yy}>0$.

Mediante un razonamiento similar, las condiciones necesarias y suficientes para un máximo son $dz=0$ y $d^2z<0$, equivalentes a

$$f_x=0, \quad f_y=0, \quad f_{xx}<0, \quad f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2>0.$$

Condiciones de restricción – Método de los Multiplicadores de Lagrange Éste es un método muy utilizado en economía. Se presenta cuando la función a optimizar (maximizar o minimizar) debe serlo bajo una o varias condiciones de restricción (nosotros analizaremos el caso simple de dos variables y una restricción). Son ejemplos típicos la maximización de la utilidad bajo la condición de no violar una restricción presupuestaria, o la minimización del costo bajo la condición de cumplir con una cierta función de producción.

Para empezar lo haremos con un ejemplo numérico. Nuestro objetivo es obtener un extremo de

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+xy+5x$$

bajo la restricción $\Phi(x,y)=x-2y=0.$ En estos casos les recomiendo escribir siempre la restricción en forma *implícita*.

Sabemos que, si $f(x,y)$ alcanza un extremo en un punto, en ese punto se verifica $dz=0.$ Luego,

$$dz=f_xdx+f_ydy=0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{f_x}{f_y} = -\frac{dy}{dx}$$

Como $\Phi(x,y)=0,$

$$d\Phi= \Phi_xdx+ \Phi_ydy=0$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\Phi_x}{\Phi_y} = -\frac{dy}{dx}$$

En aquel punto en que se satisfacen ambas ecuaciones, se tiene:

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{\Phi_x}{\Phi_y}$$

Éste es la condición necesaria de extremo. Hacemos

$$\frac{f_x}{\Phi_x} = \frac{f_y}{\Phi_y} = -\lambda$$

La variable λ constituye una cierta constante asociada al problema, llamada parámetro de Lagrange o *precio sombra*. Se tiene entonces:

$f_x + \lambda\ \Phi_x=0$
$f_y + \lambda\ \Phi_y=0$

con $\Phi(x,y)=0$.

Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813)

Éstas son 3 ecuaciones con las que usualmente podremos calcular x_0,y_0 y λ donde (x_0,y_0) proporcionan los valores de x,y que implican un extremo de la función objetivo.

El método más directo consiste en construir una función asociada, la *lagrangiana*, de la siguiente forma:

[38] $L=f(x,y) +\lambda.\ \Phi(x,y).$

Luego hallamos las siguientes derivadas parciales:

[39] $$\frac{\partial L}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}= 0$$

Mediante diferenciación el sistema [39] se obtienen las tres relaciones siguientes:

[40] $f_x + \lambda\ \Phi_x = 0$
$f_y + \lambda\ \Phi_y = 0$
$\Phi\ (x,y) = 0$

Vamos a aplicar este procedimiento al ejemplo de la página anterior:

$$L=(x^2-y^2+xy+5x) + \lambda(x-2y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}= 2x + y + 5 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - 2y - 2\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x - 2y =0$$

Resolviendo estas ecuaciones, hallamos $x= -2;\ y=-1;\ \lambda=0;\ f(x,y)=-5.$

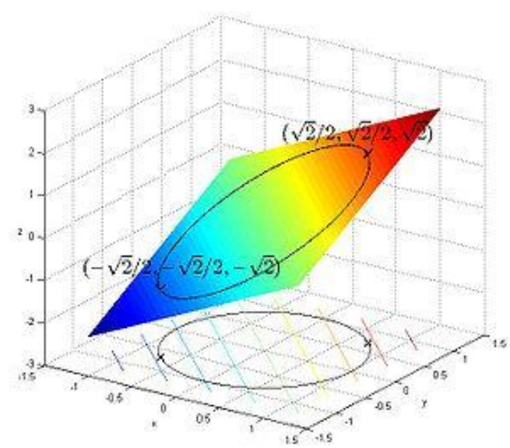

Figura 25. Ilustración del problema de optimización condicionada

En la Figura 25 hay un ejemplo bastante sencillo. Consiste en maximizar $f(x,y) = x+y$ bajo la restricción $x^2+y^2=1.$ La restricción es el círculo de radio unidad, y los conjuntos de nivel de f (que expresan en dos variables las combinaciones de x e y que dejan constante la función objetivo $x+y$ son todos líneas diagonales con pendiente negativa unitaria. Pueden ver que el máximo tiene lugar en (√2/2, √2/2) y el mínimo en (-√2/2, -√2/2). Formalmente, escribimos $g(x,y)-c=x^2+y^2-1$, y

