Dualidad, integrabilidad, preferencia revelada e incertidumbre

En esta unidad, se exploran algunos temas adicionales en la teoría del consumidor. Se comienza con la **teoría de la dualidad**, un tema que creció en forma dramática en los últimos tiempos, e investigamos de manera más completa los vínculos entre utilidad, utilidad indirecta, y funciones de gasto. Luego se considera el "**problema de integrabilidad**" clásico y preguntamos qué condiciones debe satisfacer una función de los precios y del ingreso a fin de que se la califique como una función de demanda de algún consumidor maximizador de utilidad. La respuesta a esta pregunta proporcionará una caracterización completa de las restricciones que la teoría asigna al comportamiento de demanda observable. A continuación se examinará la "**preferencia revelada**", un enfoque alternativo de la teoría de la demanda. Por último, concluiré el tratamiento del consumidor individual examinando el problema de elección en condiciones de **incertidumbre**.

1) *Dualidad: Una Mirada*

Como hemos visto, las soluciones a los problemas de maximización de utilidad y los problemas de minimización del gasto son, en cierto sentido, lo mismo. Esta idea se expresa formalmente en el teorema 4.9. La Figura de página 28 de la clase anterior proporciona otra idea de cómo la idea de dualidad está presente en la derivación de las funciones de demanda marshallianas e hicksianas. En esta sección, vamos a explorar más las conexiones entre utilidad directa, utilidad indirecta y funciones de gasto. Vamos a demostrar que aunque nuestra teoría del consumidor, como es natural, se desarrolló a partir de axiomas de preferencias, una teoría equivalente podría haberse desarrollado comenzando con axiomas sobre la conducta de gasto. De hecho, vamos a demostrar que toda función de los precios y la utilidad que tenga todas las propiedades de una función de gasto es, en realidad, una función de gasto, es decir, hay una función de utilidad con buen comportamiento que la genera. Aunque este resultado es de algún interés en sí mismo, su significado real se hace evidente cuando se utiliza para caracterizar completamente las implicancias observables de nuestra teoría del comportamiento de la demanda del consumidor. Esta caracterización extraordinaria se sigue desde el llamado "teorema de integrabilidad" que se recoge en la siguiente sección. Dada la importancia de este resultado, esta sección justificadamente puede ser vista como preparatoria de la siguiente.

Gasto y Preferencias del Consumidor

Consideren la posibilidad de una función de los precios y de la utilidad, $E(\mathbf{p}, u)$, que puede o no ser una función de gasto. Supongamos ahora que E satisface las propiedades de las funciones de gasto 1 a 7 del Teorema 4.7, de manera que es continua, estrictamente creciente, y no acotada superiormente en u, así como creciente, homogénea de grado uno, cóncava, y diferenciable en $\mathbf{p}$. Por lo tanto, E 'parece' una función de gasto. *Vamos a demostrar que E debe ser entonces una función de gasto*. En concreto, vamos a demostrar que debe existir una función de utilidad en $\mathbf{R}^n_+$ cuya función de gasto es precisamente E. De hecho, se hallará un procedimiento explícito para la construcción de esta función de utilidad.

Para ver cómo funciona la construcción, elíjase $(\mathbf{p}^o, u^o) \in \mathbf{R}^n_{++} \times \mathbf{R}_+$, y evalúese E allí para obtener el número $E(\mathbf{p}^o, U^o)$. Ahora utilícese este número para construir el "sub-espacio" (cerrado) en el conjunto de consumo

$$A(\mathbf{p}^o, u^o) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n_+ \mid \mathbf{p}^o\mathbf{x} \geq E(\mathbf{p}^o, u^o)\}$$

ilustrado en la figura 5.1(a). Nótese que $A(p^o,u^o)$ es un conjunto convexo cerrado que contiene todos los puntos que están en y arriba del híper-plano $p^o x = E(p^o,u^o)$. Ahora elegimos distintos precios p^1 manteniendo fija u^o, y construimos el conjunto convexo cerrado $A(p^1,u^o) \equiv \{x \in R_{n+} \mid p^1 \cdot x \geq E(p^1, u^o)\}$. Imaginen que procedemos de esta forma con todos los precios $p \gg 0$ y que formamos la intersección infinita

(5.1) $A(u^o) \equiv \bigcap_{p \gg 0} A(p, u^o) = \{x \in R_{n+} \mid p \cdot x \geq E(p, u^o) \text{ para todo } p \gg 0\}.$

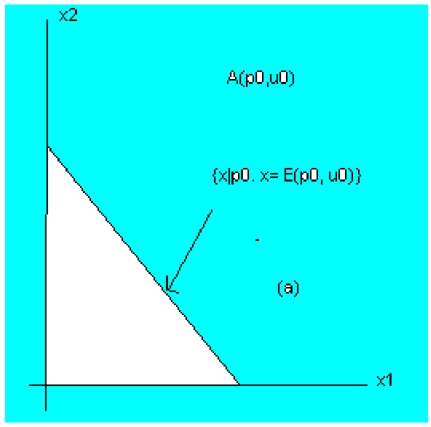


Figura 5.1(a) Semi-espacio cerrado

La figura en color verde de 5.1(b) ilustra la intersección de un número finito de $A(p,u^o)$, y proporciona cierta intuición sobre cómo sería $A(u^o)$. Es simple imaginar que, a medida que se consideran más precios, más conjuntos se incorporarán a la intersección y el área coloreada de verde será muy parecida al conjunto superior de cierta función cuasi-cóncava a valor real. Puede sospecharse que por consiguiente estos conjuntos pueden ser usados para construir algo similar a una función de utilidad directa que represente preferencias agradablemente convexas y monótonas. Así surge del siguiente teorema.

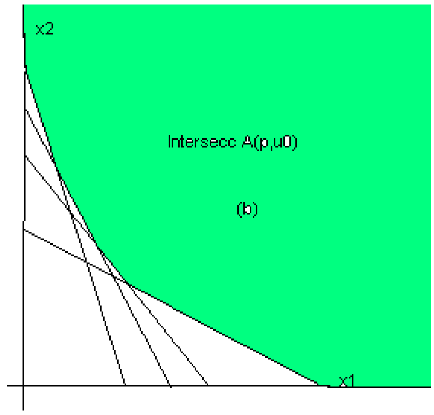


Figura 5.1(b) Intersección de una colección Finita de conjuntos A(p,uo)

<u>Teorema 5.1</u> (Construcción de una Función de utilidad a partir de una Función de Gasto) Sea E: $\mathbf{R}_{n++} X R_+$ que satisface las propiedades 1 a 7 de una función de gasto como en el teorema 4.7. Ahora fijamos A (u) como en la ecuación (5.1). Luego la función u: $\mathbf{R}_{n+} \to R_+$ dada por $u(\mathbf{x}) \equiv \max \{u \geq 0 \mid x \in A(u)\}$ es creciente, no acotada superiormente y cuasi-cóncava.

La estrategia de demostración consiste en mostrar que $u(\mathbf{x})$ tal como está definida en el enunciado es una función de utilidad – esto es, que está *bien definida,* que es una función *creciente*, que *no está acotada superiormente*, y que es *cuasi-cóncava* – y éste es el contenido de este teorema 5.1.

<u>*Demostración*</u> Por definición de $A(u)$, podemos escribir $u(\mathbf{x})$ de la forma siguiente:

$$u(\mathbf{x}) = \max. \{u \geq 0 \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq E(\mathbf{p}, u) \ \forall \mathbf{p} \gg 0\}$$

En primer lugar debemos demostrar que $u(\mathbf{x})$ está <u>*bien definida*</u>. Es decir, que el conjunto $\{u \geq 0 \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq E(\mathbf{p}, u) \ \forall p \gg 0\}$ contiene un elemento máximo. Esbozamos la demostración: primero, este conjunto – que podemos llamar $B(\mathbf{x})$ - debe estar acotado superiormente porque $E(\mathbf{p}, u)$ no está acotada superiormente y es creciente en u. Luego, $B(\mathbf{x})$ tiene una cota máxima y por consiguiente una mínima cota superior, $\hat{u}$. Debe mostrarse que $\hat{u} \in B(\mathbf{x})$. Pero esto se sigue de que $B(\mathbf{x})$ es cerrado.

Habiendo demostrado que $u(\mathbf{x})$ está bien definida, consideremos ahora su propiedad de ser creciente. Sea $\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{x}^2$. En tal caso,

(P.1) $\quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^2 \ \forall \mathbf{p} \gg \mathbf{0}.$

Por la definición de $u(\mathbf{x}^2)$, se tiene

(P.2) $\quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^2 \geq E(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^2)) \ \forall \mathbf{p} \gg \mathbf{0}.$

Las dos desigualdades *(P.1)* y *(P.2)* implican

(P.3) $\quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^1 \geq E(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^2)) \ \forall \mathbf{p} \gg \mathbf{0}.$

En consecuencia, $u(\mathbf{x}^2)$ satisface la condición: $\mathbf{x}^1 \in A(u(\mathbf{x}^2))$. Pero $u(\mathbf{x}^1)$ es el máximo u que satisface $\mathbf{x}^1 \in A(u)$. Luego, $u(\mathbf{x}^1) \geq u(\mathbf{x}^2)$, lo que demuestra que *u(x) es creciente*.

La no acotación de $u(.)$ en $\boldsymbol{R}_{n+}$ puede mostrarse apelando al carácter creciente, cóncavo, homogéneo y diferenciable de $E(.)$ en $\mathbf{p}$, y al hecho de que su dominio en u es todo $\boldsymbol{R}_{n+}$. No doy la prueba de esta propiedad, que es sencilla.

Para mostrar que *u (.) es cuasi-cóncava*, debemos mostrar que para todo $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ y cualquier combinación convexa $\mathbf{x}^t$, $u(\mathbf{x}^t) \geq \min [u(\mathbf{x}^1), u(\mathbf{x}^2)]$. Para verlo, supóngase que $u(\mathbf{x}^1) = \min. [u(\mathbf{x}^1), u(\mathbf{x}^2)]$. Como E es estrictamente creciente en u, sabemos que $E(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^1)) \leq E(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^2))$, y que por tanto

(P.4) $\quad tE(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^1)) + (1-t)E(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^2)) \geq E(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^1)) \ \forall t \in [0, 1].$

Por las definiciones de $u(\mathbf{x}^1)$ y $u(\mathbf{x}^2)$, se sabe que

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^1 \geq E(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^1)) \ \forall \mathbf{p} \gg \mathbf{0},$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^2 \geq E(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^2)) \ \forall \mathbf{p} \gg \mathbf{0}.$$

Multiplicando por $t \geq 0$ y $(1-t) \geq 0$ respectivamente, sumando y usando *(P.4)*:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^t \geq E(\mathbf{p}, u(\mathbf{x}^1)) \ \forall \mathbf{p} \gg 0 \text{ y } t \in [0, 1].$$

En consecuencia, por la definición de $u(\mathbf{x}^t)$, $u(\mathbf{x}^t) \geq u(\mathbf{x}^1) = \min. [u(\mathbf{x}^1), u(\mathbf{x}^2)]$ como se quería probar. ▮

Un segundo resultado consiste en mostrar que E es, de hecho, la función de gastos generada por $u(\mathbf{x})$. Éste es el teorema 5.2.

Teorema 5.2 (La Función de Gasto de la Función de Utilidad derivada es, precisamente, E) Sea $E(\mathbf{p}, u)$ *definida sobre* $\boldsymbol{R}_{n++} X R_+$ *una función que satisface las propiedades 1 a 7 del teorema 4.7 y sea* $u(\mathbf{x})$ *derivada a partir de E como en el teorema 5.1. Luego, para todos los precios y utilidades no negativos,* $E(\mathbf{p}, u) = \min_x \mathbf{p} . \mathbf{x}$ *sujeto a* $u(\mathbf{x}) \geq u$*. Esto es,* $E(\mathbf{p}, u)$ *es* *la función de gasto generada por la función de utilidad derivada u(**x**).* (Este teorema no lo vamos a demostrar.)

Estos dos últimos teoremas nos dicen que en cualquier momento podemos escribir una función de los precios y de la utilidad que satisfaga las propiedades 1 a 7 del Teorema 1.7, que será una función de gasto legítima para algunas preferencias que satisfacen muchos de los axiomas usuales. Podremos, por supuesto, a continuación, diferenciar esta función con respecto a los precios de los productos para obtener el sistema asociado de demandas hicksianas. Si las preferencias subyacentes son continuas y estrictamente crecientes, podremos invertir la función u, obtener la función de utilidad indirecta, aplicar la identidad de Roy, y derivar el sistema de demandas marshallianas también. Cada vez, se nos asegura que los sistemas de demanda resultantes poseen todas las propiedades requeridas por la maximización de la utilidad. A los propósitos teóricos, luego, cabe hacer una elección. Se puede comenzar con una función de utilidad directa y proceder resolviendo los problemas de optimización adecuados para derivar las demandas hicksianas y marshallianas. O se puede comenzar con una función de gasto y proceder a obtener el sistema de demanda de consumo por vía de inversión, un camino generalmente más fácil, y una simple diferenciación.

<u>Convexidad y monotonía</u>

Ustedes recordarán que después de formular el axioma de convexidad de las preferencias, se dio a entender que *el contenido predictivo de la teoría sería el mismo con o sin él*. Este es un momento oportuno para apoyar esa afirmación y también investigar la importancia de la hipótesis de monotonía.

Para el presente análisis, supongan solamente que $u(\mathbf{x})$ es continua. Por lo tanto, $u(\mathbf{x})$ no tiene por qué ser ni creciente ni cuasi-cóncava.

Sea $e(\mathbf{p}, u)$ la función de gasto generada por $u(\mathbf{x})$. Como se sabe, la continuidad de $u(\mathbf{x})$ es suficiente para asegurar que $e(\mathbf{p}, u)$ esté bien definida. Aún más, $e(\mathbf{p}, u)$ es continua.

Dando un paso adicional, consideren la función de utilidad (llamémosla $w(\mathbf{x})$), generada por $e(.)$ de la forma ahora familiar, es decir, $w(\mathbf{x}) \equiv max. \{u \geq 0 \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq e(\mathbf{p}, u) \ \forall p \gg 0\}$.

Un vistazo a la demostración del Teorema 5.1 demuestra que $w(\mathbf{x})$ es creciente y cuasi cóncava. Por lo tanto, independientemente de si $u(\mathbf{x})$ es cuasi cóncava o creciente o no, $w(\mathbf{x})$ será a la vez cuasi cóncava y creciente. Está claro, pues, que $u(\mathbf{x})$ y $w(\mathbf{x})$ no tienen por qué coincidir. Entonces, ¿cómo se relacionan?

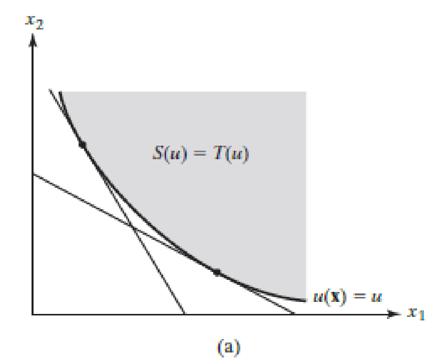


Figura 5.2(a) Dualidad gasto/utilidad

Es fácil comprobar que $w(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{x})$ para todos los $\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}_{n+}$. Esto surge a causa de que por definición de $e(\mathbf{x})$, se tiene que $e(\mathbf{p}, u(\mathbf{x})) \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \ \forall \mathbf{p} \gg \mathbf{0}$. Recordando la definición de $w(\mathbf{x})$ se tiene que $w(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{x})$ para todos los $\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}_{n+}$.

