XII. ASIGNACION DE RECURSOS EN EL TIEMPO[1]

1. Activos financieros y no financieros

Invertir es la elección de un individuo de arriesgar sus ahorros con la expectativa de tener una ganancia. En lugar de almacenar el bien producido o su equivalente monetario, el inversor elige usar ese bien ya sea para crear un bien de consumo o de producción durable, o prestar el bien original ahorrado a otra persona a cambio de recibir intereses o una participación en los beneficios. En el primer caso, el individuo crea bienes de consumo durables, esperando que los servicios del bien le permitan llevar adelante una vida más placentera. En el segundo, el individuo se transforma en un empresario que utiliza el recurso a fin de producir bienes y servicios para otros con la expectativa de venderlos en forma rentable. El tercer caso corresponde al de un prestamista, y el cuarto a un inversor en una acción comercial. En todos los casos, el consumidor obtiene un activo durable o inversión, y toma en cuenta ese activo registrando una obligación equivalente. A medida que transcurre el tiempo, y los precios y tasas de interés cambian, también cambia el valor del activo y de la obligación.

Habitualmente, cuando se compra un activo, o equivalentemente se hace un depósito en un banco, es con la expectativa de obtener un rendimiento o interés futuro sobre el mismo. El término inversión tiene su origen del latín *vestis*, que significa ropa o vestimenta, y se refiere al acto de poner cosas (ya sea dinero u otros derechos sobre los recursos) en los bolsillos de otros. El significado básico de tener un activo es el de gozar de un ingreso recurrente o de ganancias de capital. Se trata de un bien del que es esperado un rendimiento sin haacer ninguna operación sobre el activo *per se*.

Las Cuentas Nacionales son un conjunto sistemático e integrado de cuentas macroeconómicas, balances y cuadros, basados en conceptos, definiciones, clasificaciones y reglas contables aceptados internacionalmente. Ofrecen un marco contable amplio dentro del cual pueden elaborarse y presentarse datos económicos en un formato destinado al análisis, a la toma de decisiones y a la formulación de la política económica. Las Cuentas Nacionales de Argentina reflejan la implementación del Sistema de Cuentas Nacionales 1993 (SCN 93) de la ONU. Tomando en cuenta las recomendaciones del Sistema de Cuentas Nacionales 93, el INDEC ha estimado una serie de agregados macroeconómicos clave, como el Producto Interno Bruto (PIB) base 1993, el Estimador Mensual de Actividad Económica y la Matriz de Insumo-Producto 1997. Recordemos que la inversión, de acuerdo con las cuentas nacionales, es el monto de gasto destinado a la adquisición de nuevos equipos de producción y nuevas construcciones productivas, medido en forma apropiada a precios constantes.

Según el SCN 93, los balances y las cuentas de acumulación forman un grupo de cuentas relacionadas con el valor de los activos propiedad de las unidades institucionales o sectores, y el de sus pasivos, en momentos determinados del tiempo, y con la evolución de esos valores a lo largo del tiempo. Los balances miden el valor de los stocks de activos o pasivos y suelen elaborarse al comienzo y final del período contable. El valor total de los activos propiedad de una unidad institucional o sector, menos el valor total de sus pasivos, recibe el nombre de valor neto. Es una medida de la riqueza de una unidad o sector en un momento dado. Las cuentas de

---

[1] V. *Wikipedia: "Investmen; "Calculus of Variations"; "Saddle point"* ; E. Silberberg, The Structure of Economics, A Mathematical Analysis, McGraw–Hill Inc., 1990; Grupo Intersectorial de trabajo sobre Cuentas Nacionales, Sistema de Cuentas Nacionales 93, Banco Mundial, 1993; Richard A. Brealey and Stewart C. Myers, Principles of Corporate Finance, 4th ed., 1991 (hay traducción al español). Más información se podrá encontrar en el site de la New School University.

acumulación registran las variaciones de valor de los activos, de los pasivos y del valor neto que tienen lugar durante el período contable. Son cuentas de flujos, cuyos asientos contables dependen de la cantidad de actividades económicas o de otra clase que tienen lugar en un período dado y de las transacciones y otros flujos asociados con ellas. Todo activo económico ha de funcionar como un depósito de valor que depende del monto de los beneficios económicos que su propietario puede obtener por su posesión o utilización. Sin embargo, este valor no suele mantenerse constante, ya que los beneficios remanentes decrecen habitualmente con el paso del tiempo. De las distintas clases de activos pueden obtenerse diferentes tipos de beneficios:

(a) algunos beneficios se obtienen utilizando los activos, como los edificios o la maquinaria, en la producción;
(b) otros revisten la forma de rentas de la propiedad; por ejemplo, los intereses, dividendos, rentas de la tierra, etc. que reciben los propietarios de activos financieros y de tierras y terrenos;
(c) finalmente, los activos funcionan como depósitos de valor que pueden realizarse mediante su disposición o su liquidación. Aunque algunos activos se mantienen hasta agotar los rendimientos que se pueden derivar de los mismos, de otros se dispone antes de ese momento con el fin de realizar los valores capitalizados de los rendimientos que aún les quedan. Algunos activos se mantienen simplemente como depósitos de valor (metales o piedras preciosas, etc.), sin que se obtengan de ellos otros beneficios.

La mayoría de los activos financieros son derechos financieros. Los derechos y las obligaciones financieras provienen de relaciones de tipo contractual y nacen cuando una unidad institucional proporciona fondos a otra. Un derecho financiero puede definirse como: un activo que da derecho a su propietario, el acreedor, a recibir un pago o una serie de pagos de otra unidad, el deudor, en determinadas circunstancias que se especifican en el contrato celebrado entre los mismos. El derecho se extingue cuando el deudor cancela el pasivo pagando la suma acordada en el contrato. Además, el acreedor puede percibir unos pagos en concepto de intereses: es decir, rentas de la propiedad. Entre los derechos financieros se incluyen, no sólo los derechos frente a los intermediarios financieros en forma de dinero y depósitos, sino también los préstamos, los anticipos y otros créditos y títulos como los efectos y los bonos. Los activos financieros pueden, por tanto, definirse como activos en forma de derechos financieros, oro monetario, Derechos Especiales de Giro (DEG) asignados por el Fondo Monetario Internacional (IMF), acciones de sociedades y algunos de los instrumentos denominados derivados. El oro monetario y los DEG se tratan como activos financieros aunque sus tenedores no posean derechos sobre otras unidades designadas. Las acciones, aún cuando sus titulares no tengan un derecho monetario fijo o predeterminado sobre la sociedad, y ciertos instrumentos derivados se tratan, por convención, como activos financieros. Por comodidad, el término "activo financiero" puede utilizarse para designar tanto los activos financieros como los pasivos, excepto cuando el contexto exija una referencia explícita a los pasivos[2].

El Sistema de Cuentas Nacionales distingue dos categorías de activos no financieros: los producidos y los no producidos. Los activos producidos se definen como activos no financieros que tienen su origen como productos de los procesos comprendidos dentro de la frontera de la producción del sistema. Los activos no producidos se definen como activos no financieros que tienen su origen por vías distintas de los procesos de la producción.

Hay tres tipos principales de activos producidos: activos fijos, existencias y objetos valiosos. Tanto los activos fijos como las existencias son activos que mantienen únicamente los productores con fines de producción.

---

[2] Se deja para un capítulo posterior el análisis de los activos financieros.

Los activos fijos se definen como los activos producidos que se utilizan repetida, o continuamente, en procesos de producción durante más de un año. La característica distintiva de un activo fijo no es que sea durable en un sentido físico, sino que pueda utilizarse repetida o continuamente en la producción durante un período largo de tiempo, que se establece en más de un año. Algunos bienes, como el carbón, son muy durables físicamente, pero no constituyen activos fijos porque se pueden usar solamente una vez. Entre los activos fijos se incluyen no sólo las estructuras, maquinaria y equipo, sino también los activos cultivados, como los árboles o los animales que se utilizan repetida o continuamente para obtener otros productos, como frutas o productos lácteos. Se incluyen asimismo activos intangibles como programas de informática o los originales artísticos que se usan en el proceso de producción.

Las existencias abarcan:
(a) las existencias de productos que permanecen en poder de las unidades que los produjeron hasta ser reelaborados, vendidos, suministrados a otras unidades o utilizados de otra manera, y
(b) las existencias de productos adquiridos a otras unidades y destinados al consumo intermedio o a la reventa sin someterlos a ningún procedimiento.

Los objetos valiosos se definen como bienes de considerable valor que no se usan primordialmente para fines de producción o consumo, sino que se mantienen a lo largo del tiempo como depósito de valor. Los beneficios económicos que se obtienen de los objetos valiosos son que no se espera que su valor disminuya relativamente con respecto al nivel general de precios. Comprenden las piedras y metales preciosos, joyas, obras de arte, etc.

Los activos no producidos consisten de activos que son necesarios para la producción, pero que no se han obtenido de un proceso productivo. Incluyen activos de origen natural, como la tierra y terrenos y ciertos bosques no cultivados y los yacimientos de minerales. Comprenden asimismo ciertos activos intangibles, como los derechos patentados. No todos los activos del medio ambiente se consideran activos económicos. Por tanto, conviene distinguir entre los activos de origen natural que quedan dentro de la frontera de los activos del sistema y los que están fuera de ella.

2. La frontera de los activos

En primer lugar, ha de advertirse que las cuentas y balances del Sistema se elaboran para las unidades o grupos de unidades institucionales, y que pueden referirse únicamente a los valores de los activos que pertenecen a las unidades en cuestión. Solamente los activos de origen natural sobre los que se han establecido derechos de propiedad que se ejercen de manera efectiva pueden, por tanto, considerarse como activos económicos y registrarse en los balances. No es preciso que estos activos sean propiedad de unidades individuales, sino que pueden pertenecer colectivamente a grupos de unidades o al gobierno en nombre de la comunidad en su conjunto.

Sin embargo, ciertos activos de origen natural son de tal naturaleza que no es posible establecer una propiedad sobre ellos: por ejemplo, el aire o los océanos. Además, hay otros que no se pueden tratar como activos económicos por no pertenecer efectivamente a ninguna unidad particular. Entre éstos se incluyen no sólo aquellos cuya existencia es desconocida, sino también los que, como sucede con los bosques no cultivados, se sabe que existen pero son tan remotos o inaccesibles que, en la práctica, no se hallan bajo el control efectivo de unidad alguna.

En segundo lugar, para atenerse a la definición general de activo económico, los activos naturales no sólo han de ser objeto de propiedad, sino también deben ser capaces de aportar beneficios económicos a sus propietarios, dada la tecnología, el conocimiento científico, la infraestructura económica, los recursos disponibles y el conjunto de precios relativos vigentes en las fechas a las que se refiere el balance o esperados en el futuro próximo. Por tanto, los depósitos conocidos de minerales que no son explotables comercialmente en un futuro previsible no se incluyen en los balances del sistema, aún cuando puedan ser explotables comercialmente en una fecha posterior como consecuencia de grandes avances tecnológicos imprevistos o de grandes cambios de los precios relativos, como sucedió en las crisis petrolíferas de los decenios de 1970 y 1980.

Los activos de origen natural en forma de biota - árboles, vegetación,animales, aves, peces, etc. - son renovables. El crecimiento de los árboles, cultivos u otra vegetación o la cría de animales, aves, peces,etc. puede tener lugar bajo el control, responsabilidad y gestión directa de unidades institucionales. En esta situación, los activos son cultivados y la actividad se considera incluida dentro de la frontera de producción del sistema. Los activos resultantes son obviamente activos producidos que quedan dentro de la frontera de los activos del sistema. Sin embargo, algunos activos renovables en forma de biota pueden clasificarse también como activos no producidos: a saber, los bosques y los animales salvajes que los habitan, que en realidad son propiedad de unidades institucionales, pero cuya renovación no se halla bajo el control, responsabilidad y gestión directa de éstas. El crecimiento de los animales, aves, peces, etc. que viven en estado salvaje o el crecimiento de la vegetación no cultivada de los bosques no es un proceso económico de producción, por lo que los activos resultantes no pueden ser activos producidos. En cambio, cuando los bosques y/o los animales, aves, peces, etc. son efectivamente propiedad de unidades institucionales y son una fuente de beneficios para sus propietarios, entonces constituyen activos económicos. Por último, cuando los animales salvajes, aves, peces, etc. viven en lugares tales que ninguna unidad institucional es capaz de ejercer efectivamente derechos de propiedad sobre ellos -por ejemplo, en los océanos o en regiones totalmente inaccesibles-, entonces quedan fuera de la frontera de los activos. Análogamente, los bosques u otra vegetación que crece en esas regiones no se consideran activos económicos.