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - c) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Calculamos las derivadas de *L* con respecto a *x,y, λ*, las igualamos a 0 y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1+2\lambda x=0$$
$$1+2\lambda y=0$$
$$x^2+y^2-1=0.$$

Las dos primeras ecuaciones tienen como resultado *x=y*. Sustituyendo en la 3ª ecuación, da lugar a $2x^2=1$, de lo cual surge que $x=(+/-)\sqrt{2}/2$ y en consecuencia los puntos extremales o estacionarios de la función son $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Evaluando la función objetivo en estos puntos nos proporciona $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)=\sqrt{2}$ y $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)=-\sqrt{2}$

La optimización condicionada desempeña un papel central en economía, y el procedimiento usado para optimizar con dos variables es extensible directamente al caso general de *n* variables. Por ejemplo, el problema de decisión de un consumidor suele ser presentado como uno en el que se maximiza una función de utilidad sujeto a restricción presupuestaria. El multiplicador de Lagrange *λ* tiene la interpretación económica de un precio sombra asociado con la restricción, que en el caso del consumidor es la utilidad marginal del ingreso.

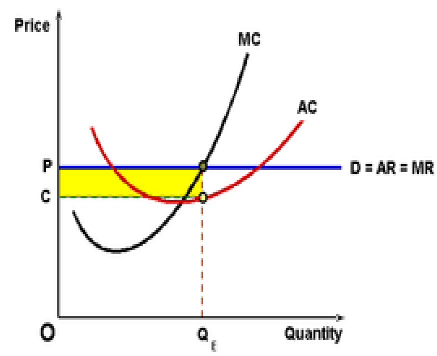

Figura 26
Equilibrio de la empresa competitiva (corto plazo)

11. Aplicaciones

La empresa competitiva Bajo condiciones de competencia pura, la curva de demanda de cada empresa es una línea horizontal. En el corto plazo, que es un período lo suficientemente breve como para que la empresa no realice inversiones relevantes, se tiene una situación como la representada en la Fig. 26, en la cual se coloreó en amarillo el beneficio (positivo) de la empresa, resultado de multiplicar la cantidad vendida por el margen entre el precio P y el costo medio AC. Denotaré *P* al precio y *Q* a la cantidad producida. Ustedes observan que en competencia pura el precio es un dato de la empresa. Denotaré *R* al ingreso de la empresa. Luego,

$$R=PQ$$

El ingreso marginal (*IM*) de la empresa viene dado por:

$$\frac{dR}{dQ} = P + Q\frac{dP}{dQ}$$

Pero *P* está dado y no puede ser afectado por las decisiones de la empresa, luego:

$$\frac{dR}{dQ} = P$$

Luego, bajo condiciones competitivas, *IM=P=AR* (ingreso medio).

Pasemos ahora a considerar el costo total de la empresa *CT*. Los beneficios totales π son:

$$\pi = R - CT.$$

A fin de maximizar su beneficio se requiere que:[12]

$$\frac{d\pi}{dQ}=0, \qquad \frac{d^2\pi}{dQ^2}<0.$$

La condición necesaria implica que:

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dCT}{dQ} = 0 \Rightarrow \qquad IM=MC$$

¿Cuál es la condición suficiente? Como pueden apreciar en la Fig. 26, podría haber dos intersecciones de la curva *MC* con la recta horizontal de precios, la primera en el tramo decreciente y la segunda en el tramo creciente (correspondiente al nivel de producción Q_E). ¿Cuál de ambas es la "correcta"? La condición suficiente nos proporciona la respuesta:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = \frac{d^2R}{dQ^2} - \frac{d^2CT}{dQ^2} < 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2R}{dQ^2} < \frac{d^2CT}{dQ^2}$$

Esto significa que la tasa de crecimiento del *IM* debe ser menor que la tasa de crecimiento del *MC* cuando hay un pequeño incremento de *Q*. En forma gráfica, si la *IM* está más inclinada (con pendiente negativa) que la curva *MC*, se cumple la condición. Es decir, *la curva de MC debe cortar a la curva de IM desde abajo*. Esto excluye intersecciones en la zona en que *MC* tiene pendiente negativa.