Luego, para todo $u \geq 0$, el conjunto superior de nivel u de $u(\mathbf{x})$, llamémoslo $S(u)$, estará contenido en el conjunto superior de nivel u de $w(\mathbf{x})$, llamémoslo $T(u)$. Más aún, como $w(\mathbf{x})$ es cuasi-cóncava, $T\ (u)$ será convexo. Ahora véase la Figura 5.2(a). Si $u\ (\boldsymbol{x})$ fuera creciente y cuasi-cóncava, la frontera de $S\ (u)$ daría lugar a curvas de indiferencia con pendiente negativa, convexa como la curva $u\ (\boldsymbol{x}) = u$ de esa figura. Nótese que cada punto en esa frontera es la canasta minimizadora para lograr la utilidad u para algún vector de precios $\boldsymbol{p}\gg\boldsymbol{o}$. Por consiguiente, si $u\ (\boldsymbol{x^o})= u$, luego para algún vector $\boldsymbol{p^o}\gg\boldsymbol{o}$, se tendrá $e\ (\boldsymbol{p^o}, u)= \boldsymbol{p^o}.\boldsymbol{x^o}$. Pero como $e(.)$ es estrictamente creciente en u, esto significa que $w\ (\boldsymbol{x^o})\leq u= u(\boldsymbol{x^o})$. Como siempre se cumple que $w\ (\boldsymbol{x^o})\geq u(\boldsymbol{x^o}),\ \boldsymbol{x})=u\ (\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x}$. Lo cual no es una sorpresa a la luz de los teoremas 5.1 y 5.2 y la cuasi-concavidad y el carácter creciente de $u\ (\boldsymbol{x})$, que son los supuestos.

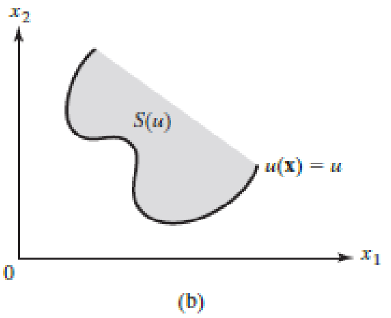


Figura 5.2(b) Dualidad gasto-utilidad

El caso de la figura 5.2(b) es más interesante. Allí, la función $u\ (\boldsymbol{x})$ no es ni creciente ni cóncava. Como antes, la frontera de $S\ (u)$ corresponde a la curva de indiferencia $u\ (\boldsymbol{x})=u$.

Ahora, observen que hay canastas de la curva de indiferencia que *nunca minimizarán el gasto requerido para alcanzar el nivel de utilidad u* – y para esto no hace falta tener en cuenta el vector de precios. Las líneas más gruesas de la Figura 5.2(c) indican las canastas que sí minimizan el gasto para algún vector de precios positivos. Para las canastas en los segmentos gruesos de la Figura 5.2(c), se tiene como antes $w\ (\boldsymbol{x})= u\ (\boldsymbol{x})$. Pero como $w\ (\boldsymbol{x})$ es cuasi-cóncava y creciente, la curva de indiferencia debe dibujarse como en 5.2 (d). Luego, $w\ (\boldsymbol{x})$ difiere de $u\ (\boldsymbol{x})$ tan sólo en lo requerido para que resulte estrictamente creciente y cuasi-cóncava.

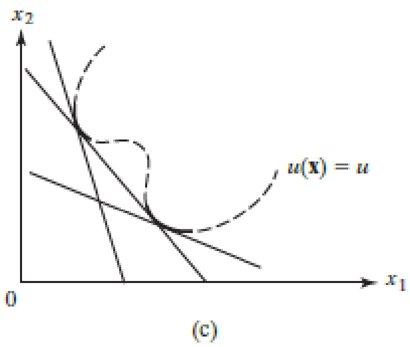


Figura 5.2(c) Dualidad gasto-utilidad

Dada esta relación entre sus curvas de indiferencia, resulta claro que si una canasta maximiza $u\ (\boldsymbol{x})$ sujeto a $\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}\leq y$, entonces esa misma canasta maximiza $w\ (\boldsymbol{x})$ sujeto a $\boldsymbol{px}\leq y$. (¡A tener cuidado, la recíproca es falsa!)

Por consiguiente, toda conducta observable de demanda que puede ser generada por una función de utilidad (como $u(\boldsymbol{x})$) también puede ser generada por una función de utilidad creciente y cuasi-cóncava (como $w\ (\boldsymbol{x})$).

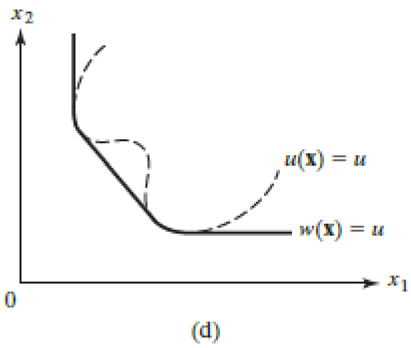


Figura 5.2(d) Dualidad gasto-utilidad

Es en este sentido que los supuestos de monotonía y de convexidad de las preferencias no tienen consecuencias observables en nuestra teoría de la demanda de consumo.

Preferencias del consumidor y Utilidad Indirecta

Hemos visto cómo la dualidad nos permite trabajar desde la función de gasto a la función de utilidad directa. Como función de gasto y funciones de utilidad indirectas están tan estrechamente relacionadas (o sea, son inversas entre sí), no debería sorprender que también sea posible comenzar con una función de utilidad indirecta y recuperar la función de utilidad directa subyacente. En esta sección, se describe la dualidad entre las funciones de utilidad directa e indirecta.

Supongan que $u\,(\mathbf{x})$ genera la función de utilidad indirecta $v\,(\mathbf{p}, y)$. Luego, es válido por definición que para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{n+}$, $v\,(\mathbf{p}, \mathbf{p}.\mathbf{x}) \geq u\,(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{p} \gg \mathbf{0}$. Además, típicamente habrá algún vector de precios para el que la desigualdad se transforme en igualdad. En tal caso, evidentemente podemos escribir

$$(5.2) \qquad u\,(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{R}n_{++}} v\,(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}).$$

Por lo tanto, (5,2) proporciona un medio de recuperar la función de utilidad $u\,(\mathbf{x})$ a partir del conocimiento de sólo la función de utilidad indirecta que genera. El siguiente teorema da una versión de este resultado, aunque las hipótesis no son los más débiles posibles.

Teorema 5.3 *(Dualidad entre utilidad Directa e Indirecta) Supongamos que* $u\,(\mathbf{x})$ *es diferenciable y cuasi-cóncava en* $\mathbf{R}_{n++}$ *con derivadas parciales estrictamente positivas allí. Entonces, para todo* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{n++}$, $v\,(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$, *la función de utilidad indirecta generada por* $u(\mathbf{x})$, *alcanza un mínimo en* $\mathbf{p}$ *en* $\mathbf{R}_{n++}$, *y*

$$(T.1) \qquad u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{R}n_{++}} v\,(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}).$$

Demostración De acuerdo con la discusión precedente, el miembro del lado izquierdo de *(T.1)* nunca es superior al miembro del lado derecho. Luego, será suficiente demostrar que para todo $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$, hay algún $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ tal, que

$$(P.1) \qquad u(\mathbf{x}) = v\,(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}).$$

Luego, sea $\mathbf{x^o} \gg \mathbf{0}$ y $\mathbf{p^o} = \nabla u\,(\mathbf{x^o})$. Por hipótesis, $\mathbf{p^o} \gg 0$. Poniendo $\lambda^o = 1$, e $\mathbf{y^o} = \mathbf{p^o} \cdot \mathbf{x^o}$, se tendrá

$$(P.2) \qquad \partial u\,(\mathbf{x^o})/\partial x_i - \lambda_o p^o{}_i = 0 \qquad i = 1\ldots n, y$$

$$(P.3) \qquad \mathbf{p^o}.\mathbf{x^o} = y.$$

Luego, $(\mathbf{x^o}, \lambda_o)$ satisfacen las condiciones de primer orden del problema del consumidor, de máx. $u\,(\mathbf{x})$ sujeto a $\mathbf{p^o}.\ \mathbf{x} = y^o$. Además, por el teorema 5.4, como $u\,(\mathbf{x})$ es cuasi-cóncava, estas condiciones bastan para garantizar que $\mathbf{x^o}$ resuelve el problema del consumidor cuando $\mathbf{p} = \mathbf{p}^o$ e $y = y^o$. Por lo tanto, $u\,(\mathbf{x^o}) = v\,(\mathbf{p^o}, y^o) = v\,(\mathbf{p^o}, \mathbf{p^o} \cdot \mathbf{x^o})$. ▮

De vez en cuando, es conveniente trabajar con las funciones de demanda en forma inversa. En este caso, se ve al precio de demanda del bien i en función de las cantidades del bien i y de todos los demás bienes y escribimos $\mathbf{p}_i = p_i(\mathbf{x})$. La teoría de la dualidad ofrece una forma sencilla de obtener el sistema de funciones inversas de demanda de los consumidores, como muestra el siguiente teorema, donde nos limitaremos a suponer diferenciabilidad cuando sea necesario.

Teorema 5.4 (Teorema de Hotelling y Wold sobre dualidad de la función inversa de demanda) Sea u ($\mathbf{x}$) la función de utilidad directa del consumidor. Entonces la función de demanda inversa del bien i asociada con un ingreso y=1 viene dada por

$$p_i(\mathbf{x}) = (\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i) / \sum_{j=1}^{n} x_j(\partial u(\mathbf{x})/\partial x_j)$$

Por definición de $\mathbf{p}$ ($\mathbf{x}$) se tiene que $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{p}(\mathbf{x}), 1)$ y $\mathbf{p}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 1$ para todo $\mathbf{x}$. Luego, por las consideraciones previas al teorema 5.3 y el argumento de normalización,

(P.1) $u(\mathbf{x}) = v(p(\mathbf{x}), 1) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n_{++}} v(\mathbf{p}, 1)$ *sujeto a* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = 1$.

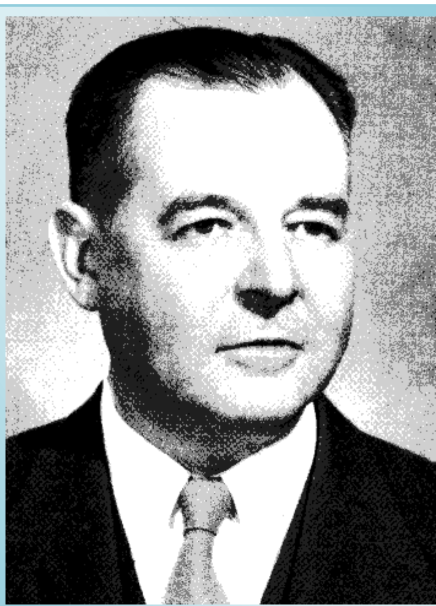
Ahora veamos el Lagrangiano asociado con este problema,

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \lambda) = v(p, 1) - \lambda(1 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}).$$

Si aplicamos el teorema de la envolvente, tenemos

(P.2) $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i = \partial \mathcal{L}(\mathbf{p}^*, \lambda^*)/\partial x_i = \lambda^* p^*_i, \; i = 1,\dots, n.$

donde $\mathbf{p}^*=p(\mathbf{x})$ y λ^* es el valor óptimo del multiplicador de Lagrange. Suponiendo que $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i > 0$, se obtiene que $\lambda^* > 0$.



[Harold Hotelling](#) (1895-1973) tuvo un rol descollante en economía matemática. Escribió [The Economics of Exhaustible Resources](#) (1931)

Multiplico ahora (P.2) por x_i y sumo con respecto a i:

(P.3) $\sum_{i=1}^{n} x_i \, \partial u(\mathbf{x})/\partial x_i = \lambda^* \sum_{i=1}^{n} p^*_i x_i.$

$= \lambda^* \sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbf{x}) x_i$

$= \lambda^*.$

El resultado deseado se obtiene combinando (P.2)-(P.3) y recordando que $p^*_i = p_i(\mathbf{x})$. ∎

Econometrista y estadístico noruego
[Herman Ole Andreas Wold](#) (1908-1992)

Ejercicio Supóngase que tratamos con un consumidor que tiene una función de utilidad CES. Demuestren que, en ese caso, las funciones de demanda inversas están dadas por:

$$p_1 = x_1^{(\rho-1)} [x_1^{\rho} + x_2^{\rho}]^{-1}$$

$$p_2 = x_2^{(\rho-1)} [x_1^{\rho} + x_2^{\rho}]^{-1}.$$

2) *Integrabilidad*

En el capítulo anterior, mostramos que la función de demanda de un consumidor que maximiza utilidad debe satisfacer la homogeneidad de grado cero, el balance presupuestario, la simetría y el carácter semi-definido negativo, junto con las condiciones de agregación de Cournot y de Engel. Pero, en realidad, hay una cierta redundancia en estas condiciones. En particular, sabemos por el teorema 4.17 que los resultados de agregación siguen directamente del balance presupuestario. Hay otra redundancia también. De las cuatro restantes condiciones, solamente el balance presupuestario, la simetría, y el carácter semi-definido negativo son verdaderamente independientes: la homogeneidad de grado cero está implícita en las otras. De hecho, la homogeneidad está implicada por el balance presupuestario y la simetría, como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 5.5 (El Balance Presupuestario y la Simetría implican Homogeneidad) Si $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ *satisface el balance presupuestario y su matriz de Slutsky es simétrica, luego es homogénea de grado 0 en* $\mathbf{p}$ *e* y.

Demostración Recordar de la demostración del teorema 4.17 que, cuando se satisface el balance presupuestario, podemos diferenciar la ecuación de presupuesto con respecto a precios e ingreso, obteniendo, para $i = 1,\ldots, n$,

$$(P.1) \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j \partial x_j(\mathbf{p}, y)/\partial p_i = - x_i(\mathbf{p}, y), \qquad \text{y}$$

$$(P.2) \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j\, \partial x_j(\mathbf{p}, y)/\partial y = 1.$$

Fijamos $\mathbf{p}$ e y, y definimos $f_i(t) = x_i(t\mathbf{p}, ty)$ para todo $t > 0$. Hay que demostrar que $f_i(t)$ es constante en t o que $f_i(t) = 0$ para todo $t > 0$.