Es necesario tener en cuenta que la inversión, como el caso de producción sobre un período de tiempo (“por año”), no es capital. La dimensión temporal de la inversión es la de un flujo. En contraste, capital es un stock, es decir, una acumulación medible en un cierto punto del tiempo (p.ej. al 31 de diciembre).

Tanto la inversión no residencial (como una fábrica) así como la residencial (nuevas casas) constituyen la inversión real. La inversión neta se obtiene deduciendo la depreciación de la inversión bruta. Se trata del valor del crecimiento neto anual del stock de capital.

3. El principio de aceleración

Uno de los modelos más simples es el principio de aceleración. De acuerdo con este principio, la inversión responde a las cambiantes condiciones de la demanda. Si ésta aumenta, habrá un exceso de demanda de bienes. En tal situación, las firmas tienen dos opciones: o bien elevar los precios, o bien satisfacer la demanda elevando su oferta. Bajo ciertas condiciones, especialmente en la visión keynesiana del mundo, los ajustes por cantidad tienen precedencia. Las firmas aumentan su capacidad de producción invirtiendo en planta y equipamiento. Empero, *en el mundo real incierto*, es de esperar que las firmas no aumenten en forma inmediata su capacidad sino en forma gradual (por ejemplo, aumentando un poco su capacidad si hubo un aumento de demanda, comprobar luego si la demanda se sostiene, seguir aumentando en tal caso la capacidad hasta la convergencia al nivel deseado de capacidad).

Dada una relación capital-producto deseada $v=K/Y$ el cambio del capital es una fracción del cambio de la demanda: $I_t= K_t-K_{t-1}=v(Y_t-Y_{t-1})$. Esto implica que si v es constante, un aumento de Y requiere un aumento de K. Es decir, la inversión neta I_n será igual a $I_n= v\Delta Y$. Por caso, si v=2, la ecuación implica que, cuando Y aumenta en 10, la inversión neta será igual a 10x2=20. Lo que también está implicado es que la inversión fija caerá si se desacelera el crecimiento de la producción. De hecho, no se requiere que caiga la producción para que caiga la inversión. Sin embargo, resultará una caída del producto si la desaceleración de la producción lleva a que la inversión caiga, lo que reduce la demanda agregada. Por consiguiente, este modelo simple del acelerador da lugar a una explicación endógena del descenso del ciclo económico, transición a una recesión.

Modernamente, es más usual describir el efecto de aceleración mediante un modelo más sofisticado de acelerador flexible. Los negocios realizan inversión neta en bienes de capital fijo a fin de cubrir la brecha entre el stock *deseado* de los bienes de capital (K^d) y el stock *existente* de dichos bienes que han quedado de la actividad productiva pasada (K_{-1}): $I = x (K^d – K_{-1})$, ecuación en la cual x representa la velocidad de ajuste ($1 \geq x \geq 0$).

El stock deseado de los bienes de capital es determinado habitualmente por variables tales como la tasa de beneficios esperada, el nivel esperado de producto, el costo financiero (tasa de interés) y la tecnología. Dado que el nivel esperado de producto desempeña cierto rol, este modelo exhibe el comportamiento descripto por el efecto del acelerador pero menos extremo que el de un simple acelerador. Dado que el stock de capital existente crece a través del tiempo como resultado de la inversión neta pasada, un *menor* crecimiento del producto (PIB) ocasionará que la brecha entre el K deseado y el K existente resulte más baja, cero, o aún negativa, lo que provocará que la inversión neta actual disminuya.

Cæteris paribus, se tendrá que una caída del producto deprimirá el stock deseado de bienes de capital, y por consiguiente a la inversión neta. En forma similar, un incremento del producto dará lugar a un incremento de la inversión. Finalmente, si el stock de capital deseado es menor que el existente, la inversión neta puede quedar deprimida por largo tiempo.

En resumen, este principio sostiene que la demanda de los bienes de capital es una *demanda derivada* y que los cambios en la demanda del producto conducirán a cambios en la demanda del stock de capital, y, por esa vía, de la inversión. El acelerador flexible, que contempla tanto elementos de demanda y de oferta, hace posible que existan retrasos en el ajuste del stock de capital existente a su nivel óptimo. El principio deja de lado el cambio tecnológico, pero ha sido utilizado en forma exitosa para explicar el comportamiento de la inversión y la conducta cíclica de las economías capitalistas. Casi todos los modelos macroeconómicos de una economía emplean alguna variante del acelerador para explicar la inversión agregada.

4. Dinámica económica: el Principio de Optimalidad

Mediante el método de la estática comparativa hemos podido apreciar las tasas instantáneas de cambio de variables endógenas de elección del tomador decisiones con respecto a los parámetros (restricciones) a medida que éstos cambian. Este procedimiento facilita una base aceptable para formular hipótesis refutables, extrapolando estos cambios instantáneos a lo largo de un intervalo finito. Pero el procedimiento resulta inadecuado en algunos problemas, especialmente en la teoría del capital, porque esta variable es típicamente duradera, y porque una decisión importante tiene que ver con alterar el flujo de servicios a través del tiempo. Y además, por si fuera poco, lo que resulta interesante son los cambios en la tasa de utilización de los recursos a través del tiempo, en lugar de especificar simplemente una dirección de cambio inicial. Este tipo de decisiones es inherentemente dinámico, porque cambia toda la trayectoria temporal de las variables objetivo cuando las decisiones son tomadas en el presente. Ėsta es la propiedad fundamental de los modelos dinámicos.

Ilustraremos algunos de los problemas principales que se plantean en este contexto usando un prototipo de modelos que son aplicados en el área de utilización de los recursos naturales. Partimos del Capítulo VIII, pág. 225, en el cual analizamos las soluciones de Fisher y de Faustmann al problema de inversión consistente en maximizar el valor presente de cierto recurso, por ejemplo un cereal, con función de crecimiento $g(t)$, donde t representa al tiempo. La función objetivo de Fisher es $P=g(t)e^{-rt}$, y el problema consiste en determinar la longitud de tiempo hasta la cosecha. Maximizando P con respecto a t proporcionaba la condición de primer orden $r=g'/g$; la cosecha debe tener lugar cuando el crecimiento anual del “capital” cayera hasta alcanzar el valor de oportunidad del capital, dado por la tasa de interés r. Pero aunque el problema está planteado como una maximización “a lo largo del tiempo”, no se trata realmente de un problema dinámico. Hay solamente una decisión que debe ser tomada, y no existe ningún vínculo con decisiones a tomar más adelante.

Tampoco el problema de Faustmann (siembras repetidas agregando un costo de oportunidad) es genuinamente dinámico. Pero esta solución sugiere un enfoque general para encarar los problemas dinámicos. Después de la cosecha inicial, con valor igual a $g(t)e^{-rt}$, la política “óptima” consiste en repetir la decisión anterior. Luego, la función objetivo termina siendo

$$P=g(t)e^{-rt} + Pe^{-rt}$$

o sea,

$$P=\frac{g(t)e^{-rt}}{(1-e^{-rt})}$$


Richard E. Bellman (1920–1984)

La solución temporal que maximiza la riqueza da lugar a un período de crecimiento menor que si el costo de oportunidad de la tierra después de cosechada fuera cero, como en el modelo original de Fisher. En forma más general, la política que maximiza la riqueza de un largo (tal vez infinito) flujo de ingresos desde ahora, debe ser, después de la primera cosecha, debe ser la misma que maximiza la riqueza a partir de esta última. Si dejamos de lado por el momento la cuestión acerca de cómo llegamos al punto de la primera cosecha y de las sucesivas, la trayectoria completa no puede resultar óptima (maximizadora de la riqueza) a menos que el futuro luego de la primera cosecha también esté óptimamente sincronizado. En caso contrario, la decisión completa desde el instante inicial hacia delante podría ser mejorada sencillamente reemplazando la vieja trayectoria después de la primera cosecha con otra. Este razonamiento fue enunciado por el matemático Richard

Bellman[3] y se lo conoce como Principio de Optimalidad. Este punto de vista ha sido aplicado de forma generalizada en las últimas décadas analizando problemas en los cuales las decisiones están interrelacionadas, esto es, cuando la decisión de un período afecta al nivel de alguna variable relevante en el futuro. En ese caso, repetir las decisiones tomadas en el pasado no será óptimo, ya que cada decisión impone una "externalidad" sobre el futuro. Sólo entonces tenemos un problema verdaderamente dinámico.

Vamos a analizar otro ejemplo. Supongamos que hay una laguna de propiedad privada que tiene una cantidad inicial de peces, x_0. Supongan también que la laguna solamente tiene valor por el stock de peces que hay en ella. En general, a medida que los peces son recolectados a lo largo del tiempo, el tamaño del stock de peces irá cambiando, como así también el valor del recurso. Y a menudo se da el caso de que cuantos más peces hay en la laguna, tanto más fácil es atraparlos. Por tal motivo, la decisión presente de recolectar puede tener un efecto adicional sobre el costo marginal de pescar futuro, y por lo tanto sobre el valor presente del recurso. Como el valor presente del recurso en su totalidad es el valor actualizado de todos los beneficios menos los costos futuros, las decisiones tomadas "hoy" que afectan al costo de pescar "mañana" se reflejan en el valor presente del recurso. Un propietario despreocupado del costo futuro de sus decisiones presentes no terminará usando al recurso de modo de hacer máxima su riqueza.

Denotemos mediante $x(t)$ al stock de peces en la laguna en cualquier momento t. Inicialmente, se tiene que $x(t_0)=x_0$. Los peces son recolectados a una tasa $u(t)$ que es elegida por el propietario del recurso. La variable $u(t)$ es llamada la variable de control; es la trayectoria de decisiones tomadas (en este caso, recolección de peces). Supongan que los peces son vendidos en el mercado internacional a un precio p que se supondrá constante ahora y para siempre. La cantidad de peces recolectados depende del stock de peces, del insumo trabajo y de otros factores. Existe una función de costos con buen comportamiento y con las propiedades usuales: $c=c(x,u,w)$ en la que w es un vector de precios de factores. Por ahora, se supone un horizonte finito de planeamiento, de modo que el propietario de la laguna maximiza el valor de los peces entre t_0 y t_1.

La hipótesis de maximización del valor actual del recurso (riqueza) se convierte luego en:

$$[1^a] \qquad \underset{u(t)}{\text{maximizar}} \quad \int_{t_0}^{t_1} [pu(t) - c(u(t),x(t),w)]\, e^{-rt}\, dt$$

Empero, este modelo todavía no está completo porque no ha sido especificado cómo depende el stock futuro de peces de la tasa presente de recolección. Como $x(t)$ es en todo momento el stock de peces, su derivada $x'(t)$ es la tasa de disminución o de crecimiento del stock en t. En general, el cambio del stock de peces dependerá de cierta tasa biológica de crecimiento $G(x)$ y de la tasa de recolección:

---

[3] La brochure del premio 1979 IEEE (Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos) afirma que "*Richard Bellman es una destacadísima figura entre quienes han contribuído a la teoría moderna del control y el análisis de sistemas. Su invento de la programación dinámica marcó el comienzo de una nueva era de los sistemas de gran escala y abrió un camino para aplicar técnicas de cómputo sofisticadas a una amplia gama de problemas – desde el diseño de sistemas de guía para vehículos espaciales hasta el control de plagas y la optimización de redes.*" Luego de enunciar diversos honores, como lo hizo más arriba, la brochure le rinde un tributo personal: *"Pero lo más importante es que Richard Bellman no solamente ganó fama – sino también la admiración y el afecto de todos quienes lo conocieron por su extraordinario coraje y su grandeza como ser humano."*

[1b] $x'(t) = G(x(t)) - u(t)$

Adicionalmente, debemos imponer restricciones sobre los valores admisibles de la variable de control, p.ej. $u(t) \geq 0$. En general suele requerirse que $u(t)$ esté contenida en algún conjunto de control U. Finalmente, deben ser especificadas ciertas condiciones en los extremos, tales como que el stock inicial de capital (peces, en este ejemplo) $x(t_0)=x_0$ y tal vez una condición terminal sobre el stock, $x(t_1)=x_1$.

La ecuación [1b] define la dinámica en este tipo de modelos. Es denominada la ecuación de estado; $x(t)$ es la variable de estado. La variable $u(t)$ es llamada variable de control; es el análogo dinámico de las variables de decisión de la teoría estática. Es la variable elegida por el que toma decisiones, o controlada por él (p.ej. la tasa de recolección, la tasa de inversión en capital nuevo, o cualquier otro flujo que afecte el tamaño del stock de algún recurso). La variable de estado $x(t)$ representa el tamaño del stock en el momento t. Naturalmente, el stock existente en t_1 depende del stock inicial y de la trayectoria de decisiones $u(t)$ concerniente a las extracciones del stock para $t \leq t_1$. Las ecuaciones [1], más las condiciones extremales y algún conjunto de control específico U, son el prototipo de los problemas de programación dinámica.