Monopolio Supongan que un monopolista tiene curvas de demanda y de costo como en la Figura 27. Del curso de microeconomía elemental ustedes recordarán que su beneficio π se maximiza cuando *MC=IM* y el precio es fijado en (6) y su producción en *Q**. Ahora vamos a obtener esta condición aplicando lo aprendido. Supongan que la curva de demanda está dada por:

$$Q=400-20P$$

y el costo medio por

$$AC=5+\frac{Q}{50}$$

El costo total resultante (*CT=AC*Q*) será:

[12] Hay que señalar que la empresa podría estar optimizando aún si se diera que $d^2\pi/dQ^2 \leq 0$. A estas situaciones las vamos a dejar habitualmente de lado. Usando terminología habitual, solamente vamos a tratar con óptimos *regulares*.

$$CT = 5Q + (Q^2/50)$$

y los beneficios:

$$\pi = R - CT$$

La condición de beneficio máximo es que

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dCT}{dQ} = IM - MC = 0$$

Derivando la función de costos totales obtenemos el costo marginal *MC:*

$$\frac{dC}{dQ} = \frac{d}{dQ}(5Q+(Q^2/50)) = 5 + \frac{Q}{25}$$

Para el *IM (=dR/dQ)* primero vamos a invertir la curva de demanda, expresando precio en términos de cantidad vendida:

$$P = 20 - (1/20)\,Q$$

Entonces,

$$R = P.Q = 20Q - (1/20)Q^2$$

A partir de aquí calculamos el *IM (=dR/dQ):*

$$\frac{dR}{dQ} = 20 - \frac{Q}{10}$$

Luego se tiene que *IM=MC* implica que

$$20 - (Q/10) = 5 + (Q/25)$$

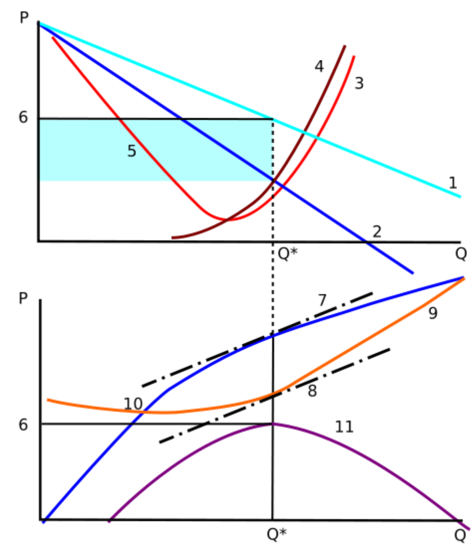

Figura 27. Monopolio. Demanda (1), Precio de monopolio (6), Costos (9), Costo Marginal (4), Ingreso total (10), Ingreso Marginal (2) y Beneficios (11)

que puede ser resuelta proporcionando Q=107,142857.... El precio resultante es P=14,64285 y los beneficios máximos π llegan a π=799.

La condición suficiente supone calcular $\frac{d^2R}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(20-(q/10)) = -1/10$ y $\frac{d^2CT}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(5+(Q/25)) = 1/25.$

Luego $d^2\pi/dQ^2 = d^2R/dQ^2 - d^2CT/dQ^2 = -1/10 - 1/25 < 0$. Por consiguiente, se satisface la condición suficiente.

Monopolio discriminador Se trata de una situación en la que el monopolista puede vender sus productos en dos mercados que están económicamente aislados y cuyas elasticidades de demanda son distintas (como puede ser el caso de un abogado que trabaja en la capital y en una zona rural). En tal caso fijará un precio diferente en cada mercado a fin de maximizar su beneficio. Supongan que vende q_1 en el mercado I (por ejemplo, la capital) y q_2 en el mercado II (la zona rural). Las funciones de ingresos en cada mercado son $R(q_1)$ y $R(q_2)$, dependiendo de lo que pueda vender en cada mercado. El costo total es una función $C(q_1+q_2)$. Sus beneficios π son:

$$\pi=R(q_1)+R(q_2) - C(q_1+q_2).$$

Con el objetivo de maximizarlo, se tiene que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 0$$

Hacemos $q=q_1+q_2$. Las ecuaciones previas se transforman en:

$$\frac{dR}{dq_1} - \frac{dC}{dq} = 0 \quad (IM_1=MC)$$ [13]

$$\frac{dR}{dq_2} - \frac{dC}{dq} = 0 \quad (IM_2=MC)$$

Por consiguiente la condición de beneficio máximo es $IM_1=IM_2=MC.$ Los IM de ambos mercados deben igualarse entre sí y también ser iguales al MC de la producción total.