Diferenciando f_i con respecto a t:

$$(P.3) \qquad f_i(t) = \sum_{j=1}^{n} [\partial x_i(t\mathbf{p}, ty)/\partial p_j]\, p_j + [\partial x_i(t\mathbf{p}, ty)/\partial y]\, y.$$

Por la restricción de presupuesto, $t\mathbf{p}.\mathbf{x}(t\mathbf{p}, ty) = ty$, luego dividiendo por $t > 0$, se puede escribir:

$$(P.4) \qquad y = \sum_{j=1}^{n} p_j\, x_j(t\mathbf{p}, ty)$$

Sustituyendo y de *(P.4)* en *(P.3)* y reacomodando:

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, [\partial x_i(t\mathbf{p}, ty)/\partial p_j + \partial x_i(t\mathbf{p}, ty)/\partial y .\, x_j(t\mathbf{p}, ty)].$$

Pero el término entre corchetes es la celda ij-ésima de la matriz de Slutsky, que es simétrica por hipótesis. Luego, pueden intercambiarse i y j en estos corchetes y mantener la igualdad; por lo tanto,

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, [\partial x_j(t\mathbf{p}, ty)/\partial p_i + \partial x_j(t\mathbf{p}, ty)/\partial y .\, x_i(t\mathbf{p}, ty)] =$$

$$= [\sum_{j=1}^{n} p_j\, \partial x_j(t\mathbf{p}, ty)/\partial p_i\,] + x_i(t\mathbf{p}, ty)[\sum_{j=1}^{n} p_j\, \partial x_j(t\mathbf{p}, ty)/\partial y] =$$

$$= (1/t)\, [\sum_{j=1}^{n} (tp_j)\, \partial x_j(t\mathbf{p}, ty)/\partial p_i] + x_i(t\mathbf{p}, ty)\, (1/t)\, [\sum_{j=1}^{n} (tp_j)\, \partial x_j(t\mathbf{p}, ty)/\partial y] =$$

$$= (1/t)\, [- x_i(t\mathbf{p}, ty)] + x_i(t\mathbf{p}, ty)\, (1/t)] = 0,$$

donde las igualdades se aplican por *(P.1)* y *(P.2)* evaluada en $(t\mathbf{p}, ty)$. ▮

Por lo tanto, si $\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{p}, y)$ es el sistema de funciones de demanda de un maximizador de utilidad, podemos hacer un resumen (compacto) de las implicancias en términos de comportamiento observable que hemos descubierto hasta ahora sólo con los siguientes tres elementos:

• Presupuesto balanceado: $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, y) = y$.

• Carácter semi-definido negativo: La matriz de Slutsky asociada $\boldsymbol{s}$ $(\boldsymbol{p}, y)$ debe ser semi-definida negativa.

• Simetría: $\boldsymbol{s}$ $(\boldsymbol{p}, y)$ debe ser simétrica.

Nos gustaría saber si esta lista es exhaustiva. Es decir, ¿son éstas las únicas consecuencias sobre el comportamiento observable que se derivan del modelo de maximización de la utilidad del consumidor? *¿Hay tal vez otras implicancias adicionales, que aún no hayamos descubierto*? Sorprendentemente, se puede demostrar que esta lista es, de hecho, completa - no hay otras restricciones independientes impuestas sobre la demanda por la teoría del consumidor maximizador de la utilidad.

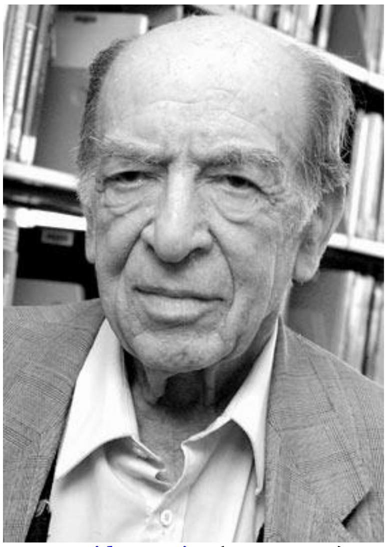
Giovanni Battista Antonelli
(1858-1944), ingeniero y economista italiano

Pero ¿cómo se puede siquiera comenzar a probar tal resultado? El método de solución es ingenioso, y sus orígenes se remontan a Giovanni Antonelli (Sulla teoria matematica della economia politica, 1886). La idea es la siguiente: supongamos que se nos da una función vectorial de los precios e ingreso, y que somos entonces de alguna manera capaces de construir una función de utilidad que genera precisamente esta misma función de demanda. Entonces, claramente, esa función original debe ser coherente con nuestra teoría de la maximización de la utilidad de los consumidores debido a que es de hecho la función de demanda de un consumidor con la función de utilidad que se construyó. La perspicacia de Antonelli fue darse cuenta de que si la función vectorial de los precios e ingreso con que comenzamos satisface sólo las tres condiciones anteriores, entonces debe existir de hecho una función de utilidad que la genera como función de demanda. El problema de recuperación de la función de utilidad de un consumidor desde su función de demanda se conoce como el problema de la **integrabilidad**.

Las implicaciones de esto son significativas. De acuerdo con la intuición de Antonelli, si una función de precios y del ingreso satisface las tres condiciones anteriores, es la función de demanda de algún consumidor maximizador de la utilidad. Ya sabemos que *sólo si* una función de precios y del ingreso satisface esas mismas condiciones será la función de demanda de un consumidor maximizador de utilidad. Poniendo a estas dos juntas, debemos concluir que las tres condiciones - y sólo esas tres condiciones - proporcionan una dócima completa y definitiva de nuestra teoría del comportamiento del consumidor. *Es decir, el comportamiento de la demanda es consistente con la teoría de la maximización de la utilidad si y sólo si satisface el balance presupuestario, la condición de semi-definida negativa, y la simetría*. Este resultado sorprendente merece un enunciado formal.

Teorema 5.6 (Integrabilidad) Una función continuamente diferenciable de $\boldsymbol{x}$*:* $\boldsymbol{R}_{n+1++} \rightarrow \boldsymbol{R}_{n+}$ *es la función de demanda generada por alguna función de utilidad creciente y cuasi-*

cóncava si (y sólo si, cuando la utilidad es continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava) satisface las condiciones de presupuesto equilibrado, simetría y semi-definida negativa.



[Leonid Hurwicz](#) (1917-2008)
Nobel 2007 *Iniciador de la [Teoría de los Mecanismos](#) y de la [compatibilidad con los incentivos](#)*

Vamos a esbozar una demostración (estilizada) de este teorema, aprovechando para usar el enfoque moderno utilizado por Hurwicz y Uzawa en 1971, que constituye una bella demostración de la potencia de la teoría de la dualidad.[1]

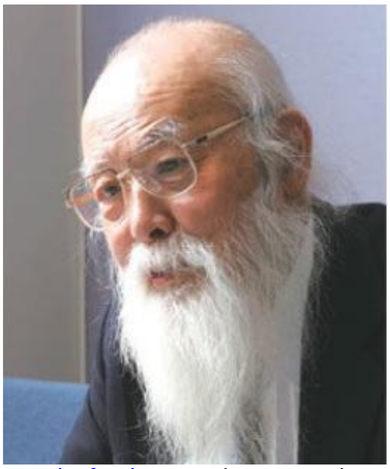
Demostración Puesto que ha sido demostrada la parte "sólo si", basta probar la parte "si" del enunciado. Así que supongamos que alguna función $\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, y)$ satisface el balance presupuestario, la simetría y el carácter semi-definido negativo. De alguna forma, hay que probar que existe una función de utilidad que la genera como su función de demanda.

Consideremos una función de gasto arbitraria, $e\,(\boldsymbol{p}, u)$, generada por alguna función de utilidad creciente y cuasi-cóncava $u\,(\boldsymbol{x})$, y supongamos que $u(\boldsymbol{x})$ genera la función de demanda marshalliana $\boldsymbol{x}^m\,(\boldsymbol{p}, y)$. Hasta este punto, no se requiere que exista ningún vínculo entre $\boldsymbol{x}\,(.)$ y $e\,(.)$, $\boldsymbol{x}\,(.)$ y $u\,(.)$, o $\boldsymbol{x}\,(.)$ y $\boldsymbol{x}^m\,(.)$.

Pero sólo en aras del argumento, supongamos que $\boldsymbol{x}\,(\cdot)$ y $E\,(\cdot)$ resultan ser relacionadas de la siguiente manera:

$$(P.1) \qquad \partial e\,(\boldsymbol{p}, u)/\partial p_i = x_i\,(\boldsymbol{p}, e\,(\boldsymbol{p}, u)),\ \forall(\boldsymbol{p}, u), \quad i = 1,\ldots, n.$$

Entonces, ¿podemos decir algo sobre la relación entre $\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, y)$ y la función de utilidad $u\,(\boldsymbol{x})$ de la que se obtuvo $e\,(\boldsymbol{p}, u)$? De hecho, sí se puede. Si *(P.1)* se mantiene, entonces $\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, y)$ es la función de demanda generada por la función de utilidad $u\,(\boldsymbol{x})$. Es decir, $\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, y) = \boldsymbol{x}^m\,(\boldsymbol{p}, y)$.



[Hirofumi Uzawa](#) (1928-2014)

Ahora esbozamos por qué es así. Nótese que si el Lema de Shephard fuera aplicable, el primer miembro de *(P.1)* sería igual a $\boldsymbol{x}^h\,(\boldsymbol{p}, u)$, de modo que *(P.1)* implicaría

$$(P.2) \qquad \boldsymbol{x}^h\,(\boldsymbol{p}, u) = \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{p}, e\,(\boldsymbol{p}, u))\ \forall(\boldsymbol{p}, u).$$

Más aún, si fuera aplicable el teorema 4.9, las funciones hicksianas y marshallianas estarían vinculadas porque

$$(P.3) \qquad \boldsymbol{x}^h\,(\boldsymbol{p}, u) = \boldsymbol{x}^m\,(\boldsymbol{p}, e\,(\boldsymbol{p}, u))\ \forall(\boldsymbol{p}, u).$$

Al colocar juntas *(P.2)* y *(P.3)* se obtiene

[1] L. Hurwicz. 1971. *On the problem of integrability of demand functions*; L. Hurwicz and H. Uzawa. 1971. *On the integrability of demand functions*. Ambos artículos están incluidos en J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter, and H. F. Sonnenschein, eds. 1971, *[Preferences, utility, and demand: A Minnesota symposium](#)*.

(*P.4*) $\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \mathbf{x}^m(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))\ \forall(\mathbf{p}, u)$.

Pero ahora recuérdese que, como toda función de gasto, para cada $\mathbf{p}$ fijo, $e(\mathbf{p}, u)$ asume todo número no negativo a medida que u varía en su dominio. En consecuencia, (*P.4*) es equivalente a $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y) = \mathbf{x}^m(\mathbf{p}, y)\ \forall(\mathbf{p}, y)$ como se afirmó. Además, esto es válido aunque no se puedan aplicar ni el Lema de Shephard ni el teorema 4.9.

Luego, si la función $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ corresponde a una función de gasto de acuerdo con (*P.1*), entonces $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ es la función de demanda generada por alguna función de utilidad, creciente y cuasi cóncava, (es decir, aquella que, de acuerdo con el Teorema 5.1, genera la función de gasto). Por lo tanto, nuestra tarea se ha reducido a mostrar que existe una función de gasto $e(\mathbf{p}, u)$ relacionada con $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ de acuerdo con (*P.1*).

Ahora, hallar una función de gasto tal que se cumpla (*P.1*) no es tarea fácil. De hecho, (*P.1*) es conocido en la literatura matemática como un *sistema de ecuaciones diferenciales parciales*. Aunque tales sistemas son a menudo muy difíciles de resolver, en realidad, hay un resultado importante que nos dice precisamente cuándo se garantiza que existe una solución. Y, para nuestros propósitos, la existencia es suficiente.

Pero antes de enunciar este resultado nótese que si (*P.1*) tiene una solución $e(\mathbf{p}, u)$, si diferenciamos ambos miembros en términos de p_j se obtiene:

$$\partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_j \partial p_i = \partial x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))/\partial p_j + \partial e(\mathbf{p}, u)/\partial p_j.\ \partial x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))/\partial y.$$

Por el Lema de Shephard, usando (*P.2*) y poniendo $y = e(\mathbf{p}, u)$ podemos escribir esto así:

(*P.5*) $$\partial^2 e(\mathbf{p}, u)\ \partial p_j \partial p_i = \partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial p_j + x_j(\mathbf{p}, y).\ \partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial y.$$

Ahora, téngase en cuenta que el lado izquierdo de (*P.5*) es simétrico en i y j por el teorema de Young (ver capítulo anterior). En consecuencia, (*P.5*) implica que el lado derecho debe ser simétrico en i y j también. Por lo tanto, la simetría de la parte derecha en i y j es una condición necesaria para la existencia de una solución de (*P.1*).

Sorprendentemente, resulta que esta condición también es suficiente para la existencia de una solución. Según el teorema de Frobenius, existe una solución de (*P.1*) si y sólo si el lado derecho de (*P.5*) es simétrico en i y j. Observen la parte derecha de (*P.5*). Es precisamente el enésimo término de la matriz de Slutsky asociado con $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$. En consecuencia, como la matriz de Slutsky es simétrica, existirá una función $e(\mathbf{p}, u)$ que satisface (*P.1*).

Empero, ¿será esta función una *verdadera* función de gasto? El teorema de Frobenius no se pronuncia sobre este tema. Sin embargo, según el teorema 5.2, será una función de gasto si tiene todas las propiedades de una función de gastos que se detallan en el Teorema 4.7. Ahora se intentará verificar cada una de esas propiedades.

En primer lugar, téngase en cuenta que como $e(\mathbf{p}, u)$ satisface (*P.1*), y como $x(\mathbf{p}, y)$ es no negativa, $e(\mathbf{p}, u)$ es automáticamente creciente en $\mathbf{p}$, y el lema de Shephard está garantizado por construcción. Por otra parte, se puede asegurar que es continua en $(\mathbf{p}, u)$, estrictamente creciente y no acotada en $u \in R_+$, y que $e(\cdot, u) = 0$ cuando $u = 0$. Como se satisfacen (*P.1*) y el balance presupuestario, $e(\cdot)$ debe ser homogénea de grado 1 en $\mathbf{p}$ (esto queda como *ejercicio*). Por lo tanto, la única propiedad que queda por establecer de una función de gasto es su concavidad en $\mathbf{p}$.

En virtud de un conocido teorema, *e* (·) será cóncava en **p** si y sólo si su matriz hessiana con respecto a **p** es semi-definida negativa. Pero de acuerdo con (*P.5*), éste será el caso si y sólo si la matriz de Slutsky asociada con ***x*** **(*p*, *y*)** es semi-definida negativa, lo que procede por el supuesto realizado.

En conjunto hemos establecido lo siguiente: Existe una solución *e* (·) de (*P.1*) que será una función de gasto si y sólo si ***x*** **(*p*, *y*)** cumple con balance presupuestario, simetría y carácter semi-definido negativo. Esto es precisamente lo que nos propusimos mostrar. ▌

Importancia práctica Si bien se hizo hincapié en la importancia de este resultado para la propia teoría, hay beneficios prácticos. Por ejemplo, si se desea estimar la función de demanda de un consumidor en base a una cantidad limitada de datos, y se quiere imponer como restricción que la función de demanda haya sido generada por una función de utilidad, uno está libre de especificar cualquier forma funcional para la demanda, siempre y cuando cumpla con el balance del presupuesto, la simetría y sea semi-definida negativa. Como sabemos ahora, está garantizado que cualquier función de este tipo será generada por alguna función de utilidad.

En el capítulo 2 de Geoffrey A. Jehle y Philip J. Reny ustedes pueden hallar un ejemplo de una función de utilidad con 3 bienes, en el cual el problema es recuperar la función de gasto a partir de sus funciones de demanda (véase página 90, Example 2.3).