La forma general de los problemas de control óptimo es la siguiente:

[2a] $$\underset{u(t)}{\text{maximizar}} \int_{t_2}^{t_1} f(x(t),u(t),t)\, dt$$

sujeto a :

[2b] $x'(t)= g(x(t), u(t),t)$

y condiciones extremales

$x(t_0)=x_0,\ \ x(t_1)=x_1$ (o $x(t_1)$ sin restricción)

dado algún conjunto de control específico $U(t) \in U$. El período de tiempo $(t_0,\ t_1)$ es llamado el período de planeamiento. En varios problemas importantes, $t_1 \to \infty$, es decir se está en presencia de un horizonte de planeamiento infinito. Las condiciones extremales pueden ser diversas. Es típico que el stock inicial de la variable de estado esté fijo, aunque el stock terminal puede no estarlo. Adicionalmente, pueden existir restricciones sobre las variables, tales que no pueden ser negativas, y quizá cotas de desigualdad sobre las variables de control. Pero éstos son tópicos avanzados que no cubriremos.

Lev Pontryagin (1908–1988)

El problema matemático de hallar una función que minimiza o maximiza cierta integral fue planteado originariamente por Johann Bernoulli en 1696. Bernoulli desafió a sus colegas (y en particular a su hermano mayor Jacob, a quien trató de incompetente) a resolver el problema de la *braquistócrona*, (del griego - "brachistos" más corto, "chronos" tiempo), o curva de descenso más rápido, que resulta ser la curva entre dos puntos cubierta en el tiempo más breve por un cuerpo que comienza en el primer punto con velocidad cero y debe moverse a lo largo de la curva hasta el segundo punto, bajo la acción de una gravedad constante y suponiendo que no hay fricción. Ustedes pueden apreciar el movimiento resultante en http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Cycloid_animated.gif. La forma descubierta por Bernoulli es la de una “cicloide” invertida. La primera solución sistemática fue derivada en el siglo XVIII por los matemáticos Euler y Lagrange. Luego analizaremos esta solución. Bajo su forma original, la teoría matemática correspondiente es llamada el cálculo de variaciones. En los años 1950s, la teoría fue generalizada por Lev Pontryagin y sus colegas en la Unión Soviética – motivado por problemas de las ciencias físicas – y por Richard Bellman y otros en los Estados Unidos, orientados por problemas económicos y de la ciencia administrativa. El cálculo de variaciones clásico puede ser considerado como un caso especial de la teoría del control; sin embargo, las técnicas más antiguas son más simples para tratar ciertos problemas, aunque resulta más difícil interpretarlas en términos de la teoría económica.

5. Resolución del problema

Vamos a explotar el razonamiento que està detrás del principio de optimalidad de Bellman a fin de desarrollar una solución heurística al problema de control. El truco consiste en dividir todo el lapso de tiempo en dos períodos: el “presente”, que dura solamente un instante o un breve lapso, desde t hasta $t+\Delta t$, $\Delta t>0$; y el “futuro”, que consiste del resto del período de planeamiento, desde $t+\Delta t$ hasta t_1. Interpretemos el problema de control en términos de maximizar el valor presente de los peces en la laguna tal como hemos visto precedentemente. El integrando de [2ª], $f(x(t),u(t),t)$ representa los beneficios instantáneos de pescar a la tasa $u(t)$. Cuando se toma la decisión de pescar hoy, se genera un flujo de beneficios presente igual a $f\Delta t$. Si los peces de la laguna fueran de propiedad común, un individuo maximizaría sus beneficios de corto plazo haciendo $\partial f/\partial u=0$, tal como en una situación estática[4]. Bajo tales circunstancias, los pescadores no tendrían incentivo alguno para incorporar los efectos de sus acciones presentes sobre el futuro, es decir sobre el stock de peces disponible y el efecto resultante sobre el costo marginal de pescar. Sin propiedad del stock futuro de peces, no existe beneficio de recortar los beneficios actuales para lograr aún mayores beneficios futuros eventuales, ya que estos beneficios futuros podrían ser capturados por cualquiera.

Sin embargo, a medida que haya más pesca, el stock de peces y, por lo tanto, el valor de la propiedad del stock comenzarán a cambiar. En un mercado competitivo, supongan que los peces de la laguna sólo constituyen una ínfima parte del mercado de peces (y por lo tanto el precio de los peces puede ser considerado como una variable exógena). El valor de los peces de la laguna en todo momento será igual a $(p–MC)\ x(t)$, donde para simplificar también suponemos que el costo marginal de pescar MC es constante a lo largo del tiempo. Aunque no haya un mercado, empero, existirá un valor imputado al stock, dado por el producto del stock x y el valor marginal neto de los peces. El VM neto de los peces es el aumento del valor del stock que tendríamos agregando un pez a la laguna. Este incremento presente del stock podría complicar las implicancias de largo plazo del stock futuro, determinado por la función de crecimiento biológica y la tasa de extracción de peces.

Dejemos de lado por un momento la forma exacta en que se resuelve el problema [2ª], pero vamos a suponer que existe una solución finita $(u^*(t), x^*(t))$ del mismo. Estos valores $(u^*(t), x^*(t))$ representan a las trayectorias “óptimas” de las variables de control (en nuestro caso, la tasa de extracción de peces) y de la variable de estado (el stock de peces). Aunque no aparezcan explícitamente en la notación, x^* y u^* dependen en realidad de los parámetros x_0, t_0, etc. Si denotamos como $V(x_0,t_0)$ al valor resultante del funcional objetivo

[4] Esto consistiría típicamente de una condición de primer orden como $p=MC$.

[3] $$V(x_0,t_0) \equiv \int_{t_0}^{t_1} f(x^*((t),u^*(t),t)\, dt$$

esta función $V(x_0,t_0)$ es análoga a la función objetivo indirecta de la estática comparativa; es denominada función de valor óptimo. Si bien [2ª] requiere hallar la trayectoria o función que hace máxima una integral, una vez hallada esa función se tiene que resulta en un máximo común de la función de valor de los parámetros del modelo (suprimimos t_1 porque no está vinculado con la discusión). El VM de un incremento del stock inicial de peces en t_0 es simplemente $\partial V(x_0,t_0)/\partial x_0$. En forma más general, $V_x(x(t),t)$ representa el valor marginal del recurso en t si la variable de estado x es incrementada exógenamente en t, y la trayectoria óptima $(x(t),u(t))$ es seguida desde ese momento hasta el final del período.

Dado x_0 existe un VM del stock para todo $t_1 \geq t \geq t_0$, a este valor imputado lo denotaremos $\lambda(t) = V_x(x^*(t),t)$. A este valor marginal del stock $\lambda(t)$ a veces se lo llama variable de coestado o adjunta. El cambio del valor del stock producido por la pesca es $d[\lambda(t)x(t)] = \lambda x' + x\lambda'$. El verdadero beneficio neto de pescar a una tasa $u(t)$ es igual a la suma de los beneficios presentes, $f(x,u,t)$ más el cambio del valor máximo del stock causado por esa decisión presente. La trayectoria óptima (por ejemplo, la que maximiza la riqueza) se obtiene siempre fijando los "verdaderos" beneficios netos marginales (presentes más futuros) iguales a cero a lo largo de una trayectoria óptima completa de valores $(u^*(t), x^*(t))$. Por ende, la solución del problema de control óptimo requiere que, en todo t, $t_0 \leq t \leq t_1$, se tenga por cumplido:

[4] $$\text{maximizar}_{u,x} \quad f(x,u,t) + \lambda x' + x\lambda'.$$

Usando la ecuación de estado [2^b] esto se transforma en:

[5] $$\text{maximizar}_{u,x} \quad f(x,u,t) + \lambda g(x,u,t) + x\lambda'.$$

Vamos a suprimir la dependencia respecto de t ahora porque todavía no hemos hallado las funciones $(u^*(t), x^*(t))$ ni las hemos expresado como funciones de t. Diferenciando con respecto al control u y a la variable de estado x se obtiene:

[6] $$f_u + \lambda g_u = 0$$
[7] $$f_x + \lambda g_x + \lambda' = 0$$

A la ecuación [6] se la conoce como el principio del máximo. La ecuación [7] es llamada la ecuación de coestado. Estas dos condiciones más la ecuación de estado

[8] $$x' = g(x,u,t)$$

son las condiciones necesarias para que exista un sendero óptimo $(u^*(t), x^*(t))$ de variables de control y de estado a lo largo del período de planeamiento. También queda determinado el sendero de valores marginales del stock, $\lambda(t)$. Estas ecuaciones, sin embargo, no son meras ecuaciones en x, u y λ, en cuyo caso podrían aplicarse técnicas algebraicas o de estática comparativa. La ecuación adjunta [7] y la ecuación de estado [8] son ecuaciones diferenciales, que en general son de difícil resolución.

Las ecuaciones [6] y [7] se expresan generalmente en términos de la expresión $H=f+\lambda g$, llamada el Hamiltoniano del problema. El principio del máximo es $\partial H/\partial u=0$ (suponiendo que existe una solución interior del problema). La ecuación adjunta es $\partial H/\partial x= -\lambda'$. En nuestro problema original, dado el nivel inicial del stock x_0, al elegirse $u(t)$ queda determinado $x'(t)$ y por lo tanto $x(t)$ a través de la ecuación de estado. Por consiguiente, sólo hay una variable independiente, que es u. Pero al introducirse la nueva variable $\lambda(t)$ agregamos otro grado de libertad; como en el caso del análisis lagrangiano estático, "pretendemos" que el problema tiene una dimensión más que la que tiene en realidad.

Usando el principio del máximo [6] – que no es una ecuación diferencial – y recurriendo al teorema de la función implícita[5], podemos resolver en términos de u: $u=k(x,\lambda,t)$. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación [7] y en la ecuación de estado [8] se da lugar a dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

[9] $x'=g(x,k(x,\lambda,t),t)$

[10] $\lambda'= -f_x(x, k(x,\lambda,t),t) - \lambda\, g_x(x,k(x,\lambda,t),t)$

Resolviendo estas dos ecuaciones diferenciales y usando las condiciones relevantes en los extremos a fin de evaluar las constantes de integración, se obtienen soluciones óptimas para x y λ. Usando las soluciones de estas ecuaciones se obtiene la trayectoria óptima de la variable de control u, sustituyendo en $k(x, \lambda,t)$.

6. Un tratamiento más formal

Sea un punto (x_0,t_0) sobre la trayectoria óptima (no necesariamente el punto inicial). El valor máximo de la integral objetivo es alguna función $V(x_0,t_0)$. A medida que nos desplazamos a lo largo de alguna trayectoria dada $(x(t),u(t))$ en un pequeño intervalo de tiempo Δt, se ganan "beneficios inmediatos" iguales a $f(x,u,t)\ \Delta t$. En ese punto, la función V depende de las nuevas coordenadas $(x_0+\Delta x,\ t_0+\Delta t)$ y la trayectoria entre $t_0+\Delta t$ y t_1 que es el fin del período de planeamiento. Como $V(x_0,t_0)$ es el valor de la integral objetivo cuando se elige el sendero óptimo, para elecciones arbitrarias iniciales, se tendrá:

[11] $V(x_0,t_0)\geq f(x,u,t)\ \Delta t+V(x_0+\Delta x_0,t_0+\Delta t)$

Aplicando un desarrollo en serie de Taylor al último término, tendremos que, aproximadamente:

$$V(x_0+\Delta x,\ t_0+\Delta t) = V(x_0,t_0)+ V_x\Delta x + V_t\Delta t.$$

Sustituyendo este expresión en el segundo miembro [11] y simplificando:

$$f(x,u,t)\ \Delta t + V_x\Delta x + V_t\Delta t \leq 0.$$

Dividiendo por Δt y sacando límites, y haciendo uso de la ecuación de estado $dx/dt =x'=g(x,u,t)$:

[12] $f(x,u,t)+V_x(x,t)\ g(x,u,t) +V_t(x,t) \leq 0.$

[5] El teorema de la función implícita consiste en establecer condiciones bajo las cuales una ecuación de varias variables define a una de ellas como función de las demás. Se consideran el punto $P=(a_1,a_2,...,a_n,b)$ y la ecuación $F(x_1,x_2,...,x_n,z)=0$, siendo $F(x_1,x_2,...,x_n,z)$ una función de $n+1$ variables que satisface las siguientes condiciones:

1) $F(P)=0$
2) En un entorno del punto P existen y son continuas las derivadas parciales $\partial F/\partial x_1,\ \partial F/\partial x_2,...,\ \partial F/\partial x_n,\ \partial F/\partial z$
3) $\partial F/\partial z$ en P es distinto de cero.