Previamente hemos visto que $dR/dq= p+dp/dq = p\ (1 - 1/\eta)$. Designando η_1 y η_2 a la elasticidad de demanda en cada mercado, dado que $IM_1=IM_2$, se tendrá

$$p_1(1 - 1/\eta_1) = p_2(1 - 1/\eta_2)$$

ecuación en la cual p_1 y p_2 son los precios de cada mercado. Por consiguiente,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(1 - 1/\eta_2)}{(1 - 1/\eta_1)}$$

El rango de η va de 0 a $+\infty$. Si, por ejemplo, $\eta_1>\eta_2$, o sea, el mercado I presenta la curva de demanda más elástica, entonces:

$$\frac{p_1}{p_2} < 1$$

lo cual implica que *el monopolista cobrará un precio más reducido en el mercado con mayor elasticidad de demanda*. Un abogado profesional seguramente ya lo hace sin un razonamiento formal.

Condición de equilibrio de un productor Un productor adquiere insumos a y b a fin de producir un producto en cantidad q. La función de producción viene dada por:

$$q=f(a,b).$$

Los precios de ambos insumos son p_a y p_b. Su presupuesto disponible es M, por cuyo motivo

---

[13] Adviertan que, como el costo total depende de la *suma* de las cantidades producidas, los costos marginales de ambos mercados deben ser iguales.

$p_a\ a + p_b\ b = M.$

Su problema es producir la máxima cantidad de *q* dentro de su presupuesto. La teoría matemática de los Multiplicadores de Lagrange requiere que λ multiplique a la restricción escrita en forma implícita. Hay dos formas implícitas equivalentes: $M\text{-}p_a a\text{-}p_b b=0$ y $p_a a+p_b b\text{-}M=0$. ¿Cuál elegir? Pues la primera, que es la que da lugar a un Multiplicador no negativo λ. La idea es que λ siempre entra multiplicando a la condición de restricción escrita como mayor o igual a cero: $M\text{-}p_a a\text{-}p_b b\geq 0$, lo cual tiene sentido económico (gasto igual o inferior al presupuesto), que a su vez permite tener un precio sombra $\lambda\geq 0$. Escribimos la función de Lagarange o lagrangiana como:

$$z=f(a,b) + \lambda\ [M - p_a a - p_b b]$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = f_a - \lambda p_a = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = f_b - \lambda p_b = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = M - p_a a - p_b b = 0$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas *(a,b, λ)* en general permitirá encontrar las cantidades de ambos insumos que permiten producir la cantidad máxima *q*. A menudo estas ecuaciones son escritas de la forma siguiente:

$$\frac{f_a}{p_a} = \frac{f_b}{p_b} = \lambda$$

Ésta es conocida como la *ley de productividad equi-marginal*. (Las productividades marginales, con ponderaciones iguales a las inversas de los precios de cada factor, deben igualarse entre sí).

Teorema de la adición Discutiremos nuevamente el problema de la adición de una manera más general. Este problema que es también conocido como Teorema de Euler, fue planteado por el economista británico Philip Wicksteed. El problema radica en que resulta difícil asegurar que las sumas pagadas a los distintos factores de producción sean iguales al ingreso nacional. Si a cada factor se le pagara su producto marginal respectivo, *cæteris paribus*, surgiría una situación en la que el producto total (ingreso total) se agotaría entre los factores. Wicksteed estudió este problema de adición con el modelo de una economía de largo plazo bajo competencia pura. El matemático suizo Euler había sostenido que también debe ser tenida en cuenta la forma en que los factores de producción son combinados para producir el producto a fin de entender cómo la suma de los ingresos ganados por los factores individuales de producción es igual al ingreso nacional. Supongan que tienen lo siguiente:

Philip Wicksteed
(1844-1927)

$q=f(a,b)$ (función de producción)
$CT=p_a a + p_b b$ (costo total de producción)
$\pi=pq - C$ (beneficios)

Las condiciones de beneficio máximo son:

$$\frac{\partial\pi}{\partial a} = \frac{\partial(pq)}{\partial a} = \frac{\partial CT}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial b} = \frac{\partial(pq)}{\partial b} = \frac{\partial CT}{\partial b} = 0$$

Pero

$$\frac{\partial(pq)}{\partial a} = p\frac{\partial q}{\partial a} + q\frac{\partial p}{\partial a} = p\frac{\partial q}{\partial a} + q\frac{\partial p}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial a}$$

$$= \frac{\partial q}{\partial a}p\,[1 + \frac{q}{p}.\frac{\partial p}{\partial q}] = \frac{\partial q}{\partial a}.\ IM$$

Ahora bien, f_a es el producto marginal (físico) del insumo *a.* Luego $f_a.IM$ es el *ingreso (monetario) del producto marginal de a* (IMP_a). Por lo tanto, tenemos que:

$IMP_a = pf_a[1-(1/\eta)] = (VMP_a)[1-(1/\eta)]$ donde $VMP_a=pf_a$.