3) *Preferencia revelada*

En su importante *Fundamentos del Análisis Económico*, Paul Samuelson (1947) sugirió un enfoque alternativo. ¿Por qué no *empezar* y *terminar* con el comportamiento observable? Samuelson mostró cómo virtualmente toda predicción que hace la teoría usual del consumidor sobre el comportamiento observable de mercado de un consumidor puede también derivarse de algunos supuestos simples y sensatos sobre las *elecciones* realizadas por los consumidores, que son observables, en lugar de sobre sus preferencias, que no lo son.

Paul Anthony Samuelson (1915-2009)
A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior (1938)
Nobel 1970

La idea básica es simple: si el consumidor compra una canasta en lugar de otra canasta asequible, entonces se considera que la primera canasta se reveló preferida a la segunda. La presunción es que en realidad eligiendo entre una y otra canasta, el consumidor transmite información importante sobre sus gustos. En lugar de establecer axiomas sobre preferencias de una persona como lo hicimos antes, hacemos supuestos acerca de la consistencia de las decisiones que se toman. En términos más formales

Axioma Débil de Preferencia Revelada (en inglés, *WARP*) *El comportamiento de un consumidor satisface el WARP si para cada par de canastas distintas* $\mathbf{x^0}$, $\mathbf{x^1}$ *con* $\mathbf{x^0}$ *elegida a los precios* $\mathbf{p^0}$ *y* $\mathbf{x^1}$ *elegida a precios* $\mathbf{p^1}$, *si*

$$\mathbf{p^0\, x^1 \le p^0\, x^0 \Rightarrow p^1\, x^0 > p^1\, x^1}.$$

En otros términos, rige el WARP si toda vez que $\mathbf{x^0}$ *se revela preferida a* $\mathbf{x^1}$, $\mathbf{x^1}$ *nunca se revelará preferida a* $\mathbf{x^0}$.

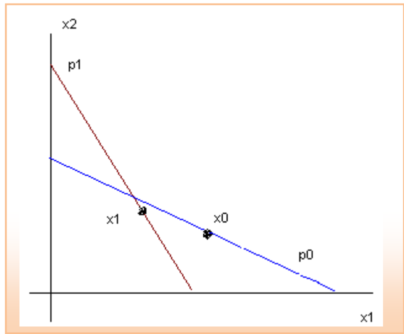


Figura 5.3 (a)

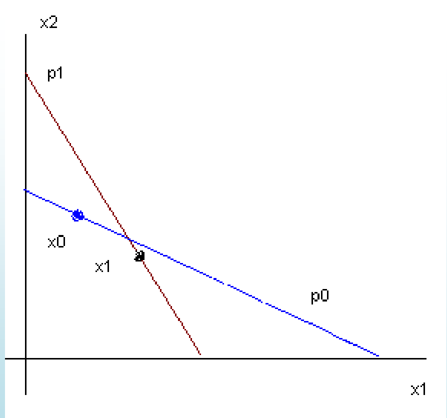


Figura 5.3 (b)

Para entender mejor las implicancias de esta definición, ver la Fig. 5.3. En ambas partes, el consumidor elige $\mathbf{x^0}$ frente a $\mathbf{p^0}$, y elige $\mathbf{x^1}$ frente a $\mathbf{p^1}$. En la Fig. 5.3 (a), las opciones del consumidor satisfacen el WARP. Allí, se elige $\mathbf{x^0}$ cuando $\mathbf{x^1}$ podría haberlo sido, pero no fue así, y cuando se elige $\mathbf{x^1}$, el consumidor no se podría haber permitido $\mathbf{x^0}$. Por el contrario, en la Fig. 5.3 (b), $\mathbf{x^0}$ es elegida de nuevo cuando $\mathbf{x^1}$ podría haberlo sido, sin embargo, cuando se elige $\mathbf{x^1}$, el consumidor podría haber elegido $\mathbf{x^0}$, pero no lo hizo, violando el WARP.

Ahora, supóngase que la elección del consumidor satisface el WARP. Sea $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{p}$, y) la elección hecha por el consumidor cuando se enfrenta con precios $\boldsymbol{p}$ e ingreso y. Téngase en cuenta también que esto no es una función de demanda debido a que no hemos mencionado utilidad o maximización de la misma - sólo denota las cantidades que el consumidor elige frente a $\boldsymbol{p}$ e y. Nos referimos a $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, y)$ como una *función de elección*. Además de WARP, hacemos otra hipótesis sobre el comportamiento de elección del consumidor, a saber, que para $\boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$, la elección $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{p}$, y) satisface el balance presupuestario, es decir, $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{p}$, y) = y. Las implicancias de estos dos requisitos aparentemente leves sobre el comportamiento de elección del consumidor son bastante notables.

La primera consecuencia de WARP y el balance presupuestario es que la función de elección $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{p}$, y) debe ser homogénea de grado cero en ($\boldsymbol{p}$, y). Para ver esto, supongan que se elige $\boldsymbol{x^0}$ cuando los precios son $\boldsymbol{p^0}$ y el ingreso es y^0, y se elige $\boldsymbol{x^1}$ cuando los precios son $\boldsymbol{p^1} = t\boldsymbol{p^0}$ y el ingreso es $y^1 = ty^0$ para $t > 0$. Debido a $y^1 = ty^0$, cuando se gasta todo el ingreso, debemos tener $\boldsymbol{p^1} \cdot \boldsymbol{x^1} = \boldsymbol{x^0}\ t\boldsymbol{p^0}$. En primer lugar, sustituimos $t\boldsymbol{p^0}$ por $\boldsymbol{p^1}$, se divide por t, y obtenemos

(5.3) $$\boldsymbol{p^0} \cdot \boldsymbol{x^1} = \boldsymbol{p^0} \cdot \boldsymbol{x^0}.$$

Luego se sustituye $t\boldsymbol{p^0}$ en la misma ecuación y obtenemos

(5.4) $$\boldsymbol{p^1} \cdot \boldsymbol{x^1} = \boldsymbol{p^1} \cdot \boldsymbol{x^0}.$$

Si $\boldsymbol{x^0}$ y $\boldsymbol{x^1}$ son canastas distintas para las que se cumple (5.3), luego, el WARP implica que el lado izquierdo de (5.4) debe ser estrictamente menor que el lado derecho - una contradicción. Por lo tanto, estas canastas no pueden ser distintas, y por lo tanto la función de elección del consumidor debe ser homogénea de grado cero en precios e ingresos.

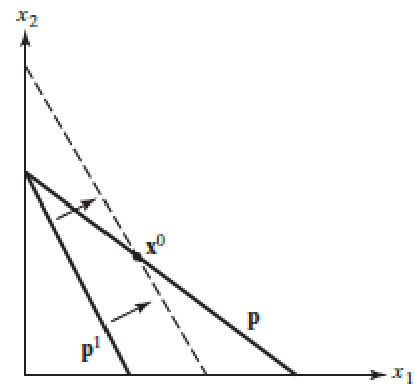


Figura 5.4 Compensación de Slutsky

Consideremos el efecto de una compensación de Slutsky para el comportamiento de elección del consumidor. La compensación de Slutsky se refiere a algún paquete pre-especificado, por ejemplo $\boldsymbol{x^0}$. La idea es tener en cuenta las decisiones que el consumidor hace a medida que los precios varían de forma arbitraria, mientras que su ingreso es compensado de manera que él sólo pueda adquirir la cesta $\boldsymbol{x^0}$. (Ver Fig. 5.4.) Por lo tanto, a precios $\boldsymbol{p}$, su ingreso será $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x^0}$. En estas circunstancias, su comportamiento de elección estará dado por $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x^0})$.

Ahora fijemos $\boldsymbol{p^0} \gg \boldsymbol{0}$, $y^0 > 0$, y sea $\boldsymbol{x^0} = \boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{p^0}$, y^0). Entonces, si $\boldsymbol{p^1}$ es cualquier otro vector de precios y $\boldsymbol{x^1} = \boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{p^1}$, $\boldsymbol{p^1} \cdot \boldsymbol{x^0}$), el *WARP* implica que

(5.5) $$\boldsymbol{p^0} \cdot \boldsymbol{x^0} \leq \boldsymbol{p^0} \cdot \boldsymbol{x^1}.$$

En efecto, si $\boldsymbol{x^1} = \boldsymbol{x^0}$, entonces (5.5) se cumple como igualdad. Y si $\boldsymbol{x^1} \neq \boldsymbol{x^0}$, entonces como $\boldsymbol{x^1}$ se eligió cuando $\boldsymbol{x^0}$ era asequible (o sea, a precios $\boldsymbol{p^1}$ e ingreso $\boldsymbol{p^1} \cdot \boldsymbol{x^0}$), el WARP implica que $\boldsymbol{x^1}$ no es asequible cuando se elige $\boldsymbol{x^0}$. En consecuencia, la desigualdad en (5.5) sería estricta.

Ahora, téngase en cuenta que por el balance del presupuesto:

(5.6) $\boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^0).$

Restando *(5.5)* de *(5.6)* implica luego que, para todos los precios $\boldsymbol{p}^1$

(5.7) $(\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0) \cdot \boldsymbol{x}^0 \geq (\boldsymbol{p}^1 - \boldsymbol{p}^0) \cdot \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^0)$

Como *(5.7)* es válida para todos los precios $\boldsymbol{p}^1$, sea $\boldsymbol{p}^1 = \boldsymbol{p}^0 + t\,\boldsymbol{z}$, donde $t>0$ y $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}_n$ es arbitrario. Luego *(5.7)* se hace

(5.8) $t\,[\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x}^0] \geq t[\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^0)].$

Dividiendo por $t>0$

(5.9) $\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x}^0 \geq \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0 + t\,\boldsymbol{z}, (\boldsymbol{p}^0 + t\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{x}^0),$

donde hemos usado la relación $\boldsymbol{p}^1 = \boldsymbol{p}^0 + t\boldsymbol{z}$.

Ahora para $\boldsymbol{z}$ fijo, podemos elegir $t^m > 0$ suficientemente pequeño para que $\boldsymbol{p}^0 + t\boldsymbol{z} \gg 0$ para todo $t \in [0, t^m]$, porque $\boldsymbol{p}^0 \gg \boldsymbol{0}$. Teniendo en cuenta que (5.9) se cumple con igualdad cuando $t = 0$, (5.9) dice que la función $f: [0, t^m) \to R$ definida por el lado derecho de (5.9), es decir,

$$f(t) \equiv \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^0 + t\boldsymbol{z}, (\boldsymbol{p}^0 + t\,\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{x}^0),$$

se maximiza en $[0, t^m)$ en $t = 0$. Por lo tanto, debemos tener $f\,'(0) \leq 0$. Pero tomando la derivada de $f\,(t)$ y evaluando en $t = 0$ da (suponiendo que $\boldsymbol{x}(\cdot)$ es diferenciable):

(5.10) $f\,'(0) = \sum_i \sum_j z_i\,[\partial x_i(\boldsymbol{p}^0, y^0)/\,\partial p_j + x_j(\boldsymbol{p}^0, y^0)\,\partial x_i(\boldsymbol{p}^0, y^0)/\,\partial y]\,z_j \leq 0.$

Ahora bien, como $z \in \boldsymbol{R}_n$ era arbitrario, (5.10) nos dice que la matriz de celda (*ij*) igual a

(5.11) $\partial x_i(\boldsymbol{p}^0, y^0)/\,\partial p_j + x_j(\boldsymbol{p}^0, y^0)\,\partial x_i(\boldsymbol{p}^0, y^0)/\,\partial y$

debe ser semi-definida negativa. ¡Pero esta matriz es precisamente la matriz de Slutsky asociada con la función de elección x (p, y)!

Por lo tanto, se ha demostrado que si una función de elección satisface el WARP y un presupuesto balanceado, entonces debe satisfacer otras dos propiedades implicadas por la maximización de la utilidad, a saber, la homogeneidad de grado cero y el carácter semi-definido negativo de la matriz de Slutsky.

Si pudiéramos demostrar, además, que la matriz de Slutsky de la función de elección es simétrica, entonces por el previo resultado de integrabilidad, esa función de elección sería en realidad una función de demanda, porque entonces podríamos ser capaces de construir una función de utilidad para generarla.

Antes de continuar con este último punto, vale la pena señalar que si $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, y)$ fuera una función de demanda generada por la maximización de la utilidad entonces $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, y)$ debería satisfacer el WARP. Para verlo, supongamos que un consumidor que maximiza la utilidad tiene preferencias estrictamente monótonas y convexas. Entonces sabemos que habrá una canasta única exigida para cada conjunto de precios, y que esa canasta siempre agotará el ingreso del consumidor. Así que supóngase que $\boldsymbol{x}^0$ maximiza la utilidad a precios $\boldsymbol{p}^0$ y $\boldsymbol{x}^1$ maximiza la utilidad a precios $\boldsymbol{p}^1$ y supóngase que $\boldsymbol{p}^1\ \boldsymbol{x}^1 \leq \boldsymbol{p}^0\ \boldsymbol{x}^0$. Debido a que $\boldsymbol{x}^1$ no es elegido, aunque es asequible, sólo debe serlo porque $u\ (\boldsymbol{x}^0) > u\ (\boldsymbol{x}^1)$. Por lo tanto, cuando se elige $\boldsymbol{x}^1$ a precios $\boldsymbol{p}^1$, debe ser porque $\boldsymbol{x}^0$ no está disponible o que $\boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^0 > \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{x}^1$. Por lo tanto, $\boldsymbol{p}^0 \cdot \boldsymbol{x}^1 \leq \boldsymbol{p}^1 . \boldsymbol{x}^0$ implica $\boldsymbol{p}^1 \boldsymbol{x}^0 > \boldsymbol{p}^1\ \boldsymbol{x}^1$, por lo que el WARP se satisface.

Pero ahora, ¿qué se puede decir a la inversa? ¿Qué pasa si la función de elección de un consumidor siempre satisface el WARP? Esa conducta, ¿debe haber sido generada por la maximización de la utilidad? Dicho de otra manera, ¿debe existir una función de utilidad que produciría las opciones observadas como resultado del proceso maximizador de utilidad? Si la respuesta es sí, decimos que la función de utilidad *racionaliza* el comportamiento observado.

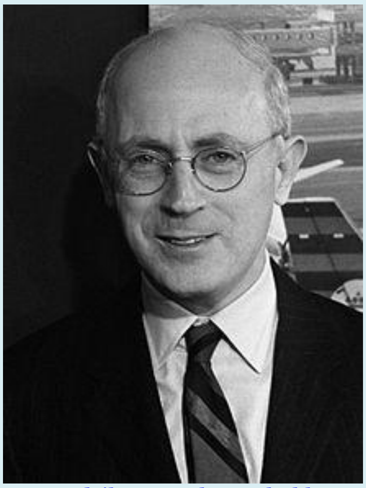
Como resultado, la respuesta es sí - y no. Si sólo hay dos bienes, entonces el WARP implica que existirá alguna función de utilidad que racionaliza las elecciones. Sin embargo, si hay más de dos bienes, entonces incluso si el WARP se sostiene, no tiene por qué haber una función de utilidad.