Entonces existe en un entorno del punto $Q=(a_1,a_2,...,a_n)$ una única función $z=f(x_1,...,x_n)$ cuyas derivadas parciales respecto de $x_1,...,x_n$ son continuas en un entorno de dicho punto Q y tal que $F(x_1,x_2,...,x_n,f(x_1,...x_n))=0$.

A lo largo del sendero óptimo, [12] se verifica como igualdad, y bajo esa forma es conocida como ecuación de Hamilton–Jacobi:

[13] $f(x^*,u^*,t) + V_x(x^*,t)\, g(x^*,u^*,t) + V_t(x^*,t)=0.$

Recordemos que $\lambda(t)=V_x(x,t)$. Sustituyendo en [12],

[14] $f(x,u,t)+ \lambda(t)\, g(x,u,t) +V_t(x,t) \leq 0.$

También esta expresión se verifica como igualdad en el sendero óptimo $(x^*(t),u^*(t))$:

[15] $f(x^*,u^*,t)+ \lambda^*(t)\, g(x^*,u^*,t) +V_t(x^*,t) = 0.$

Como el último término V_t, que es la tasa de cambio con respecto al tiempo, depende sólo de x y t pero no de u, para un x dado la trayectoria óptima requiere la maximización con respecto a u de $H=f(x,u,t)+ \lambda(t)\, g(x,u,t)$. De aquí surge la condición [6].

La ecuación adjunta también se obtiene a partir de [13]. Esta relación es una identidad en el tiempo y en los parámetros del sistema, en particular x_0, cuando se sustituyen las trayectorias óptimas en esa ecuación. Diferenciando con respecto a x_0 y suprimiendo el signo '*',

$$f_x(\partial x/\partial x_0) + f_u(\partial u/\partial x_0) +V_x(x,t)[g_x(\partial x/\partial x_0) + g_u(\partial u/\partial x_0)] +gV_{xx}(\partial x/\partial x_0) + V_{tx}(\partial x/\partial x_0)\equiv 0.$$

Sacando factor común:

[16] $[f_x+V_x(x,t)g_x+V_{xx}g+V_{tx}]\, (\partial x/\partial x_0) + [f_u+V_x(x,t)g_u]\, (\partial u/\partial x_0) \equiv 0.$

Pero por la condición de máximo [6], el último corchete es nulo, recordando que $\lambda(t)=V_x(x,t)$. Y diferenciando a $V_x(x,t)$ con respecto a t, se tiene:

$$\lambda'(t)=V_{xx}x'+V_{xt} = V_{xx}g + V_{tx}$$

que son los dos últimos términos del primer conjunto de corchetes. Si se supone que $\partial x/\partial x_0\neq 0$ (es decir, el capital no es un bien abundante redundante, por lo cual tener más capital ahora permitiría afectar al capital de más adelante), [15] implica la ecuación adjunta $f_x + \lambda g_x + \lambda'=0.$

La ecuación [15] permite obtener una interpretación del Hamiltoniano, que es la suma de dos términos. El último término V_t indica en qué medida el valor máximo de la integral objetivo cambiará cuando pase un instante de tiempo, manteniendo al stock x constante. Luego, el Hamiltoniano es igual al efecto neto (negativo) de comenzar el proceso un poco más tarde.

7. Un ejemplo

Planteamos el siguiente problema de control óptimo:

$$\text{Maximizar} \int_0^1 (-\, x - ½\, \alpha u^2)\, dt$$

sujeto a $x'= u$

$x(0)=x_0\ ;\ x(1)=x_1.$

En este problema $\alpha>0$ es un parámetro. El Hamiltoniano es:

$$H(x,u,\lambda) = -\, x - ½\, \alpha u^2+\lambda u$$

Las condiciones necesarias, en el caso de una solución interior, son las siguientes:

$$\partial H/\partial u = -\alpha u + \lambda = 0$$
$$\partial^2 H/\partial u^2 = -\alpha \leq 0.$$

Como se ha supuesto que $\alpha>0$, $\partial^2 H/\partial u^2<0$. Resolviendo $\partial H/\partial u=0$ proporciona $u=\lambda/\alpha$. Las otras condiciones necesarias son las ecuaciones de estado y adjunta:

$$x' = \partial H/\partial \lambda = u$$
$$\lambda' = -\partial H/\partial x = 1.$$

Usando $u=\lambda/\alpha$, tenemos en estas ecuaciones:

$$x' = \lambda/\alpha, \qquad x(0)=x_0, \qquad x(1)=x_1 \qquad \lambda'=1$$

Integrando $\lambda'=1$ directamente nos proporciona $\lambda^*(t)=t+c_1$, ecuación en la cual c_1 es una constante de integración todavía desconocida. Sustituímos $\lambda^*(t)$ en $x'=\lambda/\alpha$ para obtener $x'=(t+c_1)/\alpha$. La integración de esta ecuación proporciona $x^*(t)=t^2/2\alpha + c_1 t/\alpha + c_2$ en la cual c_2 es otra constante de integración. Las constantes de integración c_1 y c_2 se determinan usando las condiciones inicial y terminal $x(0)=x_0$ y $x(1)=x_1$, respectivamente. Usamos $x(0)=x_0$ en $x^*(t)$ para obtener $x^*(0)=c_2=x_0$. Ahora usamos $x(1)=x_1$ para obtener el valor de c_1: $x^*(1)=½\alpha + x_0$; luego, $c_1=\alpha(x_1-x_0)-½$. Sustituyendo estas constantes de integración en $u=\lambda/\alpha$ se obtiene el sendero de control de tiempo óptimo. El resultado es:

$$x^*(t;\alpha,x_0,x_1) = t^2/(2\alpha) + [(x_1-x_0) - 1/(2\alpha)]t + x_0$$
$$\lambda^*(t;\alpha,x_0,x_1) = t + \alpha(x_1-x_0) - ½$$
$$u^*(t;\alpha,x_0,x_1) = (t/\alpha) + (x_1-x_0) - 1/(2\alpha)$$

8. Cálculo de Variaciones

El Cálculo de Variaciones es una rama de la matemática que trabaja con funcionales, a diferencia del cálculo usual que lo hace con funciones[6]. Tales funcionales pueden estar formadas por integrales que involucran a una función incógnita y a sus derivadas. El interés radica en las funciones extremales: es decir, aquellas que permiten que el funcional alcance su valor máximo o mínimo. Acaso el problema más simple de imaginar es uno que consiste en hallar la curva de menor longitud que conecta a dos puntos. Si no hay restricciones, obviamente la solución es una línea recta entre ambos puntos. Sin embargo, si la curva está restringida a yacer sobre una superficie en el espacio, la solución ya no es tan obvia, y tal vez existan muchas soluciones. Tales soluciones son llamadas *geodésicas*. Un problema vinculado fue planteado por el principio de Fermat: la luz sigue el camino de menor longitud óptica que conecta a dos puntos, en tanto que la longitud óptica depende del material del medio ambiente. Un concepto correspondiente en la mecánica es el principio de menor acción. Muchos problemas importantes involucran a funciones de varias variables. Las soluciones a los problemas de valores frontera de la ecuación de Laplace satisfacen el principio de Dirichlet. El problema de Plateau requiere hallar una superficie de área mínima que se extienda sobre un contorno dado en el espacio. La formulación original del problema de determinar un camino óptimo es el de hallar una función $x(t)$ que resuelva

[6] V. Johan Byström, Lars-Erik Persson, and Fredrik Strömberg, Chapter III: Introduction to the calculus of variations (undated).

$$\text{Maximizar} \int_{t_0}^{t_1} f(x,x',t)\, dt$$

Este es en la práctica un caso especial de problema de control, donde $x'=g(x,u,t)=u$. Esto es, la tasa de cambio temporal del stock es idénticamente la variable de control, en lugar de ser alguna función más general que podría incluir al stock propiamente dicho y al tiempo. Sustituyendo la ecuación de estado $u=x'$ en el integrando [2ª] da lugar a esta especificación.

En este caso, las condiciones necesarias de máximo (o mínimo) son las siguientes: El principio del máximo es

$$H_u=H_{x'}=f_{x'}+\lambda\, g_{x'}=0$$

Pero como $g_{x'}= g_u=1$:

[17] $f_{x'} = -\lambda$

La ecuación adjunta o de coestado es:

[18] $H_x= f_x+ \lambda g_x=f_x= - \lambda'$

dado que $g_x=0$. Como el miembro a la derecha de [18] es la derivada con respecto al tiempo de [17], podemos combinar ambas ecuaciones en:

[19] $\dfrac{d}{dt} f_{x'} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

Llevando a cabo la diferenciación en [19] se obtiene la expresión equivalente

[19'] $f_x=f_{x'\,t} + f_{x'\,x}\, x' + f_{x'\,x'}\, x''$

La ecuación [19] es la relación clásica Euler–Lagrange que define la condición necesaria para una trayectoria óptima. Exceto en casos especiales, su aplicación tiene como resultado una ecuación diferencial de segundo orden, en comparación con las condiciones necesarias de la teoría del control que resultan en un sistema simultáneo de ecuaciones diferenciales de primer orden [9] y [10]. No existe una ventaja uniforme en computar uno en lugar de otro; la diferencia radica en que la ecuación de Euler–Lagrange es difícil de interpretar, mentras que las ecuaciones de la teoría del control se prestan más fácilmente para caracterizar la dinámica de los modelos económicos.

Hay oportunidades en que pueden utilizarse determinados procedimientos[7], por ejemplo si el funcional objetivo solamente depende de x y de x', es decir sin incluir al tiempo t explícitamente. En tal caso, la ecuación de Euler–Lagrange es

$$f_x=df_{x'}(x,x')/dt = f_{x'\,x'}\, x' + f_{x'\,x'}\, x''$$

que implica

$$f_x - f_{x'\,x}\, x' - f_{x'\,x'}\, x'' =0$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden. Pero se da la situación de que x' es un factor integrante de la expresión, ya que multiplicando todo por x' permite obtener:

[7] V. M.I. Kamien and N.I. Schwartz, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management,* North Holland, New Yord, 1981.

$$x'\,(f_x - f_{x'x}\,x' - f_{x'x'}\,x'') = \frac{d(f - x'\,f_{x'})}{dt} = 0$$

Luego, en este caso la ecuación de Euler–Lagrange implica:

$$f - x'\,f_{x'} = k$$

donde k es una constante de integración. Esta ecuación a menudo es más fácil de resolver que la condición de Euler–Lagrange en su forma original.

Como ejemplo, vamos a demostrar en forma algebraica un resultado que todos conocemos a nivel intuitivo: la distancia más corta entre dos puntos en un plano es una línea recta. Los dos puntos serán indicados mediante (t_0,x_0) y (t_1,x_1). Recordando el teorema de Pitágoras, comenzando en uno de los puntos y efectuando pequeños desplazamientos dt en la dirección t y dx en la dirección x, la distancia recorrida es la longitud de la hipotenusa:

$$ds= [(dt)^2+(ds)^2]^{½} =[1+x'(t)^2]^{½}\, dt$$

Tratamos de minimizar la suma de estos pequeños segmentos :

$$\text{minimizar} \int_{t_0}^{t_1} [1+ x'(t)^2]^{½}\, dt$$

Este es un caso especial, en el cual el integrando depende solamente de x'. Aplicando la ecuación de Euler [19'],

$$f_{x'x'}\,x'' =0.$$

Luego, se tiene o bien $x''=0$ o bien $f_{x'x'} =0$. El integrando es $[1+ x'(t)^2]^{½}$, y por consiguiente $f_{x'x'} \neq 0$. Por lo tanto, $x''=0$. Esta sencilla ecuación diferencial tiene como solución $x=c_1t+c_2$, que es la ecuación general de una recta. Usando las coordenadas de los puntos terminales para evaluar las constantes de integración se obtiene:

$$c_1=\frac{(x_1-x_0)}{(t_1-t_0)}, \qquad c_2=\frac{(x_0t_1-x_1t_0)}{(t_1-t_0)}$$

9. Condiciones de transversalidad

Hasta ahora no hemos hablado demasiado sobre los efectos de los supuestos acerca de los valores inicial y final del sendero óptimo. Las condiciones en los puntos extremos (o extremales) no constituyen en general un problema en los análisis de estática comparativa, ya que en general se supone que las soluciones tienen lugar en puntos interiores. En el análisis dinámico, el sendero puede llegar a depender críticamente del supuesto realizado sobre los valores inicial y final. La solución de problemas de control óptimo implica resolver una ecuación diferencial de segundo orden (o lo que es equivalente, dos ecuaciones simultáneas de primer orden). En cualquier caso, aparecen dos constantes arbitrarias de integración. Al efecto de evaluar a estos parámetros, deben hacerse supuestos adicionales sobre los senderos óptimos.