Por otra parte, tenemos que

$$\frac{\partial CT}{\partial a} = p_a + a\frac{\partial pa}{\partial a} = p_a[1 + \frac{a}{p_a}.\frac{\partial pa}{\partial a}] = p_a\,[1 + \frac{1}{e_a}]$$

fórmula en donde e_a es la elasticidad de oferta del insumo *a* y p_a es el precio del insumo *a*. Por lo tanto, constituye el costo medio del factor *a* (CMF_a). Como se tiene además

$$\frac{\partial(pq)}{\partial a} - \frac{\partial CT}{\partial a} = 0$$

es decir, $\partial(pq)/\partial a=\partial CT/\partial a$, se obtiene

$CM_a\ (1 + (1/e_a)) = MFC_a = IMP_a = VMP_a(1-(1/\eta))$

expresión en la cual mfc_a indica el costo marginal del factor *a.* Ésta es la condición de maximización de beneficios con respecto al insumo *a*; otra similar existe con respecto al *b*.

Bajo condiciones de *competencia pura en los mercados de bienes y factores*, se tendrá $e\to\infty$, $\eta\to\infty$. Luego, dado el nivel de producto, se tendrá que

$CMF=MFC=IMP=VMP$

A partir de aquí derivaremos el teorema de la adición. Ya se derivó la relación

$p_a(1+(1/e_a))=IMP_a=IM.f_a$.

Por consiguiente,

$p_a=IM\ (f_a/k_a)$,

donde $k_a=1+(1/e_a)$, y una fórmula similar para p_b. Luego,

$$pq = p_a a + p_b b$$
$$= IM[\frac{f_a}{k_a} a + \frac{f_b}{k_b} b]$$

De aquí se deduce la fórmula general del teorema de la adición:

$$q = \frac{IM}{p} [\frac{f_a}{k_a} a + \frac{f_b}{k_b} b]$$

Dos casos particulares son interesantes: 1) Bajo competencia pura en los mercados de bienes, $\eta \to \infty$, $IM=p$, y por consiguiente

$$q = \frac{f_a}{k_a} a + \frac{f_b}{k_b} b$$

2) Bajo competencia pura en los mercados factoriales, $e \to \infty$ con lo cual $k_a=k_b=1$. Luego,

$$q = f_a\, a + f_b\, b.$$

12. <u>Teoría del consumo</u>

No vamos a desarrollar aquí en detalle el análisis matemático de la teoría neoclásica del consumo, que guarda una estrecha relación con la teoría de la producción. En efecto, tomen como ejemplo la teoría económica del costo. En ella, el productor tiene ciertos datos, a saber: su función de producción o tecnología (representada, por ejemplo, por una función que tiene la forma indicada en la Fig. 15, donde un producto es producido con dos insumos llamados capital y trabajo) y los precios de sus insumos (suponiendo que se comporta *polipolísticamente*, es decir que los toma como datos). Este problema ya fue abordado al tratar la condición de equilibrio de un productor, y llegamos a deducir que se debe verificar una ley de equi-proporcionalidad marginal entre los distintos insumos.

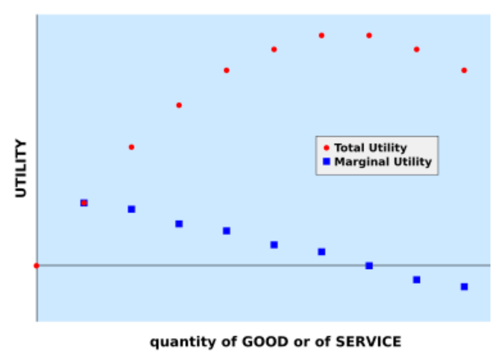

Figura 28. Utilidad total y marginal

Por otro lado, la teoría económica neoclásica asume que cada consumidor adopta decisiones de elección *racionales*, lo cual quiere decir: a) que todo conjunto de bienes y/o servicios puede ser comparado con cualquier otro conjunto de bienes y/o servicios (llamados canastas de consumo) al efecto de decidir si uno de ellos le resulta preferido al otro, o, en el caso límite, si le resultan indiferentes; b) que es transitivo en sus elecciones (es decir, que si el consumidor prefiere la canasta *A* a la canasta *B*, y a su vez esta última es preferida a otra canasta *C*, necesariamente debe preferir la canasta *A* a la canasta *C*; y c) una tercera propiedad es que el consumidor no está saciado, esto es que siempre existirá alguna canasta que, al menos en uno de los bienes, el consumidor estará en mejor situación. Cabe tener en cuenta que éste es un axioma de inexistencia de saciabilidad local, es decir dentro de un entorno de la situación considerada.