La razón de la excepción de los dos bienes está relacionada con la simetría de la matriz de Slutsky y con la transitividad. Resulta que en el caso de dos bienes, el presupuesto balanceado junto con la homogeneidad implica que la matriz de Slutsky debe ser simétrica. Por lo tanto, como el WARP y el balance presupuestario implican homogeneidad así como la condición de semi-definida negativa, entonces en el caso de dos bienes, también implican la simetría de la matriz de Slutsky. Por lo tanto, para dos bienes, nuestro teorema de integrabilidad nos dice que la función de elección debe ser generada por la maximización de la utilidad.

Una aparentemente distinta explicación, pero en última instancia equivalente, para la excepción de dos bienes es que con dos bienes, la clasificación por pares de canastas implícita en la preferencia revelada resulta no tener ningún ciclo intransitivos. Y cuando esto es así, habrá una representación de utilidad que genera la función de elección. Por lo tanto, como se mencionó antes, hay una *conexión profunda entre la simetría de la matriz de Slutsky y la transitividad de las preferencias del consumidor*.

Con más de dos bienes, el WARP y el balance del presupuesto no implican ninguna simetría de la matriz de Slutsky ni la ausencia de ciclos intransitivos en la relación de "*revelado preferido a*". En consecuencia, con más de dos bienes, el WARP y el balance del presupuesto no son equivalentes a la hipótesis de maximización de la utilidad.

Esto conduce naturalmente a la pregunta: ¿cómo debemos fortalecer el WARP para obtener una teoría de la preferencia revelada que sea equivalente a la teoría de la maximización de la utilidad? La respuesta radica en el "axioma fuerte de la preferencia revelada".



Hendrik Samuel Houthakker
(1924-2008)
Can Speculators Forecast Prices?

El axioma fuerte de la preferencia revelada (en inglés, SARP) se satisface si, para cada secuencia de canastas distintas $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^k$, donde $\boldsymbol{x}^0$ se revela preferida a $\boldsymbol{x}^1$, y $\boldsymbol{x}^1$ se revela preferida a $\boldsymbol{x}^2$,..., y $\boldsymbol{x}^{k-1}$ se revela preferida a $\boldsymbol{x}^k$, no es el caso de que $\boldsymbol{x}^k$ se revele preferida a $\boldsymbol{x}^0$. El SARP descarta las preferencias reveladas intransitivas y por lo tanto se puede utilizar para inducir una relación de preferencia completa y transitiva, para la cual existirá entonces una función de utilidad que racionaliza el comportamiento observado. Omitimos la prueba de esto y en su lugar remitimos al lector a H. Houthakker para el argumento original, y a Richter para una elegante prueba.[2]

No es difícil demostrar que si un consumidor elige sus canastas maximizando una función de utilidad cuasi-cóncava y estrictamente creciente, su comportamiento de demanda debe satisfacer el SARP. *Por lo tanto, una teoría de la demanda construida sólo con el SARP, una restricción sobre la elección observable, es esencialmente equivalente a la teoría de la demanda basada en la maximización de la utilidad*. Tanto con el SARP como bajo la hipótesis de maximización de la utilidad, la demanda del consumidor será homogénea y la matriz de Slutsky será semi-definida negativa y simétrica.

Hasta ahora, en nuestro análisis nos hemos centrado en los axiomas de preferencia revelada y las funciones de elección del consumidor. En efecto, hemos estado actuando como si tuviéramos una colección infinitamente grande de datos de precios y cantidades con los cuales trabajar. Para muchos, el encanto original de la teoría de la preferencia revelada era su promesa de poder comenzar con datos reales y operar con las funciones de utilidad implícitas para predecir el comportamiento del consumidor. Debido a que los conjuntos de datos del mundo real no contendrán nunca más que un número **finito** de puntos muestrales, los trabajos más recientes sobre la preferencia revelada han intentado lidiar directamente con algunos de los problemas que surgen cuando el número de observaciones es finito.

A tal fin, Sydney Afriat introdujo el *Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada* (en inglés, GARP), un requisito ligeramente más débil que el SARP, y demostró un análogo del teorema de integrabilidad (Teorema 5.6).[3] De acuerdo con el *teorema de Afriat*, un conjunto finito de datos de precios y cantidades observadas satisfacen el GARP si y sólo si existe una función de utilidad continua, creciente, y cóncava que racionaliza los datos. Sin embargo, con sólo una cantidad *finita* de datos, las preferencias de los consumidores no están completamente precisadas en canastas "fuera de la muestra". Por lo tanto, puede haber muchas diferentes funciones de utilidad que racionalizan los datos (finitos).

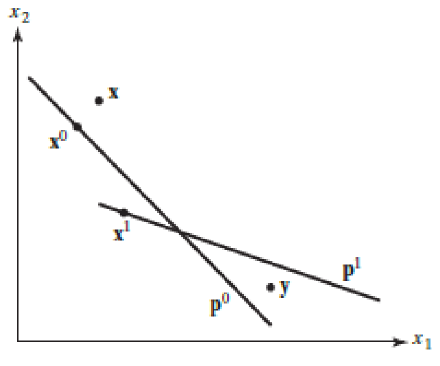


Figura 5.5 Recuperación de preferencias que satisfacen el GARP

Sin embargo, en algunos casos, la preferencia revelada no nos permite hacer comparaciones "fuera de la muestra". Por ejemplo, veamos la figura 5.5. En ella suponemos que hemos observado que el consumidor elige $\boldsymbol{x}^0$ a precios $\boldsymbol{p}^0$ y $\boldsymbol{x}^1$ a precios $\boldsymbol{p}^1$. Es fácil ver que $\boldsymbol{x}^0$ se revela preferido a $\boldsymbol{x}^1$. Por lo tanto, para cualquier función de utilidad que racionalice estos datos, debemos tener $u(\boldsymbol{x}^0)> u(\boldsymbol{x}^1)$, por definición. Ahora supongamos que queremos comparar dos canastas como $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, que no aparecen en nuestra muestra. Debido a que $\boldsymbol{y}$ cuesta menos que $\boldsymbol{x}^1$ cuando se eligió $\boldsymbol{x}^1$, podemos deducir que $u(\boldsymbol{x}^0)> u(\boldsymbol{x}^1)> u(\boldsymbol{y})$.

[2] H.S. Houthakker, *Revealed Preference and the Utility Function*, 1950; Marcel K. Richter, *Revealed Preference Theory*, 1966.
[3] Sydney N. Afriat, *The Construction of Utility Functions from Expenditure Data*, 1967.

Pero las cosas no siempre funcionan tan bien. Para ilustrar esto, por ejemplo observamos al consumidor comprar la canasta $\boldsymbol{x}^1 = (1, 1)$ a precios $\boldsymbol{p}^1 = (2, 1)$. La función de utilidad $u(\boldsymbol{x}) = x_1^2x_2$ racionaliza la elección que observamos, porque la curva de indiferencia que pasa por $\boldsymbol{x}^1$ es tangente a la restricción presupuestaria $2x_1 + x_2 = 3$, como se puede comprobar fácilmente. Al mismo tiempo, la función de utilidad $v(\boldsymbol{x}) = x_1(x_2 + 1)$ también racionaliza la selección de $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{p}^1$ ya que esta curva de indiferencia que pasa por $\boldsymbol{x}^1$ también será tangente en $\boldsymbol{x}^1$ a la misma restricción de presupuesto. Esto no sería un problema si $u(\boldsymbol{x})$ y $v(\boldsymbol{x})$ fueran transformadas monótonas la una de la otra - pero no lo son. Porque cuando comparamos las canastas fuera de la muestra $\boldsymbol{x} = (3, 1)$ e $\boldsymbol{y} = (1, 7)$, en un caso, obtenemos $u(3, 1) > u(1, 7)$, que nos dice que el consumidor prefiere $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$, y en la otra, obtenemos $v(3, 1) < v(1, 7)$, que nos dice que prefiere $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{x}$.

De modo que para una canasta dada $\boldsymbol{y}$, ¿podemos encontrar todas las canastas $\boldsymbol{x}$ tales que $u(\boldsymbol{x}) > u(\boldsymbol{y})$ para cada función de utilidad que racionaliza los datos? Una solución parcial fue proporcionada por Varian. Varian describió un conjunto de canastas de tal manera que cada $\boldsymbol{x}$ del conjunto satisface $u(\boldsymbol{x}) > u(\boldsymbol{y})$ para cada $u(\cdot)$ que permite una racionalización de los datos. Knoblauch mostró entonces que ese conjunto de Varian es una solución *completa* - es decir, que contiene *todas* esas canastas.[4]

Por desgracia, los datos de consumo por lo general contienen violaciones del GARP. Por lo tanto, hoy hay una búsqueda de criterios para ayudar a decidir cuándo esas violaciones del GARP no son lo suficientemente importantes como para ignorarlas y de algoritmos prácticos que construyan las funciones de utilidad correspondientes sobre conjuntos de datos que registren violaciones de menor importancia del GARP.

[4] Hal R. Varian, *The Nonparametric Approach to Demand Analysis*, 1982. Vicki Knoblauch, *A Tight Upper Bound on the Money Metric Utility Function*, 1992.

4) *Incertidumbre*

Hasta ahora, hemos supuesto que los tomadores de decisiones actúan en un mundo de absoluta certeza. El consumidor conoce los precios de todas las mercancías y sabe que cualquier canasta de consumo viable se puede obtener con certeza. Claramente, los agentes económicos en el mundo real no siempre pueden operar en tales condiciones agradables. Muchas de las decisiones económicas contienen algún elemento de incertidumbre. Al comprar un coche, por ejemplo, el consumidor debe tener en cuenta el precio futuro de la nafta, los gastos de reparación, y el valor de reventa del coche varios años más tarde - nada de todo esto se sabe con certeza al momento de la decisión. Las decisiones de este tipo implican incertidumbre sobre el resultado de la elección que se haga. Si bien el tomador de decisiones puede conocer las probabilidades de los diferentes resultados posibles, el resultado final de la decisión no puede ser conocido hasta que se produce.

John von Neumann (1903-1957)
John von Neumann interview *(2m 30s)*

A primera vista, la incertidumbre puede parecer un problema insoluble, sin embargo, la teoría económica tiene mucho que aportar. El principal enfoque analítico de la incertidumbre se basa en el trabajo pionero de von Neumann y Morgenstern.[5]

Preferencias

Anteriormente, se supuso que el consumidor tenía una relación de preferencia sobre todas las canastas de consumo x en un conjunto de consumo X. Para tener en cuenta la incertidumbre sólo se necesita un ligero cambio de perspectiva. Mantenemos la noción de una relación de preferencia, pero, en lugar de canastas de consumo, se supondrá que el individuo tiene una relación de preferencia sobre *apuestas*.

Para formalizar esto, sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ que denota un conjunto finito de resultados. Los a_i podrían ser cestas de consumo, cantidades de dinero (positivas o negativas), o cualquier otra cosa. El punto principal es que los propios a_i no implican incertidumbre. Por otro lado, vamos a utilizar al conjunto A como base para la creación de apuestas.

Por ejemplo, sea $A = \{1, -1\}$, donde 1 es el resultado *ganar un peso*, y -1 es el resultado *perder un peso*. Supongan que han hecho la siguiente apuesta con un amigo. Si el lanzamiento de una moneda al aire sale cara, él le paga un paso, y usted le paga un peso a él si sale cruz. Desde su punto de vista, este juego dará lugar a uno de los dos resultados en A: 1 (ganar un peso) o -1 (perder un peso), y cada uno de éstos tiene lugar con una probabilidad de ½ debido a que la moneda no está cargada.

De manera más general, una apuesta sencilla asigna una probabilidad, p_i, a cada uno de los resultados a_i, en A. Por supuesto, como las p_i son probabilidades, deben ser no negativas, y

[5] John von Neumann and Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1944, 1947 and 1953 (Complete on-line edition).

como la apuesta debe dar lugar a algún resultado en A, las p_i deben sumar uno. Denotamos esta sencilla apuesta por $(p_1 \circ a_1,..., p_n \circ a_n)$. Se define el conjunto de apuestas simples G_S de la siguiente manera.

Apuestas Simples Sea $A= \{a_1,..., a_n\}$ el conjunto de los resultados. Luego G_S, el conjunto de apuestas simples (sobre A) viene dado por

$$G_S = \left\{ (p_1 \circ a_1,..., p_n \circ a_n) \mid p_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}.$$

Cuando una o más p_i sea igual a cero, vamos a excluir esas componentes de la expresión cuando sea conveniente hacerlo. Por ejemplo, la apuesta sencilla $(\alpha \circ a_1, 0 \circ a_2,..., 0 \circ a_{n-1}, (1 - \alpha) \circ a_n)$ debería escribirse como $(\alpha \circ a_1, (1 - \alpha) \circ a_n)$. Téngase en cuenta que G_S contiene a A porque para cada i, $(1 \circ a_i)$, la apuesta que da a_i con probabilidad uno, se encuentra en A_S. Para simplificar la notación aún más, vamos a escribir a_i en lugar de $(1 \circ a_i)$ para denotar que esta apuesta produce el resultado a_i con certeza.

Volviendo a nuestro ejemplo de lanzar una moneda en la que $A = \{1, -1\}$, cada individuo se enfrentó a la apuesta simple $(½ \circ 1, ½ \circ -1)$. Por supuesto, no todas las apuestas son simples. ¡Por ejemplo, es muy común que las loterías estatales entreguen como premios boletos para el próximo sorteo! Las apuestas cuyos premios son apuestas son llamadas **apuestas compuestas**.

Nótese que no hay límite para el nivel de composición que un juego de azar compuesto podría implicar. De hecho, el ejemplo de la lotería estatal es un caso particularmente extremo de este tema. Como cada billete de lotería estatal podría resultar en otro billete de lotería como premio, cada billete implica un número infinito de niveles de composición. Es decir, al continuar ganando billetes de lotería como premios, puede tomar cualquier número de juegos de la lotería estatal antes de que el resultado de su boleto original se realice.

Sólo para simplificar, se excluirá la posibilidad de apuestas compuestas infinitamente en capas como la lotería estatal. Las apuestas compuestas que consideraremos deberán dar lugar a un resultado en A después de un número finito de asignaciones al azar.

Entonces sea G el conjunto de todas las apuestas, tanto simples y compuestas. (Aunque es posible dar una descripción más formal del conjunto de apuestas compuestas, y por lo tanto de G, para nuestros propósitos, esto no es necesario.) Resumidamente, un juego de azar puede ser visto como un billete de lotería, que a su vez podría resultar en una serie de otros (tal vez muy distintos) billetes de lotería, y así sucesivamente. Pero al final, después de un número finito de loterías jugadas, debe tener como resultado alguno en A. Por lo tanto, si g es cualquier apuesta en G, entonces $g = (p_1 \circ g_1,..., p_k \circ g_k)$, para algunos $k \geq 1$ y algunas apuestas $g^i \in G$, donde las g_i podrían ser compuestos de apuestas, apuestas simples, o resultados. Por supuesto, las p_i deberán ser no negativas y sumar uno.

Los objetos de elección en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre son apuestas. De forma análoga al caso de la teoría del consumidor, vamos a suponer que el tomador de decisiones tiene preferencias, $\succsim$, sobre el conjunto de apuestas, G. Se procederá enunciando una serie de axiomas, llamados axiomas de elección en condiciones de incertidumbre, para la relación de preferencias del decisor, $\succsim$. Como antes, $\sim$ y $\succ$ denotarán las relaciones de indiferencia y de preferencia estricta inducidas por $\succsim$. Los primeros axiomas se ven familiares y por lo tanto no requieren discusión.