Por ejemplo, consideren el problema de la pesca. Si el modelo es planteado como un problema de maximización entre el momento t_0 y el momento (finito) t_1, el modelo supone esencialmente que después de t_1 no habrá tiempo adicional, o sea que el mundo termina en t_1. (Existe una clase de modelos un poco más general que agrega un valor residual $R[x(t_1),t_1]$ al problema de maximización.) Si sucede que especificamos simplemente al stock de peces en términos de valores iniciales y finales $x(t_0)$, $x(t_1)$ no hay problemas adicionales; estos valores serán utilizados para evaluar las constantes arbitrarias que aparecen en la solución de la ecuación diferencial que define al sendero óptimo. Sin embargo, si existiera un stock positivo de peces en t_1 (que es el fin del mundo), de seguro no tendría valor alguno. Por lo tanto, $x(t_1)>0 \rightarrow \lambda(t_1)=0$. (Si existe un valor residual positivo, $\lambda(t_1)=\partial R/\partial x_1$.) En muchos casos, empero, el valor final del stock de peces no se especifica *a priori*, sino se determina mediante la hipótesis de optimización. Por el mismo motivo puede decirse que, si el stock adicional de capital fuera un bien "libre" (e.d. sin especificar por adelantado), entonces $\lambda(t_1)=0$. Tales condiciones son conocidas como <u>condiciones de transversalidad</u>; son las condiciones adicionales necesarias a efectos de evaluar las constantes de integración en los problemas de control óptimo. Para problemas de maximización, si $x(t_1)\geq 0$ es la restricción sobre el capital terminal, las condiciones de transversalidad pueden ser expresadas como:

[20] $\lambda(t_1)\geq 0, \qquad x(t_1) \geq 0, \qquad \lambda(t_1)x(t_1) = 0$

Adicionalmente, en algunos problemas el propio momento final t_1 se supone que es libre. En tal caso, una actividad como la pesca dejaría de existir si no tuviera valor, es decir que no añadiera algo al valor $V(x,t)$ de la integral objetivo. A partir de la ec. de Hamilton–Jacobi [15], en t_1 se tiene

[21] $-V_t = f(x^*,u^*,t) + \lambda^*(t)\, g(x^*, u^*, t) = 0$

si t_1 es un extremo libre. Para modelos más complejos estas condiciones deben ser modificadas, p.ej. si se introducen restricciones de desigualdad y valores residuales. Estas condiciones en general se parecen a las restricciones de Karush–Kuhn–Tucker de la optimización estática.

10. <u>Problemas autónomos</u>

Dentro de la estructura de un problema de control general, la variable t puede estar presente en la función objetivo y directamente en la ecuación de estado. <u>La fecha importa</u>, como en el problema de maximización siguiente:

$$\text{maximizar} \int_{t_0}^{t_1} f(x,u,t)\, dt$$

sujeto a $x' = g(x,u,t,)$, $\qquad x(t_0)=x_0$.

En nuestra interpretación, el ingreso generado por la actividad $u(t)$ no solamente depende del nivel de extracción y del stock del recurso, o utilización del capital (es decir, del nivel de las variables de control y estado), sino también de *cuándo* tiene lugar esta actividad. En la mayoría de los modelos económicos, tal dependencia de la fecha sólo es incorporada en el término e^{-rt} usado para descontar el ingreso futuro hacia el presente t_0.

Son denominados <u>autónomos</u> los modelos en los cuales t está ausente tanto de las ecuaciones objetivo como de estado, es decir,

$$\text{maximizar} \int_{t_0}^{t_1} f(x,u)\, dt$$

[22] sujeto a $x'=g(x,u)$, $x(t_0)=x_0$.

En este caso, la condición de máximo $H_u=f_u+\lambda g_u=0$, la ecuación de estado $x'=g(x,u)$, y la ecuación adjunta $f_x+\lambda g_x+\lambda'=0$ terminan generando ecuaciones diferenciales en x' y λ' que no involucran en forma explícita a t. Estas ecuaciones son mucho más fáciles de ser resueltas que aquellas en las que t aparece en forma explícita.

Los modelos en los cuales el tiempo interviene solamente como parte del factor de descuento e^{-rt} son también llamados autónomos, ya que la dependencia del tiempo puede ser eliminada con facilidad. Por ejemplo, consideren un modelo como el siguiente:

[23] maximizar $\int_{t_0}^{t_1} f(x,u)\, e^{-rt}dt$

sujeto a $x'=g(x,u)$, $x(t_0)=x_0$.

Reemplazando al tiempo t mediante la variable $s=e^{-rt}$ y definiendo los instantes iniciales y terminales en términos de s, el problema se transforma instantáneamente en uno autónomo.

En modelos del tipo [23], la variable de coestado $\lambda(t)$ es el valor presente (es decir, en el momento t_0) del valor marginal de un incremento del capital en el momento t. A veces es más conveniente resolver estos problemas utilizando un "multiplicador de valor corriente", $m(t)$, tal que

[24] $e^{-rt}m(t)=\lambda(t)$.

Las condiciones necesarias de optimalidad son, otra vez :

[25] $H_u=e^{-rt}f_u+\lambda g_u=0$

y

[26] $H_x=e^{-rt}f_x+\lambda g_x= -\lambda'$.

Utilizando [24]:

$$e^{-rt}m'(t) - r\, e^{-rt}m(t) = \lambda'(t)$$

Ahora podemos escribir el Hamiltoniano a valores corrientes como:

$$\mathcal{H}=e^{rt}H= f+e^{rt}\lambda g = f+mg$$

Las condiciones de primer orden son equivalentes a:

[27] $\mathcal{H}_u=f_u+mg_u=0$

y

[28] $\mathcal{H}_x=f_x+mg_x=r\, m-m'(t)$

luego de netear e^{-rt} en cada término. Las ecuaciones [27] y [28] son ecuaciones diferenciales autónomas, ya que la variable independiente t no aparece explícitamente como un argumento separado. Usualmente, el sistema puede ser resuelto más fácilmente de esta manera.

11. Condiciones suficientes

Las condiciones de Euler–Lagrange [6] y [7], más las de la ecuación de estado [8] y de transversalidad son condiciones necesarias de primer orden, ya sea para un máximo o un mínimo. Las suficientes son parecidas a las de la teoría estática:

- Si $f(x,u,t)$ y $g(x,u,t)$ son ambas cóncavas por doquier en x y u para todo t, si $g(x,u,t)$ es no lineal en x o en u, si $\lambda(t) \geq 0$, y si se satisfacen las condiciones necesarias de primer orden, la solución representa un máximo.
- Si $f(x,u,t)$ y $g(x,u,t)$ son ambas convexas por doquier, la solución representa un mínimo.

Bajo estas condiciones, el Hamiltoniano será cóncavo (o convexo, en problemas de mínimo). Como la expresión

$$H+\lambda'x = f(x,u,t) + \lambda g(x,u,t) + \lambda'x$$

se maximiza en todo punto de la trayectoria óptima, estas condiciones son plausibles desde el punto de vista intuitivo. Observen que si $g(x,u,t)$ es lineal en x y en u, la concavidad de la expresión resultará independiente de g, y por consiguiente del signo de $\lambda(t)$. En el caso del cálculo clásico de variaciones, o sea,

$$\text{Maximizar} \int_{t_0}^{t_1} F(x,x',t)\, dt$$

la condición suficiente es que el integrando $F(x,x',t)$ sea cóncavo en x y x' para todo t. En problemas de mínimo, f debe ser convexo en x y en x' para todo t. Esta condición puede aplicarse en los problemas de control si la variable de control puede ser eliminada mediante sustitución, convirtiendo el problema en uno de cálculo de variaciones. Noten que esta condición suficiente exige la convexidad (o concavidad) global de f y de g (o de F); por lo tanto, si existe una solución de las condiciones necesarias de primer orden, ésta corresponde al óptimo global. Existe una condición más débil, $F_{x'x'} \leq 0$ a lo largo del sendero óptimo, que se trata de una propiedad de curvatura local. La maximización la implica necesariamente (fíjense en la desigualdad débil). Como sucede en los problemas de optimización estática, estas condiciones son a menudo la base de la estática comparativa o de resultados de dinámica comparativa en problemas dinámicos.

12. Ecuaciones diferenciales

Los efectos de cambios de los parámetros sobre la trayectoria óptima o sobre los valores de largo plazo son abordados frecuentemente mediante técnicas similares a la estática comparativa. Sin embargo, para que los problemas puedan ser tratados y útiles, muchos modelos deben incorporar supuestos simplificadores. Por ejemplo, varios problemas de control interesantes suponen formas funcionales determinadas de las funciones objetivo y ecuaciones de estado. Entonces las ecuaciones de máximo y adjuntas dan lugar a ecuaciones diferenciales específicas cuya solución resulta interesante.

En general, las ecuaciones diferenciales constituyen un campo de difícil solución, en el que algunas ecuaciones que parecen ingenuas resultan de complicado tratamiento. Vamos a revisar ahora algunos procedimientos estándar. Un caso sencillo se presenta cuando una ecuación diferencial puede ser resuelta mediante separación de variables. Por ejemplo, para resolver $y'=dy/dt=y/t$, escribiremos

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$$

Integrando miembro a miembro nos proporciona

$$\log y = \log t + \log k$$

en la cual se ha escrito a la constante de integración log k por conveniencia. Por lo tanto, la solución general puede escribirse

$$y(t) = kt.$$

Si hubiéramos especificado que la curva debe pasar a través de cierto punto en particular (t_0,y_0) se podría evaluar a esta constante de integración. Este tipo de ecuaciones diferenciales son las más simples de trabajar.

Consideremos ahora a la clase de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$[29] \qquad y'(t) + b(t)\, y(t) = c(t)$$

¿Por qué decimos que es lineal ? Porque no hay términos de la forma $(y')^2$, yy', etc. Una solución de esta ecuación es una función $y=s(t)$ tal, que cuando sustituímos esta función en la ecuación nos queda una identidad. Hay un teorema fundamental que identifica la naturaleza de estas soluciones, que es el siguiente. Escribimos la ecuación [29] sin segundo miembro:

$$[30] \qquad y'(t) + b(t)\, y(t) = 0$$

Esta es llamada la ecuación reducida. (Si no hay función en el segundo miembro, la ecuación diferencial es llamada homogénea.) Si existe una solución, este tipo de ecuaciones es mucho más fácil de resolver que [29]. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales involucran, por supuesto, constantes arbitrarias. Pero si puede encontrarse alguna solución *particular* de [29], la solución *general* de [29] será igual a la suma de esa solución particular más la solución general de la ecuación reducida [30].

Investiguemos estas ecuaciones cuando b y c son constantes (en lugar de ser funciones de t). La ec. [29] es denominada ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes. En este caso, la solución de la ec. [30] siempre puede obtenerse multiplicando por e^{bt}. Fíjense que:

$$e^{bt}(y'+by) = \frac{d(e^{bt}y(t))}{dt} = 0$$

Luego, la solución general de la ecuación reducida es $e^{bt}y(t) = K$, siendo K una constante arbitraria, o

$$y(t) = K\, e^{-bt} + (c/b)$$

Mediante inspección, se ve que una solución particular de [29] es $y=(c/b)$ (observar que $y'=0$). La solución general de [29] es por lo tanto:

$$y(t)= Ke^{-bt} + (c/b).$$

Si sustituyen esta expresión en [30] confirmarán que se trata efectivamente de una solución.

Ejemplo Sea la ecuación diferencial

$$y'+y=t+1$$

Una solución particular de la ecuación n reducida es $y=t$; por consiguiente, la solución general, como $b=1$, es

$$y=Ke^{-t}+t.$$

El caso más general de $b=b(t)$ y $c=c(t)$ puede plantear más dificultades en hallar una solución particular. Sin embargo, siguiendo el procedimiento aplicado en el caso de coeficientes constantes, la solución general de la ecuación reducida siempre será de la forma

$$y(t) = Ke^{-\int b(t)\, dt}.$$

Si se agrega una solución particular de [29] se obtendrá la solución general.

Los mismos procedimientos son aplicables a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, aunque el álgebra resulte más compleja. Las soluciones generales de

[31] $y''+by'+cy = d$

consisten de la suma de una solución particular de toda la ecuación más la solución general de la ecuación reducida (homogénea):

[32] $y''+by'+cy =0.$

A fin de resolver [32] se “prueba” una solución de la forma $y=e^{rx}$. Sustituyendo en [32]:

$$e^{rx}(r^2 + br + c) = 0.$$

La ecuación será satisfecha para soluciones de la ecuación cuadrática, denominada la ecuación característica,

$$r^2 + br + c = 0.$$

Usando la fórmula cuadrática, las raíces serán:

[33] $r_1, r_2 = \dfrac{-b}{2} \pm \dfrac{(b^2-4c)^{½}}{2}$

Se presentan diversos casos:

1. Si $b^2-4c>0$, las raíces son reales y distintas, en cuyo caso la solución de [32] es:

[34] $y(t)= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

con c_1 y c_2 constantes de integración. Si ambas raíces son negativas, $y(t)\rightarrow 0$ a medida que $t\rightarrow\infty$. Los problemas de teoría del control con este tipo de solución convergen asintóticamente hacia un "estado estacionario"; si alguna o ambas raíces es(son) positivas y la(s) constante(s) correspondiente(s) es(son) distinta(s) de cero, la trayectoria será divergente.