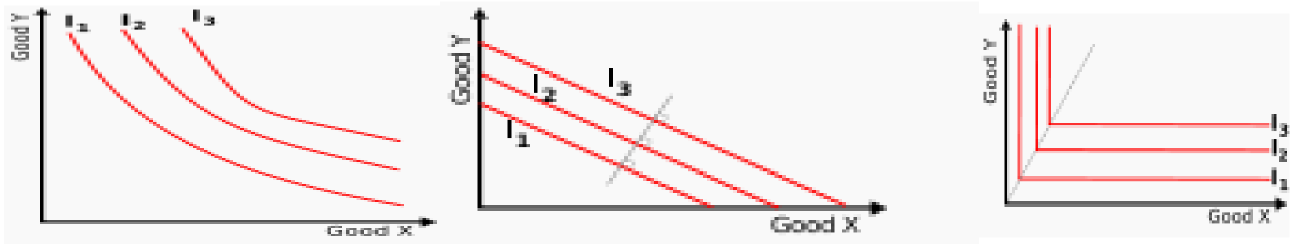

Figura 29. Tres mapas de curvas de indiferencias

Los primeros economistas que se ocuparon del tema, en el siglo XVIII (como Jeremy Bentham (1748-1832) y XIX (como John Stuart-Mill (1806-1876)), creían firmemente en un concepto de utilidad medible, según el cual las políticas sociales debían perseguir "la mayor felicidad para el mayor número de individuos". La Fig. 28 muestra el comportamiento que podría tener la utilidad total (en color rojo) de un individuo a medida que consume más de un bien o servicio: crece a partir de 0 (se trataría de un bien necesario si se supone que 0 representa una situación de necesidad absoluta) pero, al llegar a determinado nivel de consumo, se alcanza un *estado de saturación* que implica un decrecimiento de su utilidad. Su *utilidad marginal* (en color azul) es la pendiente de la tangente en cada punto de su curva de utilidad, que es positiva inicialmente pero al llegar al nivel de saturación se hace 0 para pasar luego a ser negativa.

Pero el concepto de utilidad nunca llegó a ser considerado operativo. Y lo que es más, tampoco es necesario en la teoría económica, lo que no deja de ser una buena noticia. Ya que lo único que se requiere es que cada individuo pueda cumplir con los tres postulados a), b) y c) precedentes; ¡y para ello no es necesaria ninguna función de utilidad! Si el consumidor elige entre bienes (por ejemplo, dos, como en los mapas de la Fig. 29), es suficiente que pueda ordenar (en sentido parcial,[14] los puntos del plano unos con respecto a otros. Una *curva de indiferencia* será entonces el lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano entre los cuales el consumidor se encuentra indiferente: por ejemplo, a lo largo de la curva I_1 del sub-gráfico de la izquierda, le da lo mismo elegir cualquiera de ellos (observen de paso que este sub-gráfico coincide con el de la Fig. 18, lo cual enfatiza la unidad conceptual entre la teoría de la producción y la teoría de la demanda, así como el segundo sub-gráfico coincide con el de la Fig. 17).

Siguiendo con la analogía de la sección 19, nuestro consumidor típico decide entre los bienes y servicios que adquirirá en base a precios que le son dados y una restricción de presupuesto *M* o disponibilidad de dinero y/o crédito para sus gastos. ¿Qué maximiza ese consumidor? Aunque parezca contradictorio con lo que hemos expresado, diremos que maximiza su *función de utilidad*, que para dos bienes escribiremos $U=f(a,b)$ – he puesto "U" como símbolo de "indicador de utilidad" – sujeto a la restricción presupuestaria $M=p_a a + p_b b$. ¡Hemos planteado el problema exactamente como en la sección 19, y lo dicho entonces también vale aquí!