<u>Axioma 1</u> (<u>Exhaustividad</u>) Para cualquier par de apuestas, g y g ' en G, o bien $g \succsim g'$ o $g' \succsim g$.

<u>Axioma 2</u> (<u>Transitividad</u>) Para cualesquier g, g ' y g ' ' en G, si $g \succsim g'$ y $g' \succsim g''$, luego $g \succsim g''$.

Debido a que cada a_i en A se representa en G como una apuesta degenerada, los axiomas 1 y 2 implican, en particular, que un número finito de elementos de A están ordenados por $\succsim$. Luego vamos a suponer sin pérdida de generalidad, que los elementos de A se han indexado de manera que $a_1 \succsim a_2 \succsim \cdots \succsim a_n$.

Parece plausible entonces que ningún juego de azar sea mejor que dar a_1 con certeza, y no hay apuesta peor que dar a_n con certeza (aunque no estamos asumiendo directamente esto). Es decir, para cualquier juego de azar g, parece plausible que $(\alpha \circ A1, (1 - \alpha) \circ a) \succsim g$, cuando $\alpha = 1$, y $g \succsim (\alpha \circ A1, (1 - \alpha) \circ a)$ cuando $\alpha = 0$. El siguiente axioma dice que si no se mantiene la indiferencia en cualquiera de los extremos, entonces debe darse para un cierto valor intermedio de α.

<u>Axioma 3</u> (<u>Continuidad</u>) Para toda apuesta g en G, existe cierta probabilidad $\alpha \in [0, 1]$, tal que $g \sim (\alpha \circ a_1, (1 - \alpha) \circ a_n)$.

El Axioma 3 tiene *implicancias que a primera vista podrían parecer poco razonables*. Por ejemplo, supongamos que A = {\$ 1000, \$ 10, muerte}. Para la mayoría de nosotros, estos resultados están estrictamente ordenados de la siguiente manera: \$ 1000 $\succ$ \$ 10 $\succ$ muerte. Consideremos ahora la apuesta sencilla que da \$ 10 con certeza. De acuerdo con el Axioma 3, tiene que haber alguna probabilidad α haciendo que el juego de azar ($\alpha \circ$ *\$ 1000, (1 - α)* $\circ$ muerte) sea igualmente atractivo que \$ 10. Por lo tanto, si no hay probabilidad α a la que ustedes encontrarían \$ 10 con certeza y la apuesta ($\alpha \circ$ \$ 1000, *(1 - α)* $\circ$ muerte) igualmente atractivos, luego, sus preferencias sobre apuestas no satisfacen el Axioma 3.

¿Es el axioma G3, entonces, una restricción indebidamente fuerte para imponer a las preferencias? No se apresuren demasiado en llegar a una conclusión. Si ustedes desean cruzar la ciudad para cobrar \$ 1000 - una acción que implica alguna probabilidad positiva, si bien mínima, de mortalidad - en lugar de aceptar un pago de \$ 10 y quedarse en casa, ustedes estarían declarando su preferencia por el juego de azar sobre la pequeña suma con certeza. Es de suponer, que podríamos aumentar la probabilidad de un accidente de tráfico mortal hasta que simplemente haya indiferencia entre las dos opciones. Cuando ese sea el caso, habremos encontrado la probabilidad de indiferencia cuya existencia supone el Axioma 3.

El siguiente axioma expresa la idea de que si, entre dos apuestas simples, cada una entrega potencialmente sólo los mejores y los peores resultados, entonces es preferida la que genera el mejor resultado con probabilidad más alta.

<u>Axioma 4</u> (<u>Monotonía</u>) Para toda probabilidad $\alpha, \beta \in [0, 1]$,

$$(\alpha \circ a_1, (1 - \alpha) \circ a_n) \succsim (\beta \circ a_1, (1 - \beta) \circ a_n) \text{ si y solamente si } \alpha \geq \beta.$$

Nótese que la monotonía implica $a_1 \succ a_n$, por lo cual el caso de un tomador de decisiones indiferente entre todos los resultados de A es excluido.

Aunque la mayoría de la gente suele preferir apuestas que dan a los mejores resultados una probabilidad mayor, tal como requiere la monotonicidad, no siempre tiene que ser así. Por ejemplo, para un cazador de safari, la muerte puede ser el peor resultado de una salida, sin embargo, la posibilidad de la muerte suma a la emoción de la aventura. Una salida con una pequeña probabilidad de muerte podría entonces ser preferible a una con probabilidad cero, en una clara violación de la monotonicidad.

El siguiente axioma afirma que el tomador de decisiones resulta indiferente entre una apuesta y otra si está indiferente entre sus realizaciones y sus realizaciones se producen con las mismas probabilidades.

Axioma 5 (Sustitución) Si $g = (p_1 \circ g_1,.., p_k \circ g_k)$, y $h = (p_1 \circ h_1,..., p_k \circ h_k)$ están en G, y si $h_i \sim g_i$ para todo i, luego $h \sim g$.

Junto al Axioma 1, el Axioma 5 implica que cuando el agente está indiferente entre dos apuestas, luego debe ser indiferente a todas las combinaciones convexas de ellas. Es decir, si g ~ h, luego, como por el Axioma 1 g ~ g, el Axioma 5 implica

$$(\alpha \circ g, (1 - \alpha) \circ h) \sim (\alpha \circ g, (1 - \alpha) \circ g) = g.$$

Nuestro próximo y último axioma establece que al considerar una apuesta en particular, el tomador de decisiones sólo se preocupa por las probabilidades efectivas que la apuesta asigna a cada resultado en A. Esto requiere un poco de discusión.

Por ejemplo, supongamos que A = $\{a_1, a_2\}$. Téngase en cuenta la apuesta compuesta que produce el resultado a_1 con α de probabilidad, y cediendo un billete de lotería con probabilidad 1 - α, donde el propio billete de lotería es un juego simple. Éste produce el resultado a_1 con probabilidad β y el resultado a_2 con probabilidad 1 - β.

Ahora, tomada en conjunto, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado efectivo, de hecho, sea a_1? Bueno, a_1 puede dar de dos maneras mutuamente excluyentes, es decir, como un resultado inmediato de la apuesta compuesta o como resultado del billete de lotería. La probabilidad de la primera es claramente α. La probabilidad de la segunda es $(1 - \alpha)\beta$, ya que para obtener a_1 a través del billete de lotería, a_1 no debe haber sido el resultado inmediato de la apuesta compuesta y debe haber sido el resultado del billete de lotería. Así que, en conjunto, la probabilidad de que el resultado sea a_1 es la suma, es decir, $\alpha + (1 - \alpha)\beta$, ya que las dos formas diferentes en que puede surgir a_1 son mutuamente excluyentes. Del mismo modo, la probabilidad de que el resultado efectivo sea a_2, es $(1 - \alpha)(1 - \beta)$.

Decir que el tomador de decisiones sólo se preocupa por las probabilidades efectivas sobre las a_i a la hora de considerar la apuesta compuesta anterior quiere decir que el tomador de decisiones está indiferente entre la apuesta compuesta y la apuesta simple $(\alpha + (1 - \alpha)\beta \circ a1, (1 - \alpha)(1 - \beta) \circ a2)$ que induce.

Claramente, se pueden derivar las (únicas) probabilidades eficaces sobre las a_i inducidas por cualquier apuesta compuesta de manera similar. No nos detendremos en detalle en el procedimiento, ya que es, al menos conceptualmente, bastante sencillo.

Para cualquier apuesta g ∈ G, si p_i denota la probabilidad efectiva asignada a a_i por *g*, entonces se dice que *g* induce la apuesta sencilla ($p_1 \circ a_1,..., p_n \circ a$) ∈ G_S. Hacemos hincapié en que cada $g \in G$ induce una apuesta sencilla única. Nuestro axioma final es entonces como sigue

Axioma 6 (Reducción de apuestas simples)

Para cualquier apuesta $g \in G$, si ($p_1 \circ a_1,..., p_n \circ a$) es la apuesta simple inducida por g, entonces ($p1 \circ a_1,..., p_n \circ a$) ~ g.

[En algunos tratamientos, los axiomas 5 y 6 se combinan en un único axioma de "independencia"].

Téngase en cuenta que por el Axioma 6 (transitividad y Axioma 2), las preferencias de un individuo sobre todas las apuestas - compuestas o no - son determinadas completamente por sus preferencias sobre apuestas simples. Aunque el axioma 6 parezca plausible, restringe el dominio de análisis. En particular, no sería un supuesto a mantener si se quisiera modelar el comportamiento de los turistas en Las Vegas. Ellos probablemente no estarían indiferentes entre jugar a las máquinas tragamonedas muchas veces durante su estancia y tomar por única vez todas las apuestas definidas por las probabilidades efectivas sobre las ganancias y las pérdidas. Por otra parte, muchas de las decisiones bajo incertidumbre se emprenden fuera de Las Vegas, y para muchas, el axioma 6 es razonable.

Utilidad de von Neumann-Morgenstern

Ahora que hemos caracterizado los axiomas a que las preferencias sobre las apuestas deben obedecer, una vez más nos preguntamos si podemos representar estas preferencias con una función continua, a valores reales. La respuesta a esta pregunta es sí, lo que no debería ser una sorpresa. Sabemos por nuestro estudio de las preferencias en condiciones de certeza que, aquí, los axiomas 1, 2, y algún tipo de supuesto de continuidad deben ser suficientes para asegurar la existencia de una función continua de representación. Por otra parte, hemos hecho supuestos además de los axiomas 1, 2, y la continuidad. Entonces se podría esperar obtener una representación de la utilidad que sea algo más que continua. De hecho, vamos a demostrar que no sólo podemos obtener una función de utilidad continua de representación en G, sino que además podemos obtener una función lineal en las probabilidades efectivas sobre los resultados.

Siendo más precisos, supongamos que $u: G \rightarrow R$ es una representación de una función de utilidad en G. Por lo tanto, por cada $g \in G$, $U(g)$ denota el número asignado a la utilidad de la apuesta g. En particular, para cada i, *u* asigna el número *u (ai)* a la apuesta degenerada ($1 \circ a_i$), en la que el resultado a_i se produce con certeza. A menudo nos referiremos a $u(a_i)$ como simplemente la utilidad de los resultados a_i. Ahora estamos preparados para describir la propiedad de linealidad anteriormente mencionada.

Propiedad de la Utilidad Esperada

La función de utilidad $u: G \rightarrow R$ tiene la propiedad de utilidad esperada si, para cada $g \in G$

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(a_i),$$

donde ($p_1 \circ a_1,..., p_n \circ a_n$) es la apuesta simple inducida por g.

Por lo tanto, decir que u tiene la propiedad de utilidad esperada es decir que se asigna a cada apuesta el valor esperado de las utilidades que podrían resultar, donde a cada utilidad que pudiera resultar se le asigna su probabilidad efectiva. Por supuesto, la probabilidad efectiva de que g rinda la utilidad (a_i) es simplemente la probabilidad efectiva de que produzca el resultado a_i, es decir, p_i.

Téngase en cuenta que si u tiene la propiedad de utilidad esperada, y si $g_s = (p_1 \circ a_1,\ldots, p_n \circ a_n)$ es una apuesta simple, luego, debido a que la apuesta simple inducida por g_s es la propia g_s, debemos tener

$$u(p_1 \circ a_1,\ldots, p_n \circ a_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(a_i),\ \forall \text{ vectores de probabilidad } (p_1,\ldots, p_n).$$

En consecuencia, la función u está determinada por completo en todo G por los valores que asume en el conjunto finito de resultados, A.

Si las preferencias de un individuo son representadas por una función de utilidad con la propiedad de la utilidad esperada, y si esa persona siempre elige su alternativa más preferida disponible, entonces ese individuo elegirá una apuesta sobre otra si y sólo si la utilidad esperada de la misma excede la de la otra. En consecuencia, tal individuo es un *maximizador de la utilidad esperada*.

Cualquier función como ésta tendrá algunas ventajas analíticas evidentes porque la utilidad de cualquier apuesta será expresable como una suma lineal que involucra solamente la utilidad de los resultados y sus probabilidades asociadas. Sin embargo, esto es claramente una gran exigencia de la función que representa, y es diferente a lo requerido de las funciones de utilidad ordinarias bajo certidumbre vistas antes. Para ayudar a tener en cuenta las distinciones importantes entre las dos, nos referimos a las funciones de utilidad que poseen la propiedad de utilidad esperada como *funciones de utilidad de von Neumann-Morgenstern* (VNM).

Ahora, un teorema fundamental de la teoría de la elección bajo incertidumbre.

Teorema 5.7 (Existencia de una función VNM en G) Supóngase que las preferencias sobre apuestas en G satisfacen los Axiomas 1 a 6. Luego existe una función de utilidad u: G→R que representa las preferencias en G, y que tiene la propiedad de la utilidad esperada.

Demostración Como en la prueba de la existencia de una función de utilidad que representa las preferencias del consumidor en el caso de certeza, la prueba aquí será *constructiva*.

Consideremos una apuesta arbitraria g de G. Definamos u (g) como el número que satisface

$$g \sim (u(g) \circ a_1, (1 - u(g)) \circ a_n).$$

Por axioma 3, dicho número debe existir, y por axioma 4 este número es único (demostrar esta propiedad como ejercicio). Esto entonces define una función a valor real, u, de G. (De paso, por definición, u (g) ∈ [0, 1] para todos los g.)

Queda por demostrar que u representa, y que tiene la propiedad de la utilidad esperada. Vamos a empezar con la primera de estas propiedades.

Así sean g, g´ ∈ G apuestas arbitrarias. Afirmamos que se cumplen las siguientes equivalencias:

(P.1) $g \succsim g'$ *si y sólo si*

(P.2) $(u(g) \circ a_1, (1 - u(g)) \circ a_n) \succsim (u(g') \circ a_1, (1 - u(g)) \circ a_n)$ *si y sólo si*

(P.3) $u(g) \geq u(g)$.

Para verlo, nótese que (P.1) si y sólo si (P.2) porque es transitiva, y $g \sim (u(g) \circ a_1, (1 - u(g)) \circ a_n)$*, además* $g \sim (u(g) \circ a_1, (1 - u(g)) \circ a_n)$*, ambas por definición de u. También, (P.2) si y sólo si (P.3) surge simplemente por monotonía (Axioma 4).*

Por consiguiente, $g \succsim g'$ *si y sólo si* $u(g) \geq u(g')$*, con lo cual u representa a* $\succsim$ *sobre G.*

Para completar la demostración, falta ver que u tiene la propiedad de la utilidad esperada.

Luego sean $g \in G$ *una apuesta arbitraria, y* $g_s \equiv (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n) \in G_S$ *la apuesta simple que induce. Debe mostrarse que*

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(a_i).$$

Como por el axioma 6, $g \sim g_s$*, debe tenerse* $u(g) = u(g_s)$*. Luego es suficiente mostrar que*

(P.4) $u(g_s) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(a_i)$.

Ahora bien, para cada i= 1,…, n, $u(a_i)$ *satisface*

(P.5) $a_i \sim (u(a_i) \circ a_1, (1 - u(a_i)) \circ a_n)$.