2. Si $b^2–4c=0$, las raíces son idénticas: $r_1=r_2=r$; la solución de [32] será entonces:

[35] $y(t)= (c_1+c_2t)\, e^{rt}$.

3. Si $b^2–44c<0$, las raíces son complejas, es decir involucran al número $i=\sqrt{-1}$. La solución adopta de nuevo la forma [34] ya que las raíces son distintas (complejos conjugados). Pero es más útil usar la identidad

$$e^{it}= \cos t + i \operatorname{sen} t.$$

Las partes real e imaginaria de las raíces de la ecuación característica se definen, respectivamente, mediante $p=–b/2$, $q=(b^2–4c)^{½}/2$. La solución de [32] es por lo tanto

[36] $y(t)=e^{pt}(c_1 \cos(qt)+c_2 \operatorname{sen}(qt))$

fórmula en la cual, nuevamente, c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Observen que si la parte real de las raíces p fuera negativa, la solución $y(t)$ oscilará en torno a cero, convergiendo a cero a medida que $t\rightarrow\infty$.

13. Sistemas de ecuaciones diferenciales

El formato de la teoría del control da lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales – habitualmente una para la variable de estado, $x(t)$, y otra para la variable de coestado, $\lambda(t)$. Éstas son en general de menor orden que la única ecuación diferencial resultante de la ecuación de Euler–Lagrange del cálculo de variaciones. Aunque en el fondo, los dos enfoques son equivalentes.

Consideremos solamente el caso lineal de primer orden:

[37] $x'=a_1x(t) +b_1y(t) +f(t)$
$y'=a_2x(t) +b_2y(t) +g(t)$

Como con las ecuaciones diferenciales tomadas aisladamente, las soluciones de [37] consisten de la suma de una solución particular de todo el sistema y de la solución general del sistema homogéneo (reducido):

[38] $x'=a_1x(t) +b_1y(t)$
$y'=a_2x(t) +b_2y(t)$

Consideremos solamente la solución del sistema homogéneo [38]. Diferenciando a la primera ecuación con respecto a t y sustituyendo y' por x' en [38] se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden equivalente:

[39] $x''–(a_1+b_2)x'+(a_1b_2–b_1a_2)x=0$.

Esta ecuación puede ser resuelta mediante los métodos previamente discutidos. Pero también podemos proceder en forma directa con [38] y probar soluciones de la forma $x(t)=Ae^{rt}$, $y(t)=Be^{rt}$. Sustituyendo en [38] y simplificando e^{rt} en cada término proporciona la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1-r & b_1 \\ a_2 & b_2-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación tiene una solución no trivial sólo si su determinante es cero:

[40]

$$\begin{vmatrix} a_1-r & b_1 \\ a_2 & b_2-r \end{vmatrix} = 0$$

Expandiendo [40] da lugar a la ecuación característica asociada con la ec. [39] de segundo orden:

[41] $r^2-(a_1+b_2)r+(a_1b_2-b_1a_2)=0$

A partir de este punto la solución se obtiene como antes. Sean r_1 y r_2 las raíces (soluciones) de [41]. Si por ejemplo $r_1 \neq r_2$, las soluciones de las ecuaciones diferenciales homogéneas simultáneas [38] son:

[42] $x(t)=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$

$y(t)=B_1e^{r_1t}+B_2e^{r_2t}$

Si se trata de un problema de horizonte infinito (o sea que el límite superior del funcional objetivo es ∞), y el tiempo *t* aparece eventualmente sólo directamente en el factor de descuento, a menudo uno se pregunta si la solución del problema de control converge hacia algún estado estacionario (que involucra habitualmente a la porción no homogénea de [37]). Este resultado está asegurado si las raíces son negativas, o si las partes reales de las raíces complejas son negativas, ya que en estos casos $e^{rt}\to 0$ cuando $t\to\infty$. Si una raíz es negativa y la otra positiva, se dice que el sistema tiene un punto de ensilladura. Por ejemplo, si $r_1>0$ la solución va a converger al estado estacionario si $A_1=B_1=0$.

14. Consumo intertemporal

Vamos a continuar ahora con el caso análogo continuo del modelo de elección intertemporal tratado en el capítulo VIII. Suponemos un consumidor con función de utilidad $U(C(t))$, en la cual $C(t)$ es el flujo de consumo. También supondremos, como en la teoría estática, que $U'>0$, $U''<0$. El individuo tiene una dotación de capital inicial K_0 sobre la cual gana un flujo de ingresos igual a iK, siendo i la tasa de interés de mercado. Adicionalmente, mediante la venta de capital (cuyo precio está normalizado igual a la unidad) también puede consumirlo a través del tiempo. Finalmente, se supondrá que el consumidor es “impaciente”, es decir que tiene una tasa de preferencia temporal positiva ρ. El modelo de maximización intertemporal de su utilidad puede ser puesto de manifiesto como

Maximizar $\int_0^T U(C)\, e^{-\rho t}dt$

sujeto a $K'=iK-C,$ $K(0)=K_0,$ $K(T)\geq 0.$

La variable de estado es el stock de capital; la de control es el flujo de consumo $C(t)$ elegido por el consumidor. La ecuación de estado (que es una restricción), expresa que el cambio del stock de capital (“ahorro” si es positivo y “desahorro” si es negativo) es igual a la diferencia entre el ingreso ganado sobre el stock, iK, y el consumo, C. Por supuesto, suponemos que $C(t)>0$ y $K(t)>0$ para todo t.

El Hamiltoniano es

$$H=U(C)e^{-\rho t}+\lambda(iK-C)$$

que da lugar a las ecuaciones del máximo y la adjunta:

[43] $H_C=U'(C)e^{-\rho t}-\lambda=0$
[44] $H_K=i\lambda=-\lambda'$

Como la utilidad marginal es decreciente por hipótesis ($U''<0$) el integrando es cóncavo en C; la restricción es lineal en C y en K, por lo que el Hamiltoniano en cóncavo en ambas variables, lo que asegura que las soluciones de las ecuaciones de primer orden representan un máximo.

La ec. [43] indica que en todo punto de la trayectoria óptima, la utilidad marginal del consumo descontada es igual al valor presente (cuando $t=0$) de una unidad adicional de capital. Diferenciándola con respecto a t da lugar a:

$$U''(C)\,C'\,e^{-\rho t}-\rho U'(C)\,e^{-\rho t}=\lambda'$$

Por la ecuación [44], $\lambda'=-i\lambda=-iU'(C)e^{-\rho t}$ (usando [43]). Utilizando este resultado en el lado derecho de más arriba, y simplificando los términos $e^{-\rho t}$,

[45] $$\frac{(U''C')}{U'}=i-\rho$$

El lado izquierdo de [45] es el cambio proporcional, con respecto al tiempo, de la utilidad marginal del consumo individual. Que representa el beneficio marginal de aumentar el consumo en todo momento. La ecuación nos dice que, a lo largo del sendero óptimo, estos beneficios marginales son iguales al costo marginal de oportunidad de aumentar el consumo, en otros términos la tasa “neta” de interés, que es igual al rendimiento real del mercado menos la tasa de impaciencia.

Ahora pasemos a lo que implica [45] en cuanto a conducta observable. Como $U'>0$ y $U''<0$, $C'(t)$ tiene el mismo signo que $i-\rho$. Luego, si $i=\rho$, es decir si la tasa de interés es igual a la tasa de impaciencia, el consumidor elegirá un nivel constante de consumo como en los modelos estáticos. De la misma manera, si la tasa de interés (costo de oportunidad del mercado) excede la tasa de impaciencia individual, el consumo irá aumentando a través del tiempo, y recíprocamente. Si la tasa de interés sufriera un incremento en algún momento t, el consumidor aceleraría su flujo de consumo, trasladando consumo hacia el presente a mayor velocidad. Fíjense que [44] es una ecuación diferencial homogénea lineal muy simple, cuya solución es

[46] $\lambda(t)=\lambda_0\,e^{-it}$

donde λ_0 es la constante de integración. Por lo tanto, el valor presente del valor marginal del capital disminuye a través del tiempo; su valor corriente, $e^{it}\lambda(t)$ permanece constante en λ_0. Si combinamos esta ecuación con la ec. [43] obtenemos

[47] $U'(C(t)) = \lambda_0\, e^{(\rho-i)t}$.

Veamos ahora qué debe suceder al término del período de planificación. Recuerden que la condición de transversalidad [20], resultante de la no negatividad del stock de capital terminal, requiere que $\lambda(T)K(T)=0$. O bien se agota el stock de capital, $K(T)=0$, o su valor marginal debe desplomarse a cero en la fecha terminal. El único motivo por el cual el capital no sería consumido totalmente es que el consumo adicional que ello permite no tenga valor, es decir que el consumidor esté completamente saciado de modo que tener más ingreso ya no sea preferido a tener menos una vez llegado a ese margen. Nosotros hemos hecho el supuesto de que $U'(C)>0$ para todo nivel de consumo, de modo que la única posibilidad es que en $t=T$, $K(T)=0$. Por consiguiente, suponiendo que siempre se prefiere más a menos, el capital se agotará a fines del período de planeamiento.

Las ecuaciones [45] a [47] caracterizan la solución de este modelo. Para derivar las trayectorias de consumo y utilización del capital, es necesario suponer alguna forma funcional específica de la función de utilidad. Lo haremos suponiendo que $U(C)=log(C)$. La ec. [45] es entonces:

$$C'/C= (1/C)\, dC/dt =i - \rho$$

Separando variables e integrando,

[48] $C(t) = C_0\, e^{(i-\rho)t}$.

Esta ecuación es el sendero de la variable de control $C(t)$. Para derivar el sendero de la variable K, recordamos la ecuación de estado (o restricción):

$$K'- iK = -C = - C_0\, e^{(i-\rho)t}$$

Esta ecuación puede ser integrada usando el factor integrante e^{-it}:

$$e^{-it}(K'-iK) = d(e^{-it}K)/dt = - C_0\, e^{-\rho t}$$

Integrando ambos lados da como resultado:

[49] $e^{-it}K(t) = (C_0/\rho)\, e^{-\rho t}+ A$

en la cual A es una constante arbitraria de integración. En $t=0$, $K(0)=K_0$; luego,

$$A=K_0 - (C_0/\rho).$$

En forma similar, como $K(T)=0$,

$$0 =(C_0/\rho)e^{-\rho T}+A, \qquad \text{o } A=(-C_0/\rho)e^{-\rho T}$$

y por lo tanto

$$A = \frac{-K_0 e^{-\rho T}}{1 - e^{-\rho T}}, \qquad C_0 = \frac{\rho K_0}{(1 - e^{-\rho T})}$$

Luego la solución de [49] es:

$$K(t) = K_0 e^{it} \left[\frac{e^{-\rho t} - e^{-\rho T}}{1 - e^{-\rho T}} \right]$$

$$C(t) = \frac{\rho K_0 e^{(i-\rho)t}}{(1 - e^{-\rho T})}$$

15. La recolección de un recurso renovable

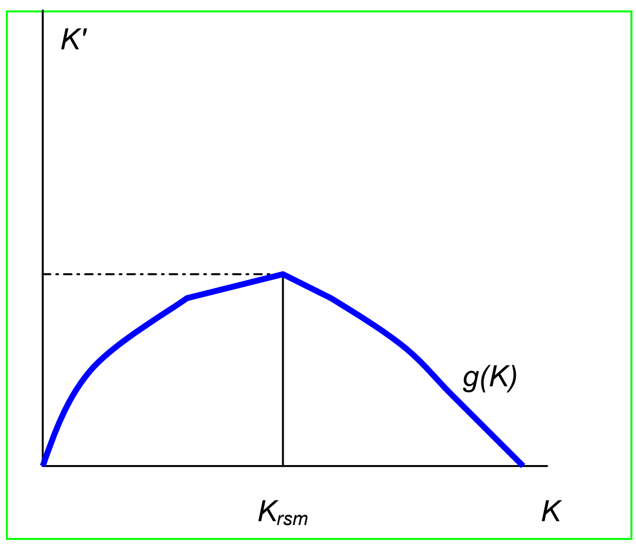
Hay un problema estrechamente ligado al que hemos venido analizando, que es el de recolectar un recurso renovable, como los peces[8]. Suponemos dada la misma función objetivo, sólo que en este caso se tomará un horizonte de tiempo infinito. El supuesto importante es que, dejado a sí mismo, el stock de peces crecería a cierta tasa hasta cierto tamaño máximo; y que, si fuera mayor que éste, los peces en términos netos comenzarían a disminuir, reduciendo el stock hasta su tamaño estacionario. Formulamos el modelo como:

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^{\infty} U(C)\, e^{-\rho t}\, dt$$

sujeto a

[50] $K' = g(K) - C, \qquad K(0) = K_0$

donde K representa al stock del recurso renovable (peces). La función $g(K)$ representa al crecimiento biológico del stock, en la figura de la derecha. Con stock cero ($K=0$) no hay reproducción y K permanece en cero. Si no se interviene, para K positvo, el stock crecerá a una tasa dada por $K'=g(K)$. En muchas especies en entornos dados, existe un "rendimiento sustentable máximo" K_{rsm}, cuando $g'(K)=0$. Suponemos que $g'(K)>0$ para $K<K_{rsm}$ y $g'(K)<0$ si $K>K_{rsm}$. Luego, $g''(K)<0$. Por consiguiente, si K_{rsm} fuera el stock corriente de peces, sería posible consumir $K'=g(K_{rsm})$ para siempre. Suena plausible como nivel eficiente de consumo (es decir, que maximiza la utilidad). Veremos empero que cuestiones dinámicas, como la posibilidad de preferencia temporal y el efecto del tamaño del stock de peces sobre el costo marginal de pescar modifican este enfoque.