Pero entonces ¿volvemos a re-introducir el concepto de utilidad? No. Trabajamos solamente con datos que no requieren mediciones de utilidad. Lo único que se necesita es que el consumidor cumpla con los tres postulados expresados más arriba, lo que se refleja en sus curvas de indiferencia. Por ejemplo, tomen alguno de los 3 gráficos (Fig. 29). Las "curvas" (las llamo así

[14] Es decir ≲ será un orden parcial si es una relación reflexiva, anti-simétrica, y transitiva, es decir, para todo a, b y c en P, tenemos que: (1) a ≲ a (reflexividad); (2) si a ≲ b y b ≲ c entonces a ≲ c (transitividad); (3) si a ≲ b y b ≲ a entonces a=b, (anti-simetría). Un conjunto con un orden parcial se llama conjunto parcialmente ordenado, o *poset* (del inglés partially ordered set).

aunque sean rectas, que presenten ángulos, etc.) están ordenadas en cada diagrama de menor a mayor “satisfacción”. ¿Pero, qué quiere decir esta palabra? No interesa: sólo es importante lo que los individuos piensan que les conviene más, y ninguno está haciendo un cálculo matemático para saber si está ubicado en una curva inferior o superior. Puesto en otros términos: supongan que alguno de ustedes me dice que la “verdadera” función de utilidad es $4a+5b$, yo le pregunto, ¿y por qué no $4a + 5b - 100$? En el mapa de indiferencia entre a y b, esta diferencia no se va a notar sino en el nivel absoluto que le otorgue a las curvas, pero no en su forma. ¿Quieren una transformación más complicada? Pues aquí tienen otra: si la función de utilidad original propuesta por ustedes es $a.b^2$, yo la reemplazo por, digamos, $log(a) + 2log(b)$. Lo que hice en ambos casos es aplicar a la función original una transformación *monótona creciente.*[15]

Para entender todo esto, necesitamos repasar cómo se calcula la pendiente de una curva de indiferencia o de una isocuanta. Si tengo la función $U=4a+5b$, simplemente mantengo *fijo* el nivel de utilidad en algún nivel arbitrario I^0 (por lo que dije antes, lo mismo da que sea 1.000.000, 10.000 o –50.000) y diferencio la expresión para obtener $0=4da+5db$ o bien

$$\frac{db}{da} = -\frac{4}{5}$$

Por consiguiente, las pendientes de todo el mapa de indiferencia de esta función de utilidad son rectas con inclinación negativa.[16] Ahora bien, ¿se altera el mapa de indiferencia si la función de utilidad la transformo en $U=4a+5b-100$ o $(4a+5b)^3$? No, ya que la pendiente que calculé previamente de las curvas de indiferencia es la misma y lo único que se alteró es el número absoluto que ponemos a cada curva de indiferencia. Decimos en tales casos que la *utilidad es una propiedad ordinal*. En cambio, la temperatura es una propiedad *cardinal*. La base de la moderna teoría de la utilidad se debe a Vilfredo Pareto, quien realizó importantes contribuciones al estudio de la economía y de la sociología, especialmente en el campo de la distribución de la riqueza y el análisis de las elecciones individuales. Fue el creador del concepto de eficiencia en sentido de Pareto, y contribuyó, con ideas como la de las curvas de indiferencia, al desarrollo de la microeconomía. Los aportes de Pareto a la sociología son destacables. Pueden leer una introducción al tema en http://es.wikipedia.org/wiki/Vilfredo_Pareto Una lectura de la obra de Pareto permite pasear por un paisaje de grandes cambios históricos. Aquellos que puedan leer en francés pueden acceder a su obra completa, compilada por el Centre d'études interdisciplinaires Walras Pareto de la universidad de Lausanne, en http://www.unil.ch/cwp/page41052.html

13. <u>Sistemas de ecuaciones lineales</u>

Un sistema de ecuaciones lineales, o sistema lineal, es un conjunto de ecuaciones lineales sobre el sistema de números reales. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

[15] Ver http://en.wikipedia.org/wiki/Monotonic_function

[16] Pueden leer algo más sobre teoría de la utilidad y sus variantes en Valentino Piana, Consumer Theory: The Neoclassical Model and its opposite alternative, 2003, Economics Web Institute. Ver http://www.economicswebinstitute.org/essays/consumertheory.htm#int

Este problema suele presentarse en economía al tratar de resolver un problema de óptimo o de hallar una solución de equilibrio en un modelo simple del mercado. El problema consiste en encontrar los valores desconocidos de las variables x_1, x_2 y x_3 que satisfagan las tres ecuaciones. Sólo me interesa que ustedes tengan algunas nociones básicas de este tipo de problemas – que algunos ya habrán visto en estudios previos.