Sea q_i *la apuesta simple del 2º miembro de (P.5). O sea,* $q_i \equiv (u(a_i) \circ a_1, (1- u(a_i)) \circ a_n)$ *(i=1,..n). Consiguientemente,* $q_i \sim a_i$*, con lo cual, aplicando el axioma 5 de sustitución,*

(P.6) $g' \equiv (p_1 \circ q_1, \ldots, p_n \circ q_n) \sim (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n) = g_s$.

Ahora deseamos derivar la apuesta simple inducida por la apuesta compuesta g´. Nótese que debido a que cada q_i *puede resultar sólo en uno de los dos resultados* a_1 *o* a_n*, g´ debe resultar sólo en uno de esos dos resultados también.*

¿Cuál es la probabilidad efectiva que g asigna a a_1*? Pues bien, resultará* a_1 *si para todo i, se produce* q_i *(probabilidad* p_i*) y* a_1 *es el resultado de la apuesta* q_i *(probabilidad* $u(a_i)$*). Así, para cada i, hay una probabilidad* $p_i \, u(a_i)$ *de que resultará* a_1*. Debido a que las ocurrencias de las* q_i *son mutuamente excluyentes, la probabilidad efectiva de que resulte* a_1 *es la suma* $\sum_{i=1}^{n} p_i \, u(a_i)$*. Del mismo modo, la probabilidad efectiva de* a_n *es* $\sum_{i=1}^{n} p_i (1 - u(a_i))$*, que es igual a* $1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(a_i)$*, porque la suma de* p_i *es uno. Por lo tanto, la apuesta simple inducida por g ' es*

$$g'_s \equiv \left(\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \, u(a_i)\right) \circ a_1, \left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(a_i)\right) \circ a_n\right).$$

Por el axioma 6 de reducción, debe darse que $g' \sim g'_s$*. Pero la transitividad de* $\sim$ *junto a (P.6) implican que*

(P.7) $g_s \sim \left(\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, u\,(a_i)\right) \circ a_1, \left(1- \sum_{i=1}^{n} p_i\, u\,(a_i)\right) \circ a_n\right).$

Empero, por definición $u\,(g_s)$ *es el único número que satisface*

(P.8) $g_s \sim (u\,(g_s) \circ a_1, (1 - u\,(g_s)) \circ a_n).$

Comparando (P.7) y (P.8) se concluye $u\,(g_s) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u\,(a_i)$, *como se pretendía*. ∎

Resultado del teorema 5.7: *si las preferencias de un individuo sobre apuestas satisfacen los axiomas 1 a 6, entonces hay números que se puede asignar a los resultados de manera que el individuo prefiera una a otra apuesta si y sólo si la primera tiene una utilidad esperada más alta que la otra*.

La demostración de este teorema no sólo establece la existencia de una función de utilidad con la propiedad de la utilidad esperada, sino que también nos muestra los pasos que podría tomar en la práctica la construcción de una función de este tipo. Para determinar la utilidad de cualquier resultado a_i, sólo tenemos que preguntar a la persona la probabilidad del mejor resultado que lo dejaría indiferente entre una apuesta mejor-peor, p.ej. $(\alpha \circ a_1, (1 - \alpha) \circ a_n)$, y el resultado a_i con certeza. Repitiendo este proceso para cada $a_i \in A$, entonces podríamos calcular la utilidad asociada con cualquier apuesta $g \in G$ simplemente como la utilidad esperada que genera. Y si las preferencias del individuo satisfacen los axiomas 1 a 6, el teorema 2.7 garantiza que la función de utilidad así obtenida represente sus preferencias.

Ejemplo

Supongamos que A = {$ 10, $ 4, - $ 2}, en donde cada una de las cifras representa miles de pesos. Podemos suponer razonablemente que el mejor resultado es $ 10 y el peor es - $ 2.

Para construir la función de utilidad VNM utilizada en la demostración del Teorema 2.7, primero tenemos que idear *probabilidades de indiferencia* asociadas a cada uno de los tres resultados. Esto lo logramos componiendo las mejores y peores apuestas que ofrecen $ 10 y - $ 2 con probabilidades aún desconocidas que suman 1. Finalmente, le preguntamos al individuo para cada uno de los tres resultados lo siguiente: "*¿Qué probabilidad para el mejor resultado lo dejará indiferente entre la mejor y peor apuesta que hemos compuesto y el resultado de* a_i *con certeza?*" La respuesta que obtengamos será el número de utilidad que asignaremos a cada uno de los tres resultados finales. Supongamos que encontramos lo siguiente:

(E.1) $\$10 \sim (1 \circ \$10, 0 \circ -\$2)$, luego $u\,(\$10) \equiv 1$,
(E.2) $\$4 \sim (.6 \circ \$10, .4 \circ -\$2)$, luego $u\,(\$4) \equiv .6$,
(E.3) $-\$2 \sim (0 \circ \$10, 1 \circ -\$2)$, luego $u\,(-\$2) \equiv 0$.

Observar con cuidado que con esta asignación, la utilidad del mejor resultado debe ser siempre 1 y la del peor resultado siempre debe ser cero. *Sin embargo, la utilidad asignada a los resultados intermedios, tales como $ 4 en este ejemplo, dependerá de la actitud del individuo hacia la toma de riesgos.*

Después de haber obtenido los números de utilidad para cada uno de los tres resultados posibles, ahora tenemos todos los bits de información que necesitamos para clasificar todos los juegos que los involucran. Consideremos, por ejemplo,

(E.4) $g_1 \equiv (.2 \circ \$4, .8 \circ \$10)$,
(E.5) $g_2 \equiv (.07 \circ -\$2, .03 \circ \$4, .9 \circ \$10)$

¿Cuál de estos preferirá el individuo? Suponiendo que sus preferencias sobre las apuestas satisfagan 1 a 6, podemos apelar al Teorema 4.7. Éste nos dice que sólo tenemos que calcular la utilidad esperada de cada juego, utilizando los números de utilidad generados en (E.1) a (E.3), para averiguarlo. Al hacerlo, encontramos

$$u(g_1) = .2\, u(\$4) + .8\, u(\$10) = .92$$
$$u(g_2) = .07\, u(-\$2) + .03\, u(\$4) + .9\, u(\$10) = .918$$

Como g1 tiene la mayor utilidad esperada, ¡debe ser la apuesta preferida! De manera similar, utilizando sólo los números de utilidad generados en (E.1) a (E.3), podemos clasificar cualquiera de la infinidad de juegos que podrían construirse a partir de los tres resultados en A.

Basta con pensar un poco más acerca de la información que hemos descubierto en este ejemplo. Veamos de nuevo la respuesta cuando se pidió comparar \$ 4 con certeza con la mejor-peor apuesta en (E.2). La mejor-peor apuesta *g* ofrecida allí tiene un valor esperado de *E (g)* = (\$ 10) + (0,4) (6). (- \$ 2) = \$ 5.2. Esto supera el valor esperado \$ 4 que obtiene bajo la apuesta simple que ofrece \$ 4 con certeza, sin embargo, el individuo está indiferente entre estas dos apuestas. Como suponemos que sus preferencias son monótonas, podemos concluir inmediatamente que preferiría estrictamente los mismos \$ 4 con certeza a todas las apuestas mejor-peor que ofrecen el mejor resultado con una probabilidad de menos de 0,6.Por supuesto, esto incluye la que ofrece \$ 10 y - \$ 2 con probabilidades iguales de 0,5, a pesar de que el juego de azar y \$ 4 con certeza tienen el mismo valor esperado de \$ 4. Por lo tanto, en cierto sentido, este individuo prefiere *evitar* riesgos. Esta misma tendencia se refleja en su clasificación de g_1 y g_2 en (E.4) y (E.5), también. Allí se prefiere g_1 a g_2, aunque el primer valor esperado, E (g_1) = \$ 8,80 sea inferior al E (g_2) de este último = \$ 8,98. Aquí, g_2 se evita porque, a diferencia de g_1, incluye demasiado riesgo del peor resultado. Más tarde, seremos más precisos acerca de la prevención de riesgos y su medición, pero este ejemplo debería ayudar a ver que una función de utilidad VNM resume aspectos importantes sobre la voluntad de un individuo en asumir riesgos. □

Vamos a dar un paso atrás un momento para considerar qué hace realmente esta función de utilidad VNM y cómo se relaciona con la función de utilidad ordinaria en condiciones de certeza. En el caso estándar, si el individuo está indiferente entre dos canastas de consumo, ambas reciben el mismo número de utilidad, mientras que si una es estrictamente preferida a la otra, su número deberá ser mayor. Esto es cierto, también, de la función de utilidad VNM *u(g),* si bien hay que sustituir la palabra *combinación de bienes* por *apuesta*.

Sin embargo, en el caso de la teoría del consumidor, los números de utilidad en sí tienen un significado meramente ordinal. Cualquier transformación estrictamente monótona de una representación de utilidad produce otra representación válida. Por su parte, los números de utilidad asociados con una representación de utilidad VNM de las preferencias sobre apuestas tienen un contenido más allá de la ordinalidad.

Para ver esto, supongan que A = {a, b, c}, donde $a \succsim b \succsim c$, y que $\succsim$ satisface los axiomas 1 a 6. Por los axiomas 3 y 4, hay una $\alpha \in (0, 1)$ que satisface

$b \sim (\alpha \circ a, (1 - \alpha) \circ c)$.

Nótese también que *el número de probabilidad α se determina por, y es un reflejo de, las preferencias del decisor. Es un número significativo. No se puede duplicar, añadirle una constante, o transformarlo en cualquier forma* sin cambiar también las preferencias a las que está asociado.

Ahora, sea u alguna representación de la utilidad de VNM. Luego la relación de indiferencia anterior implica que

$$u(b) = u(\alpha \circ a, (1 - \alpha) \circ c) = \alpha\, u(a) + (1 - \alpha)\, u(c),$$

donde la segunda igualdad proviene de la propiedad de la utilidad esperada de u. Pero esta igualdad puede re-escribirse de la forma siguiente:

$$\frac{u(a) - u(b)}{u(b) - u(c)} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

En consecuencia, los cocientes de las diferencias entre los números de utilidad anteriores están determinados de forma única por α. Pero como el número α estaba unívocamente determinado por las preferencias del decisor, luego, también, sucede otro tanto con los cocientes de diferencias de utilidad.

Llegamos a la conclusión de que la razón de las diferencias de utilidad tiene un significado inherente en relación con las preferencias del individuo y deben tener el mismo valor para cada representación de utilidad de VNM. Por lo tanto, las representaciones de utilidad VNM proporcionan más que información ordinal sobre las preferencias del decisor, pues de otro modo, a través de transformaciones monótonas adecuadas, tales relaciones podrían asumir valores muy diferentes.

Claramente, entonces, una transformación estrictamente creciente de una representación de utilidad VNM podría no producir otra representación utilidad VNM. (Por supuesto, todavía se obtendrá una representación de utilidad, *pero la representación no tiene por qué tener la propiedad de la utilidad esperada*.) Se plantea entonces la siguiente pregunta: ¿cuál es la clase de representaciones de utilidad VNM de un orden de preferencia dado? A partir de las consideraciones anteriores, éstas deben preservar los ratios de las diferencias de utilidad. Como muestra el siguiente resultado, esta propiedad ofrece una caracterización completa:

Teorema 5.8 (Las Funciones de Utilidad VNM son únicas hasta una transformación afín)

Supongamos que la función de utilidad VNM $u(\cdot)$ representa $\succsim$. Luego la función de utilidad VNM $v(\cdot)$, representa aquellas mismas preferencias si y sólo si para algún escalar α y algún escalar $\beta > 0$, $v(g) = \alpha + \beta u(g)$, para todas las apuestas g.

Demostración La suficiencia es obvia (pero les sugiero que se convenzan tratando de demostrarla), por lo que sólo demostraré aquí la necesidad. Vamos a suponer que g es una apuesta simple. (Tarea para la casa: demostrar que si u y v están relacionadas linealmente para todas las apuestas simples, entonces están relacionadas linealmente para todas las apuestas.) Al igual que antes, hacemos

$$A = \{a_1 \ldots a_n\} \quad \text{y } g \equiv (p_1 \circ a_1, p_2 \circ a_2 \ldots p_n \circ a_n),$$

donde $a_1 \succsim \cdots \succsim a_n$, y $a_1 \succ a_n$.

Como $u\,(.)$ *representa las preferencias, tenemos que* $u\,(a_1) \geq \cdots \geq u\,(a_i) \geq \cdots \geq u\,(a_n)$, y $u\,(a_1) > u\,(a_n)$. *Luego, para todo* $i=1,\ldots, n$, *existe un único numero* $\alpha_i \in [0, 1]$ *tal que*

(P.1) $$u\,(a_i) = \alpha_i\, u\,(a_1) + (1 - \alpha_i)\, u\,(a_n).$$

Nótese que $\alpha_i > 0$ *si y solamente si* $a_i \succ a_n$.

Ahora bien, como $u\,(.)$ *tiene la propiedad de la utilidad esperada, (P.1) implica:*

$$u\,(a_i) = u\,(\alpha_i \circ a_1, (1 - \alpha_i) \circ a_n),$$

lo cual, como $u\,(.)$ *representa las preferencias, significa que*

(P.2) $$a_i \sim (\alpha_i \circ a_1, (1 - \alpha_i) \circ a_n),$$

y, como $v\,(.)$ *también las representa, se tiene que verificar*

$$v\,(a_i) = v\,(\alpha_i \circ a_1, (1 - \alpha_i) \circ a_n).$$

Como $v\,(.)$ *tiene la propiedad de la utilidad esperada, esto implica:*

(P.3) $$v\,(a_i) = \alpha_i\, v\,(a_1) + (1 - \alpha_i)\, v\,(a_n).$$

(P.1) y *(P.3) implican:*

(P.4) $$\frac{u\,(a_1) - u\,(a_i)}{u\,(a_i) - u\,(a_n)} = \frac{(1 - \alpha_i)}{\alpha_i} = \frac{v\,(a_1) - v\,(a_i)}{v\,(a_i) - v\,(a_n)}$$

para todos los $i=1,\ldots, n$ *tales que* $a_i \succ a_n$ *(o sea, tales que* $\alpha_i > 0$*).*

De (P.4) se concluye que

(P.5) $$(u\,(a_1) - u\,(a_i))\,(v\,(a_i) - v\,(a_n)) = (v\,(a_1) - v\,(a_i))\,(u\,(a_i) - u\,(a_n))$$

si $a_i \succ a_n$. *Pero, (P.5) será válida aún cuando* $a_i \sim a_n$ *porque en este caso* $u\,(a_i) = u\,(a_n)$ *y* $v(a_i) = v(a_n)$. *Luego, (P.5) vale para todo* $i = 1,\ldots, n$.