[8] Hay varios trabajos sobre el tema, p.ej. C.G.Plourde, "A Simple Model of Replenishable Natural Resource Exploitation", American Eco. Rev., 60, June 1970;

El Hamiltoniano *a valores corrientes* de [50] es

[51] $\mathcal{H}= U(C)+m(g(K) - C)$

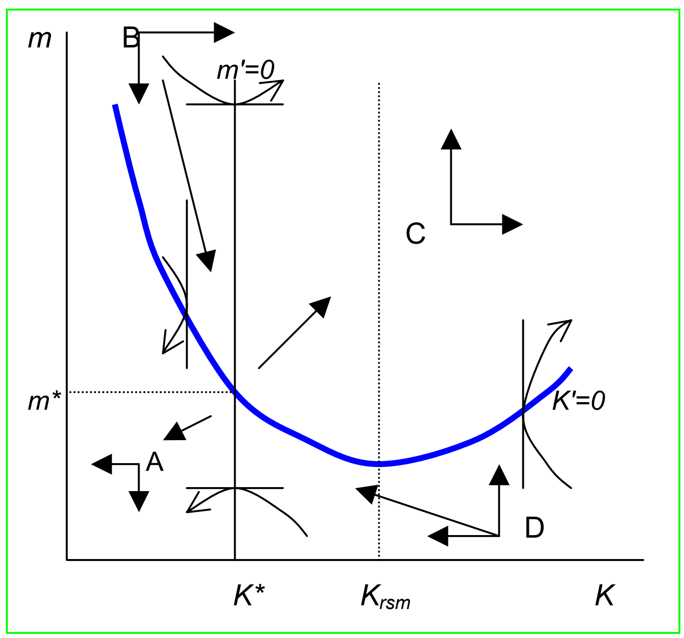
y las ecuaciones del máximo y adjunta son:

[52] $\mathcal{H}_C=U'(C) - m =0$
[53] $\mathcal{H}_K=mg'(K) = \rho m - m'$.

Observar que la concavidad del Hamiltoniano en C y K está garantizada por las formas de $U(C)$ y $g(K)$, y por el hecho de que el valor marginal corriente del stock es positivo. Por consiguiente, las soluciones de las condiciones de primer orden son trayectorias que maximizan la integral objetivo. Como en el modelo previo, la ecuación del máximo [52] dice que en la trayectoria óptima, el valor corriente marginal imputado del stock de capital (peces) es igual a la utilidad marginal del consumo de peces. La ecuación [53] puede ser escrita de la siguiente forma:

[54] $g'(K)=\rho - (m'/m)$

El término $g'(K)$ indica la tasa de crecimiento del stock de peces; se trata del beneficio marginal de esperar, o de postergar consumo por un incremento de tiempo. En un modelo no dinámico, maximizar la riqueza o la utilidad requiere que el beneficio marginal sea igual al costo de oportunidad del capital, que en el presente caso viene dado por la tasa ρ de impaciencia del consumidor. Sin embargo, las decisiones presentes afectan al futuro; el consumo de peces afecta a la tasa porcentual de cambio del valor marginal de los peces. Este costo adicional, una pérdida de capital, $-m'/m$, debe sumarse al costo directo de la espera. (Por supuesto, $-m'/m$ podría ser negativo, compensando a la tasa de impaciencia.)



Sin tener funciones específicas para $U(C)$ y $g(K)$ es imposible obtener una solución analítica. Pero en los modelos autónomos como el presentado, existe un instrumento analítico conocido como diagrama de fases que puede ser usado para caracterizar la solución y derivar resultados de estática comparativa. De las condiciones de máximo [52] $U'(C)=m$. Como $U''<0$, se trata de una función monótona que puede ser invertida, usando una versión global del teorema de la función implícita, con la forma $C=c(m)$. Usándola en la ecuación de estado se obtiene dos ecuaciones diferenciales que determinan el movimiento del modelo:

[55] $K'=g(K) - c(m)$, $K(0)=K_0$
[56] $m'= \rho m - mg'(K)$

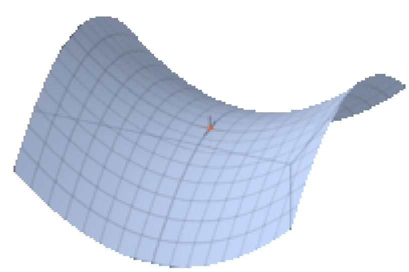
Un estado estacionario tiene lugar cuando los valores de las variables permanecen constantes en el tiempo. Estos valores los determinamos poniendo $K'=m'=0$ en las ecuaciones precedentes, que resultan entonces:

[57] $g(K) - c(m) = 0$
[58] $\rho - g'(K) = 0$

Estas ecuaciones han sido graficadas en la pág. 340. Llamemos K^* y m^* a los valores estacionarios de K y m. Consideremos el lugar geométrico en que $K'=0$, en primer término la ec. [57]. Como $U'(C)>0$ y $U''(C)<0$, $c'(m)=1/U''<0$. Por hipótesis, $g(K)$ comienza elevándose y luego decrece a partir de K_{rsm}. Por consiguiente, $c(m)$ debe elevarse y luego decrecer para mantener la igualdad de [57]. Como $c'(m)<0$, a medida que K se incrementa desde el origen, m debe decrecer y luego elevarse, alcanzando su valor mínimo en el punto en que $g(K)$ es mayor, es decir en K_{rsm}. Por lo tanto, el lugar geométrico de (K,m) donde $K'=0$ es la curva azul con forma de U. Por otro lado, si $m'=0$, la ec. [58] viene representada simplemente por una línea vertical en $K=K^*$. Un hecho importante es que como $g'(K)=0$ en $K=K_{rsm}$ y $g'(K)=\rho>0$, K^* tiene que estar a la izquierda de K_{rsm}. Con una preferencia temporal positiva, el consumo estacionario es desplazado hacia el presente. Y si la tasa de preferencia temporal aumentara (o, en un modelo equivalente, lo hiciera la tasa de interés), el stock del capital estacionario y $m(t)$ caerían, dado que a la izquierda de K_{rsm}, $g'(K)>0$ y $g''(K)<0$.

Lo que no se ha demostrado es que, partiendo de un K_0 arbitrario, la trayectoria óptima convergerá hacia el estado estacionario. Veamos cómo cambian los valores de K y de m en las cuatro áreas del plano de fases entre las curvas $K'=0$ y $m'=0$. En todos los puntos arriba de la curva en U definida por $K'=0$, $K'>0$; por debajo de dicha curva, $K'<0$. En forma similar, a la izquierda de la línea vertical $m'=0$, m' debe ser negativo; a la derecha de esta línea, $m>0$. Por lo tanto, si K y m toman otros valores que no sean (K^*,m^*), se moverán en las direcciones indicadas por los signos de K' y m'. Estas direcciones han sido indicadas por las flechas de la figura. En los puntos A y C, las trayectorias se <u>alejan</u> del estado estacionario. A partir de los puntos B y D, los senderos convergen hacia (K^*,m^*). Por lo tanto el punto estacionario es un punto de ensilladura. La ecuación característica que determina la solución al problema de control contiene una raíz positiva y otra negativa. La solución óptima se obtiene cuando la constante de integración correspondiente a la raíz positiva se fija igual a cero.

Un punto de ensilladura es un punto del dominio de definición de dos variables que resulta un punto estacionario pero no constituye un extremo local. En ese punto, en general, la superficie se parece a un silla curvada hacia arriba en una direción, pero hacia abajo en una dirreción diferente (como una silla de montar). En una dimensión un punto de ensilladura es un punto que constituye tanto un punto estacionario como un punto de inflexión. Como se trata de un punto de inflexión, no se trata de un extremo local (como en la función $y=x^3$ con el punto de ensilladura en 0,0).



Un punto de ensilladura del grafo $z^2=x^2-y^2$ (en color rojo)

Observen que el procedimiento es válido porque el sistema es autónomo. Si el tiempo interviniera en [55] o [56] directamente, es decir si la fecha fuera importante, el mero conocimiento de K y m sería insuficiente para determinar el movimiento de las variables. También habría que especificar la fecha (el valor de t).

Que el estado estacionario sea el óptimo muchas veces es un postulado. Puede justificarse apelando a las propiedades de curvatura de las funciones del modelo. Por ejemplo, si en este caso suponemos que cuando $C \to 0$, $U'(C) \to \infty$, y que si $C \to \infty$, $U'(C) \to 0$, los senderos que converjan a un consumo cero no podrían ser óptimos, ya que el valor marginal de un incremento del consumo para un pequeño valor de C excedería al costo pleno marginal de recolección. También, los senderos que divergen hacia infinito no pueden resultar óptimos si la pesca presenta costos marginales positivos[9].

16. Utilización del capital

Ahora vamos a tratar un modelo de utilización del capital con una función objetivo algo más general. Imaginemos un stock de capital $x(t)$ en el momento t, que permite que una empresa gane un flujo de rentas $R(x)$. Estamos presuponiendo que, dentro de esta función, hay una conducta de la firma que combina a otros insumos (p.ej. trabajo y materias primas) con el stock de capital de tal manera de minimizar los costos totales. Supongamos que el capital se deprecia (o se "evapora") a una tasa lineal bx y que el costo de invertir en capital nuevo viene dado por $c(u)$. La empresa trata de utilizar y adquirir capital de manera de maximizar su riqueza a lo largo de un horizonte infinito. El modelo pasa a ser el siguiente:

$$[60] \text{ Max} \quad \int_0^\infty [R(x(t)) - c(u(t))]\, e^{-rt}\, dt$$

$$\text{sujeto a} \quad x'(t)=u(t) - bx(t), \qquad x(0)=x_0>0$$

Suponemos que existe una solución interior, con $u(t)>0$, y que $x(t)>0$ siempre. La ecuación de estado $x'=u - bx$ define, como es habitual, la dinámica del modelo; nos dice que la tasa de cambio del stock de capital es igual a la tasa de compras de capital nuevo menos la evaporación en t. La variable de control es la tasa de compras de capital nuevo, o sea la tasa de inversión. Otra vez la función objetivo es autónoma (ya que el tiempo solamente interviene en el factor de descuento) y las variables de estado y de control están funcionalmente separadas. Aunque estos supuestos simplificadores limitan un tanto la aplicabilidad del modelo, se justifican porque facilitan enormemente su manejo. Supondremos que $R(x)$ es cóncava y $c(u)$ convexa (por ende, $-c(u)$ es cóncava), de modo que un máximo está asegurado si se cumplen las condiciones de primer orden. Observen que la ecuación de estado es lineal, por lo cual no tiene ningún efecto sobre las condiciones suficientes.