En general, un sistema con *m* ecuaciones lineales y *n* incógnitas puede ser escrito como:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots+ & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots+ & a_{mn}x_n = & b_m \end{array}$$

En este sistema, las variables $x_1, \ldots, x_n$ son las "incógnitas", y los números a_{ij} son los "coeficientes" del sistema de números reales **K**. Este sistema lo escribiremos en general separando sus elementos mediante notación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

es decir, como

Ax=**b**

Hay varias formas de obtener el resultado; nosotros aplicaremos el método de "sustitución". Fíjense que la matriz **A** es una disposición numérica de *m* filas en *n* columnas. Por ejemplo, una matriz de 3 filas y 2 columnas podría ser la siguiente:

5	-1
0	4
0.5	2

En el segundo miembro habría un vector de 3 componentes, ordenadas en columna, que cumple el papel del vector **b,** por ejemplo:

6
4
2

Un profesor de estadística que tuve hace años (el Dr. Fausto Toranzos padre), siempre me decía que para multiplicar una matriz por un vector "hay que acordarse de Federico". Lo que daba a entender es que se requiere la multiplicación de toda una Fila por toda una Columna para conseguir cada componente del nuevo vector. El sistema más general escrito arriba es entonces, aplicando Federico:

$5\,x_1 \quad - x_2 = 6$
$4\,x_2 = 4$
$0.5\,x_1 + 2\,x_2 = 2$

¿Podemos resolverlo? La segunda ecuación permite obtener x_2 =1. Y ahora podemos sustituir en las otras. Pero algo anda mal, porque la 1ra genera x_1 = 7/5, mientras que la segunda x_1 = 0.Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según el número de soluciones que pueden presentar. De acuerdo con este criterio se pueden presentar los siguientes casos:

1) Sistema *incompatible* si no tiene ninguna solución, que es el caso que acabamos de ver.
2) Sistema *compatible* si tiene alguna solución, en este caso además puede distinguirse entre:
   - Sistema compatible *determinado* cuando tiene un número finito de soluciones.
   - Sistema compatible *indeterminado* cuando admite un conjunto infinito de soluciones.

El sistema también se puede escribir de la manera siguiente:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j=b_i, \quad i=1,\ \ldots,m.$$

Por ejemplo, el sistema siguiente:

$$2x_1 + 3x_2 = 7$$
$$x_1 + 4x_2 = 6$$

puede ser representado en notación matricial como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales, como se dijo, puede tener una única solución, varias o ninguna. Que exista o no una solución depende del *rango* de la matriz de coeficientes **A:**[17] en este ejemplo, el rango viene dado por el número de filas que son linealmente independientes. La matriz tiene rango 2 (pleno) ya que ninguna de sus filas puede ser obtenida a partir de la restante mediante la multiplicación por un escalar (o, más generalmente, mediante una transformación lineal). Con respecto a la obtención de la solución, hay diversos procedimientos. El más sencillo es el de sustitución que es el que aplicamos antes. Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones, y la sustituimos en la restante, que así habrá quedado como una ecuación en una sola variable. Por ejemplo, despejando x_1 en la 2ª ecuación obtenemos:

$$x_1 = 6 - 4x_2.$$

Este resultado lo sustituimos en la 1ª ecuación que queda así expresada:

$$2\,(6 - 4x_2) + 3x_2 = 7 \rightarrow 4x_2+3x_2 = 7 \rightarrow 7x_2=7 \rightarrow x_2=1$$

Para recuperar el valor de x_1 volvemos a la ecuación usada en primer término y sustituimos por el valor hallado:

[17] Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Rango_de_una_matriz

$x_1 = 6 – 4x_2 = 6 – 4.1 = 2$

Nunca está de más una verificación: $2x_1+3x_2=2.2 +3 = 7$
$1\ x_1+4x_2= 1.2+4.1 =6$

Hay una buena ejemplificación de conocimientos básicos para este punto en wikipedia.[18]

Ejemplo Supongan que las curvas de demanda y de oferta del mercado vienen dadas por:

$Q_D= - 50p + 250$
$Q_S= 25\ p + 25$

Escribiendo $Q_D=Q_S \rightarrow - 50\ p+250 –25p – 25 =0$
$\rightarrow -75\ p + 225 =0$
$\rightarrow p = (-225/-75) = 3$
$\rightarrow Q_D=Q_S= Q= -50.3+250 = 25.3+25 = 75$.

Como ejercicio adicional, representen a estas funciones en el plano poniendo en el eje de abscisas las cantidades, y en el de ordenadas el precio, identificando el punto de “equilibrio” *(75, 3)*.

[18] http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_lineal_de_ecuaciones