===

Probabilidad y Teorema de Bayes[1]

Espacio Muestral y Probabilidad Total Ejemplo:

Si se considera el **experimento** "tirar una moneda dos veces", el conjunto de posibles resultados es:

$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$ (donde C=cara y X=cruz)

Al **suceso** "obtener cara en la primera tirada y cruz en la segunda" se le asigna probabilidad 1/4 (suponiendo que la moneda sea insesgada). Sin embargo, si disponemos de la información adicional de que la primera tirada ya se ha realizado y salió cara, la probabilidad de este suceso será 1/2. ¿Por qué hay diferencia entre ambos espacios muestrales?

La diferencia es que, como se tiene información adicional, **el espacio muestral ha cambiado**; ahora es un subconjunto del espacio muestral, Ω': {CX, CC}.

Definición Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio, A y B dos sucesos con $p(B) \neq 0$. La **probabilidad condicionada del suceso A al suceso B** ("a que haya ocurrido el suceso B") es

$$P(A/B) = P(AB)/P(B)$$

Una definición análoga vale para $P(B/A) = P(AB)/P(A)$. Para que estas probabilidades estén definidas se requiere que $P(A)$ y $P(B)$ sean ambas positivas.

Luego se tiene que $P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B)$.

Observación La probabilidad condicionada $P(A/B)$ es una probabilidad definida sobre el conjunto de sucesos Ω', cuya intersección con B es no vacía; por tanto, verifica todas las propiedades de la probabilidad.

Ejemplo Se arroja un dado normal. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 si se sabe que el resultado ha sido impar?

Llamamos A al suceso "obtener un 1" y B al suceso "obtener un impar". La probabilidad buscada es $P(A/B)$.

Utilizando la definición, $P(A/B) = P(AB)/P(B)$. En este caso $A \subset B$, por tanto el suceso intersección de A y de B es A: obtener un 1.

Luego $P(A/B) = (1/6) / (3/6) = 1/3$.

Independencia Conjuntamente con el concepto de probabilidad condicionada aparece el concepto de independencia de sucesos. Intuitivamente, dos sucesos A y B del espacio Ω se dice que son **independientes** si la ocurrencia de uno no modifica la probabilidad de que el otro ocurra. O sea, $P(B/A) = P(B)$.

Ejemplo: En el experimento "tirar dos monedas", los sucesos "obtener cara en la primera tirada" y "obtener cara en la segunda" son independientes:

$P(CC) = P(C).P(C)$

---

[1] En http://www.ma.uva.es/~antonio/Industriales/Apuntes_10-11/EstaE/10_Tema-03.pdf, del que se han tomado algunos párrafos, pueden hallarse conceptos básicos de la teoría de la probabilidad y varios ejemplos adicionales.

Observación La independencia de dos sucesos no es una propiedad intrínseca de los mismos, es decir, no es una propiedad que dependa de la naturaleza de los sucesos, sino que es una propiedad ligada a las probabilidades de los mismos.

Teoremas principales de la probabilidad

1 Teorema de las probabilidades totales:

Sean A_1, A_2,...,A_n, sucesos mutuamente excluyentes y de probabilidad no nula, tales que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$. Si B es un suceso en Ω, entonces:

$$P (B) = \sum_1^n P (B/A_i) P (A_i).$$

2 Teorema de Bayes

Un experimento se realiza en dos etapas:

- En la primera pueden darse n sucesos $A_1, A_2,..., A_n$, mutuamente excluyentes, con probabilidades conocidas (las ***causas***).

- En la segunda pueden darse los resultados $B_1, B_2,...,B_m$, (los ***efectos***) cuya ocurrencia depende de los resultados obtenidos en la primera etapa, y se conocen $P(B_j/A_i)$ (es decir, la probabilidad de que se presente el efecto B_j cuando se ha dado la causa A_i); entonces, al realizar el experimento se ha observado que el resultado final ha sido B_j y se plantea cuál es la probabilidad de que "la causante" haya sido A_i (es decir, ¿cuál es la probabilidad de A_i?).

De modo que afirmamos lo siguiente:

Sean $A_1, A_2,...,A_n$, sucesos mutuamente excluyentes y de probabilidad no nula, tales que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$. Si B es un suceso en Ω de probabilidad no nula, entonces:

$$P(A_k/B) = P (B/A_k) P(A_k) /\sum_1 P(B/A_i) P(A_i).$$

Ejemplo El 60% de los tornillos producidos por una fábrica proceden de la máquina A y el 40% de la máquina B. La proporción de defectuosos en A es 0.1 y en B es 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo de dicha fábrica sea defectuoso? ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que un tornillo es defectuoso, proceda de la máquina A?

En este ejemplo, tenemos un experimento en dos etapas; en la primera, los sucesos son:

A: tornillo fabricado por la máquina A
B: tornillo fabricado por la máquina B

Los valores de las probabilidades de estos sucesos son conocidos: $P(A)=0,6$ y $P (B)=0,4$.

Los resultados de la segunda etapa son:

D: tornillo defectuoso
D_n: tornillo no defectuoso

Las probabilidades de estos sucesos dependen del resultado de la primera etapa:

$P(D/A)=0,1$ $P(D/B)=0,5$

A partir de estos valores podemos determinar también:

$P(D_n/A)=1-P(D/A)=1-0,1=0,9$

$P(D_n/B)=1-P(D/B)=1-0{,}5=0{,}5$

El suceso D se puede indicar como: $D=DA+DB$, que son dos sucesos mutuamente excluyentes; luego, utilizando el teorema de las probabilidades totales:

$$P(D)=P(D/A)P(A)+P(D/B)P(B)=(0{,}1)(0{,}6)+(0{,}5)(0{,}4)=0{,}26$$

Esto responde a la primera pregunta.

La otra probabilidad es $P(A/D)$, probabilidad de un resultado de la primera etapa condicionada a un resultado de la segunda; podemos aplicar el teorema de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{P\,(D/A)\,P(A)}{P\,(D/A)\,P\,(A) + P\,(D/B)\,P\,(B)}$$

$$= (0{,}1)(0{,}6)\,/\,[(0{,}1)(0{,}6) + (0{,}5)(0{,}4)] = 3/13 \approx 0{,}23$$

En internet se pueden bajar numerosos sitios que incluyen ejercicios, por ejemplo http://www.statlect.com/bayes_rule_exercise_set_1.htm.