El Hamiltoniano a valores corrientes es

$$\mathcal{H}=R(x) - c(u) + m(u-bx)$$

dando lugar a las ecuaciones del máximo, la adjunta y la ecuación de estado:

$$[61] \quad \mathcal{H}_u= - c'(u) + m = 0$$

$$[62] \quad \mathcal{H}_x= R'(x) - bm = r\, m - m'$$

$$[63] \quad x'(t) = u(t) - bx(t)$$

La ec. [61] dice, como en los modelos previos, que el valor marginal corriente del stock de capital, $m(t)$, es igual al valor corriente de los costos marginales de invertir en equipo nuevo, $c'(u)$. La ec. adjunta [62] es más fácil de ser interpretada escribiéndola

[9] Otra justificación que suele darse de las soluciones estacionarias es que la conducta estable parece ser empíricamente más relevante que la conducta explosiva. El mundo no parece facilitar ejemplos de divergencia del capital a infinito, y la extinción de los recursos no es común bajo derechos de propiedad bien definidos.

$$R'(x) + m' = (b + r)\, m$$

El segundo miembro es el costo de oportunidad de los fondos, consistentes en la tasa de depreciación del valor del stock de capital x en el momento t más el rendimiento de la inversión alternativa, r. En la trayectoria que maximiza la riqueza, este costo de oportunidad marginal debe ser igual a la tasa marginal a la que son producidos los beneficios, que derivan de dos fuentes: los beneficios (marginales) instantáneos de incrementar el capital $R'(x)$, más las ganancias de capital $m'(t)$ (es decir, la tasa de cambio del valor marginal del capital que tiene lugar en t, que deriva del uso futuro maximizador de la riqueza del stock de capital[10]).

La ecuación [62] también puede ser interpretada de esta manera, multiplicando por $e^{-(b+r)t}$ y escribiéndola

$$e^{-(b+r)t}[m' - (b+r)m] = - e^{-(b+r)t}R'(x)$$

Integrando m. a m. y suponiendo que $R'(x)$ está acotada superiormente, de modo que la función integral evaluada en el límite superior sea cero,

$$e^{-(r+b)t}m = \int_t^{\infty} e^{-(r+b)s}R'(x(s))\, ds$$

o, multiplicando todo por $e^{(r+b)t}$,

$$m(t) = \int_t^{\infty} e^{-(r+b)(s-t)}\, R'(x(s))\, ds \tag{64}$$

Esta ecuación [64] expresa que el valor marginal corriente (en t) del capital es igual a los beneficios futuros descontados al momento t, donde la tasa de interés usada para el descuento es la suma de la tasa real de interés r, y de la tasa de depreciación b, lo cual refleja el verdadero costo de oportunidad de utilizar ese capital en particular. Finalmente, combinando esta ecuación con la ec. [61] obtenemos la conclusión de que los costos marginales son iguales a estos beneficios marginales:

$$c'(u(t)) = \int_t^{\infty} e^{-(r+b)(s-t)}\, R'(x(s))\, ds \tag{65}$$

Veamos si este problema tiene alguna soluciòn estacionaria y cuáles serían sus propiedades. Usaremos un esquema diagramático similar al utilizado previamente e investigaremos trayectorias en el plano de fase (x,m) que satisfacen las condiciones de primer orden.

Como el costo marginal es estrictamente creciente $(c''>0)$ eliminamos a la variable de control u invirtiendo $c'(u)=m$; luego, se tiene $u=h(m)$, donde $h'(m)=1/c''>0$. Sustituyendo en la ec. de estado:

$$x'=h(m) - bx. \tag{66}$$

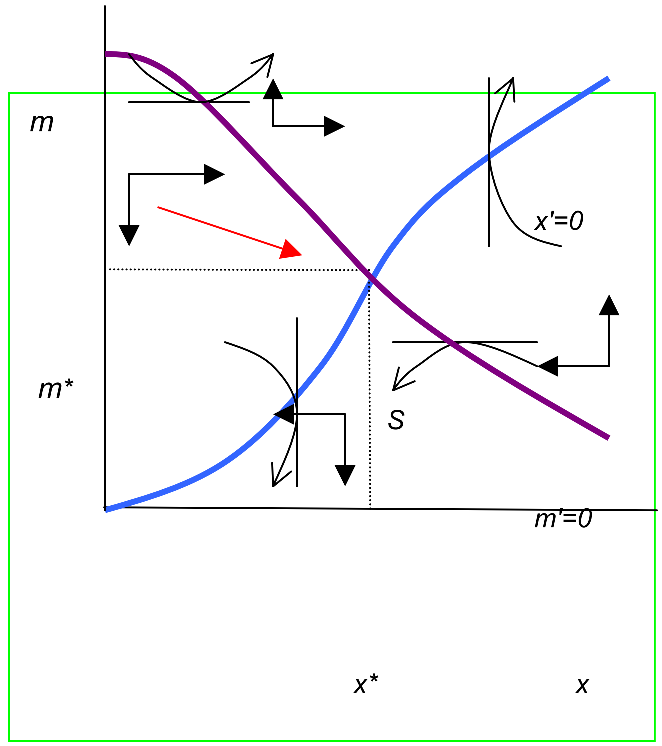
Esta ecuación [66] y la adjunta, [62]

[10] Como en todos los procesos dinámicos (y ésta es la característica por la que son dinámicos), el valor de las decisiones tomadas hoy tiene dos componentes: algunos beneficios netos inmediatos más la suma de los beneficios netos futuros.

$$R'(x) + m' = (b+r)\, m$$

Son dos ecuaciones diferenciales en *x* y *m*. El estado estacionario se produce cuando $x'=m'=0$:

[67] $h(m)= bx$
[68] $R'(x) = (b+r)\, m$



En la figura adjunta podemos ver estas ecuaciones. Como $c'(0)=0$ y $c''>0$, la ec. [67] pasa a través del origen y tiene pendiente positiva. La intersección de las dos curvas es el estado estacionario y denotado como *S*; x^* y m^* son los valores estacionarios de *x* y *m*. La siguiente pregunta es si estas trayectorias son consistentes con las ecuaciones de primer orden y se acercan en forma asintótica a *S*. Como *h(m)* es creciente con *m*, en los puntos ubicados por arriba de la línea, $x'=h(m)–bx>0$; también $x'<0$ por debajo de la línea. Además, como $R''(x)<0$, $R'(x)$ es decreciente con *x.* Luego, [68] tiene pendiente negativa en el plano de fases. Por arriba de esta curva, $m'=(b+r)m – R'(x)>0$; luego, *m* es creciente por arriba de esta curva y decreciente por debajo.

El efecto combinado de estos movimientos se indica mediante la dirección de las flechas de color rojo de la figura (solamente ha sido dibujada <u>una</u> trayectoria que arranca en el N.O. de *S*). Las trayectorias que convergen al estado estacionario están arrancando ya sea en el “noroeste” (pero por debajo de $m'=0$) o en el “sudeste” (pero por arriba de $m'=0$) de *S*. Las otras trayectorias son inestables, es decir tienden a infinito o a cero. El estado estacionario es un punto de ensilladura. Las trayectorias divergentes pueden ser rechazadas por no haber sido empíricamente observadas o excluídas por las propiedades de curvatura de *R(x)* y *c(u)*, es decir, $R'(x)\to\infty$ cuando $x\to 0$, etc.

Un procedimiento habitual usado para confirmar las propiedades del estado estacionario, cuando las ecuaciones son no lineales (como en nuestro caso), consiste en aproximar las ecuaciones diferenciales *x'* y *m'* en torno al estado estacionario, utilizando los términos de primer orden de una serie de Taylor. Haciendo esto, nos queda

$$x'= –b(x–x^*) + h'(m)\,(m–m^*)$$
$$m'= –R''(x^*)\,(x–x^*) + (r + b)\,(m–m^*)$$

Si consultamos la ec. [33] vemos que las raíces características son

$$k_1, k_2=½ \{r\pm [(r+2b)^2– 4h'(m^*)\, R''(x^*)]^{½}\}$$

Como $h'>0$ y $R''<0$, las raíces son reales, y de signo opuesto (el término bajo el radical es mayor que *r*), siendo negativa la raíz de mayor valor absoluto, con lo cual el estado estacionario es un punto de ensilladura dentro de cierto entorno.

17. Dinámica comparativa

Una cuestión más difícil es la de apreciar el efecto de un cambio de un parámetro, no ya sobre el valor del estado estacionario del stock de capital como en los modelos estáticos, sino sobre toda la trayectoria de las variables de control o de estado. Estos temas pertenecen al campo de estudio de la dinámica comparativa. Una aplicación puede ser apreciada mediante el ejemplo anterior. Resulta claro por las ec. [67] y [68] que un aumento de la tasa de interés deja sin cambios a la primera ecuación, pero que traslada a la segunda $(m'=0)$ hacia el origen. El resultado es que disminuye el stock de capital del estado estacionario, $\partial x^*/\partial r<0$. Como el lugar geométrico de los puntos $x'=0$ tiene una pendiente positiva, también se tendrá $\partial m^*/\partial r<0$ y, por la condición de máximo $c'(u)=m$, $\partial u^*/\partial r<0$. Estos resultados son los esperados. Si aumenta el costo de oportunidad de los fondos en el presente, posponer consumo al futuro (por invertirse en capital nuevo) debería disminuir, lo que resultará en un stock final de capital más reducido. Un aumento de la tasa de depreciación b producirá efectos más ambiguos, porque interviene en la ec. [68] $(m'=0)$ de la misma forma que t, pero también interviene en la ec. [67] $(x'=0)$. Como $h'(m)>0$, un aumento de b traslada la línea $x'=0$ hacia arriba, por lo cual x^* debe reducirse, pero el cambio de m^* y de u^* es ambiguo.

Para modelos "autónomos" se dispone de un resultado sobre los efectos de cambios de la tasa de interés (o de preferencia temporal) sobre el stock de capital[11]:

Teorema Sea un modelo de control óptimo general de horizonte infinito,

Maximizar $\int_{t_0}^{\infty} f(x,u,\alpha)\, e^{-rt}\, dt$

sujeto a $x'=g(x,u)$, $x(0)=x_0$, $u \in U$

donde U es el conjunto de control y $\alpha>0$ es un parámetro que no depende del tiempo. Se supone que existe una solución óptima que converge al estado estacionario del modelo. Indicamos a este estado estacionario como $(x^*(\alpha,r), u^*(\alpha,r))$. Luego:

1. La respuesta de $x^*(\alpha,r)$ y $u^*(\alpha,r)$ a cambios de la tasa de interés está dada por

[69ª] $\operatorname{sgn}(\partial x^*/\partial r) = \operatorname{sgn}(f_u^* g_u^*)$
[69^b] $\operatorname{sgn}(\partial u^*/\partial r) = -\operatorname{sgn}(f_u^* g_x^*)$

2. Si el parámetro α interviene en f de tal forma que solamente está asociado con x, e.d. $f_{u\alpha}\equiv 0$, el efecto de un cambio de α viene dado por

[70ª] $\operatorname{sgn}(\partial x^*/\partial \alpha)= \operatorname{sgn}(f_{x\alpha}^*)$
[70^b] $\operatorname{sgn}(\partial u^*/\partial \alpha)= -\operatorname{sgn}(g_u^* g_x^* f_{x\alpha}^*)$

3. Si el parámetro α interviene en f de tal forma que solamente está asociado con u, e.d. $f_{x\alpha}\equiv 0$, el efecto de un cambio de α viene dado por

[71^a] $\operatorname{sgn}(\partial x^*/\partial \alpha) = \operatorname{sgn}(f_{u\alpha}^* (r - g_x^*) g_u^*)$
[71^b] $\operatorname{sgn}(\partial u^*/\partial \alpha) = -\operatorname{sgn}(f_{u\alpha}^* (r - g_x^*) g_x^*)$

En nuestro ejemplo, $f_u= -c'(u)<0$ y $g_u=1$; por lo tanto, $\partial x^*/\partial r<0$. Este teorema tiene una aplicación amplia en los modelos de extracción de recursos. En forma típica, la función integrando $f(x,u)$ mide algún tipo de beneficios (o valores negativos de los costos) crecientes en u, de tal forma que $f_u>0$ y la ecuación de estado es del tipo $x'=h(x)-u$, con lo cual $g_u<0$ (p.ej. en los modelos de recolección de recursos renovables). Luego en este tipo de modelos se encontrará que $\partial x^*/\partial r<0$.

---

[11] V. Caputo, Michael R. Foundations of Dynamic Economic Analysis: Optimal Control Theory and Applications. Cambridge University Press, 2005.

La dinámica comparativa estudia la respuesta de trayectorias completas $x(t)$, $u(t)$ y $\lambda(t)$ (o $m(t)$) a medida que cambian los parámetros del modelo. El procedimiento a seguir es parecido al de la estática comparativa, en el sentido de que las soluciones $x(t,r,b)$, $m(t,r,b)$ se sustituyen en el sistema de ecuaciones diferenciales que define la trayectoria de x y m en el modelo ([62] y [66]). Luego estas ecuaciones simultáneas son diferenciadas con respecto a cierto parámetro, dando lugar a lo que se conoce como un sistema variacional de ecuaciones diferenciales. A veces es posible calcular el cambio de la trayectoria basándose en las propiedades de curvatura de las funciones del modelo. Sin embargo, el análisis en dos dimensiones ya no es posible con más de una variable de estado.