Reacomodando (P.5) tenemos

(P.6) $$v\,(a_i) = \alpha + \beta\, u\,(a_i), \text{ para todo } i = 1,\ldots, n$$

donde $$\alpha \equiv u\,(a_1)\, v(a_n) - v\,(a_1)\, u\,(a_n)\; u(a_1) - u\,(a_n)$$

$$\beta \equiv v\,(a_1) - v\,(a_n)\; u\,(a_1) - u\,(a_n)\,.$$

Nótese que tanto α *y* β *son constantes (independientes de i), y que* β *es positiva.*

Luego, para cualquier apuesta g, si $(p_1 \circ a_1,\ldots, p_n \circ a_n)$ *es la*

Oskar Morgenstern (1902-1977)
Colaborador de von Neumann
Racionalidad de von Neumann-Morgenstern

apuesta simple inducida por g:

$$v(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, v(a_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, (\alpha + \beta\, u(a_i))$$
$$= \alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(a_i) = \alpha + \beta\, u(g),$$

donde la primera y la última igualdad proceden porque v (.) y u (.) tienen la propiedad de la utilidad esperada, y la segunda igualdad vale a causa de (P.6). ∎

El teorema 5.8 nos dice que las funciones de utilidad VNM no son completamente únicas, ni tampoco completamente ordinales. Todavía podemos hallar una infinidad que colocará las apuestas precisamente en el mismo orden, teniendo también la propiedad de la utilidad esperada. Pero a diferencia de las funciones de utilidad comunes para las cuales exigimos solamente una escala numérica a fin de preservar el orden, aquí debemos limitarnos a transformaciones que multiplican por un número positivo y / o añaden un término constante si también queremos preservar la propiedad de la utilidad esperada.

Sin embargo, la menor que completa cardinalidad de la función de utilidad VNM no nos debe tentar a adjudicar una importancia indebida al nivel absoluto de la utilidad de un juego de azar, o a la diferencia de utilidad entre una apuesta y otra. Con lo poco que se requirió de comparaciones binarias del agente entre apuestas en la relación de preferencia subyacente, aún no se pueden utilizar las funciones de utilidad VNM para comparaciones interpersonales de bienestar, ni es posible medir la "intensidad" con la que se prefiere una apuesta a otra.

3) *Aversión al Riesgo*

En la página 27 vimos un ejemplo donde argumentamos que la función de utilidad VNM refleja un deseo de evitar riesgos. Ahora estamos preparados para definir y describir la aversión al riesgo de manera más formal. Para eso, limitaremos nuestra atención a apuestas cuyos resultados consistirán de diferentes cantidades de riqueza. Además, será útil tomar como el conjunto de resultados, A, a todos los niveles de riqueza no negativos. Por lo tanto, $A = R_+$. A pesar de que el conjunto de resultados contiene ahora un número infinito de elementos, seguimos considerando apuestas que dan lugar solamente a un número finito de resultados con una probabilidad efectiva estrictamente positiva. En particular, una apuesta simple toma la forma $(p_1 \circ w_1, \ldots, p_n \circ w_n)$, donde n es un entero positivo, los w_i son niveles de riqueza no negativos, y las probabilidades no negativas, $p_1, \ldots, p_n$, suman 1. Finalmente, supondremos que la función de utilidad VNM del individuo, $u(\cdot)$, es diferenciable con $u'(w) > 0$ para todos los niveles de riqueza w.

Ahora se investiga la relación entre una función de utilidad VNM y la actitud hacia el riesgo del agente. El *valor esperado de la apuesta simple* g que ofrece w_i con probabilidad p_i está dado por $E(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, w_i$. Ahora supongamos que el agente se da a elegir entre aceptar la apuesta g de un lado o recibir con *certeza* el valor esperado de g en el otro. Si $u(\cdot)$ es la función de utilidad VNM del agente, podemos evaluar estas dos alternativas de la siguiente manera:

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(w_i),$$
$$u(E(g)) = u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, w_i\right).$$

La primera de ellas es la utilidad VNM de la apuesta, y la segunda es la utilidad VNM del valor esperado de la apuesta. Si las preferencias satisfacen los axiomas del 1 al 6, sabemos que el agente prefiere la alternativa con la utilidad esperada mayor. *Cuando alguien prefiere recibir el valor esperado de una apuesta con certeza antes que someterse al riesgo inherente a la propia apuesta, decimos que es adverso, intolerante o reacio al riesgo*. Por supuesto, las personas pueden mostrar una indiferencia completa al riesgo, o incluso una atracción por el riesgo, y seguir siendo coherentes con los axiomas 1 a 6. Catalogamos estas diversas posibilidades, y definimos los términos con precisión, en lo que sigue.

Como se comentó después de la definición dada antes, una función de utilidad VNM en G está completamente determinada por los valores que asume en el conjunto de resultados, A. En consecuencia, las características de la función de utilidad VNM de un individuo sobre el conjunto de apuestas simples por sí solas proporcionan una descripción completa de las preferencias del individuo sobre todas las apuestas. Por ello, es suficiente concentrarse en el comportamiento de u en G_S para capturar las actitudes de un individuo hacia el riesgo. Esto, y la discusión precedente, motivan la siguiente definición.

Aversión al riesgo, Neutralidad al riesgo, y Tolerancia al riesgo

Sea u (·) sea función de utilidad VNM de un individuo para apuestas con respecto a niveles no negativos de riqueza. Luego para la apuesta sencilla $g = (p_1 \circ w_1,..., p_n \circ w_n)$, se dice que el individuo es

1. *adverso al riesgo en g si $u (E (g))> u (g)$,*
2. *neutro al riesgo en g si $u (E (g)) =u (g)$,*
3. *tolerante del riesgo en g si $u (E (g)) < u (g)$.*

Si por cada apuesta sencilla no degenerada, g, el individuo es, por ejemplo, adverso al riesgo en G, entonces el individuo se dice simplemente que es adverso al riesgo (o adverso al riesgo en G para dar énfasis). Del mismo modo, un individuo puede ser definido como neutro al riesgo y tolerante del riesgo (en G).

Cada una de estas actitudes frente al riesgo es equivalente a una propiedad particular de la función de utilidad VNM. En los ejercicios, se pedirá demostrar que el agente es adverso al riesgo, neutral al riesgo o tolerante al riesgo sobre algún subconjunto de apuestas si y sólo si su función de utilidad VNM es estrictamente cóncava, lineal, o estrictamente convexa, respectivamente, sobre el adecuado dominio de riqueza.

Para ayudar a ver la primera de estas afirmaciones, consideremos una apuesta sencilla que involucra dos resultados:

$$g \equiv (p \circ w_1, (1 - p) \circ w_2).$$

Supongamos ahora que al individuo se le ofrece una elección entre recibir una riqueza igual a $E (g) = pw_1 + (1 - p) w_2$ con certeza o la recepción de la apuesta g en sí. Podemos evaluar las alternativas de la siguiente manera:

$$u (g) = p\, u (w_1) + (1 - p)\, u (w_2)$$

$$(E (g)) = u (pw_1 + (1 - p) w_2).$$

Ahora miremos la Fig. 5.6. Allí hemos dibujado una cuerda entre los dos puntos R = (w_1, $u(w_1)$) y S = (w_2, $u(w_2)$), y situado su combinación convexa, T= pR+(1 - p)S. La abscisa de T debe ser *E (g)* y su ordenada debe ser *u (g)*. (Convencerse de que esto es así. La propiedad surge fácilmente de las figuras semejantes.) A continuación, se puede localizar *u(E(g))* en el eje vertical usando la gráfica de la función *u (w)* como se indica. La función de utilidad VNM en la Fig. 5.6 Se ha dibujado estrictamente cóncava en la riqueza sobre la región correspondiente. Como se puede ver, *u (E (g))> u (g)*, por lo que el individuo tiene aversión al riesgo.

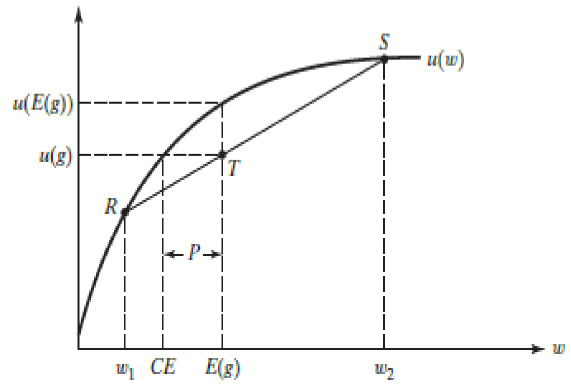


Figura 5.6 Aversión al riesgo y concavidad estricta de la f. de utilidad de vNM

En la Fig. 5.6, el individuo prefiere *E (g)* con certeza a la apuesta *g* en sí. Sin embargo, habrá una cierta cantidad de riqueza que podríamos ofrecer con certeza que lo dejaría indiferente entre aceptar la riqueza con certeza y enfrentar la apuesta *g*. A esta cantidad de riqueza la llamaremos el *equivalente cierto* de la apuesta *g*. Cuando una persona tiene aversión al riesgo y prefiere estrictamente más dinero a menos, es fácil demostrar que el equivalente de certeza es menor que el valor esperado de la apuesta, *y se pide hacer esto en los ejercicios*. En efecto, una persona con aversión al riesgo va a *pagar* cierta cantidad positiva de riqueza para evitar el riesgo inherente de la apuesta. Esta disposición al pago para evitar el riesgo se mide por la *prima al riesgo*, medida en color verde en el gráfico. El equivalente cierto y la prima al riesgo, ambos ilustrados en la Fig. 5.6, están definidos en lo que sigue.

Equivalente cierto y prima al riesgo

El equivalente cierto de cualquier apuesta simple *g* a lo largo de los niveles de riqueza es una cantidad de riqueza, *EC*, ofrecida con certeza, tal que *u (g) ≡ u (EC)*. La prima al riesgo es una cantidad de riqueza, *P*, tal que *u (g) ≡ u (E (g) - P)*. Claramente, *P ≡ E (g) -EC.*

<u>*Ejemplo*</u> Supongamos que $u(w) \equiv \ln(w)$. Dado que ésta es estrictamente cóncava en la riqueza, el individuo tiene aversión al riesgo. Sea *g* una oferta con probabilidad 50-50 de ganar o perder una cierta cantidad de riqueza, *h*, de modo que si la riqueza inicial del individuo es w_0, $g \equiv ((1/2) \circ (w_0 + h), (1/2) \circ (w_0 - h))$, donde observamos que $E(g) = w_0$. El equivalente cierto de *g* debe satisfacer

$$\ln(EC) = (1/2)\ln(w_0 + h) + (1/2)\ln(w_0 - h) = \ln(w_0^2 - h^2)^{1/2}.$$

Por lo tanto, $EC = (w_0^2 - h^2)^{1/2} < E(g)$ y $P = w_0 - (w_0^2 - h^2)^{1/2} > 0$. □

Muchas veces, no sólo se desea saber si alguien tiene aversión al riesgo, sino también cuán adverso al riesgo es. Idealmente, nos gustaría una medida resumen que nos permita comparar el grado de aversión al riesgo entre los individuos y evaluar cómo el grado de aversión al riesgo de un solo individuo puede variar con el nivel de su riqueza. Debido a que la aversión al riesgo y la concavidad de la función de utilidad de la riqueza VNM son equivalentes, la candidata al parecer más natural para una medida de este tipo sería la segunda derivada,

$u''(w)$, una medida básica de la curvatura de la función. Se puede pensar que cuanto mayor sea el valor absoluto de esta derivada, mayor será el grado de aversión al riesgo.

Pero esto no es suficiente. Aunque el signo de la segunda derivada nos dice si la persona tiene aversión al riesgo, tolerancia al riesgo, o neutralidad al riesgo, su tamaño es totalmente arbitrario. El teorema 5.8 mostró que las funciones de utilidad VNM son únicas hasta transformaciones afines. Esto significa que para cualquier preferencia dada, se puede obtener prácticamente un tamaño de derivada segunda deseado a través de la multiplicación de $u(\cdot)$ por una constante positiva adecuadamente elegida. Con ésta y otras consideraciones en mente, Pratt (1964) y Arrow (1970) han propuesto la siguiente medida de aversión al riesgo.

Kenneth Joseph Arrow
Nobel 1972 (1921-2017)
[Social Choice and Individual Values](#) (2d ed.)

Medida Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo[6] *La medida Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo viene dada por*

$$R_a(w) = \frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

Nótese que el signo de esta medida nos dice de inmediato la actitud básica hacia el riesgo: $R_a(w)$ es positiva, negativa o cero si el agente es adverso al riesgo, tolerante del riesgo, o neutral hacia el riesgo, respectivamente. Además, cualquier transformación afín positiva de la utilidad dejará a la medida sin cambios: la adición de una constante no afecta ni al numerador ni al denominador; la multiplicación por una constante positiva afecta tanto al numerador como al denominador, pero deja sin cambios el cociente.

Para demostrar la eficacia de la medida de Arrow-Pratt de aversión al riesgo, se mostrará que los consumidores con mayores medidas de Arrow-Pratt son de hecho más adversos al riesgo en una relación que es conductualmente significativa: tienen equivalentes ciertos más reducidos y están dispuestos a aceptar un menor número de apuestas. Para apreciarlo, supongan que hay dos consumidores, 1 y 2, que el consumidor 1 tiene una función de utilidad VNM $u(w)$, y la función de utilidad de VNM del consumidor 2 es $v(w)$. La riqueza, w, puede asumir cualquier valor no negativo. Supongamos ahora que para cada nivel de riqueza, w, la medida Arrow-Pratt de aversión al riesgo del consumidor 1 es más alta que la del consumidor 2. Es decir,

$$R_a^1(w) = -(u''(w)/u'(w)) > -(v''(w)/v'(w)) = R_a^2(w) \tag{5.12}$$

donde suponemos que u' y v' son estrictamente positivas.

[6] Sobre la medida de Arrow-Pratt, ver Louis Eeckhoudt, *Arrow-Pratt's risk aversion: 50 years later*.

Si $v(w)$ toma valores en toda la extensión $[0, \infty)$, podemos definir $h: [0, \infty) \to R$ como sigue: $h(x) = u(v^{-1}(x))$ para todo $x \geq 0$. Por lo tanto, h hereda dos veces la diferenciabilidad de u y v con

$$(5.13) \quad h(x) = u(v^{-1}(x))/ v'(v^{-1}(x))>0, \text{ y}$$

$$(5.14) \quad h''(x) = u(v^{-1}(x)) [u(v^{-1}(x))/u(v^{-1}(x)) - v(v^{-1}(x))/v(v^{-1}(x))]/ [v'(v^{-1}(x))]^2>0.$$

para todo x> 0, donde la primera desigualdad vale porque u', $v' > 0$, y la segunda sigue por (5.12). Por lo tanto, h es una función estrictamente creciente, estrictamente cóncava.

Ahora consideramos una apuesta sobre los niveles de riqueza $(p_1 \circ w_1,..., p_n \circ w_n)$. Vamos a usar (5.13) y la concavidad de h para mostrar que el equivalente cierto de 1 es menor que el del consumidor 2. Para verlo, vamos a denotar $\hat{w}_i$ al equivalente cierto del consumidor i, o sea

$$(5.15) \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(w_i) = u(\hat{w}_1),$$
$$(5.16) \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i\, v(w_i) = v(\hat{w}_2).$$

Hay que demostrar que $\hat{w}_1 < \hat{w}_2$.

Poniendo $x= v(w)$ en (5.13) y usando (5.14) nos da

$$u(\hat{w}_1) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i\, h(v(w_i)) < h\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, v(w_i)\right) = h(v(\hat{w}_2)) = u(\hat{w}_2),$$

donde la desigualdad surge por la desigualdad de Jensen, debido a que h es estrictamente cóncava, y las dos igualdades siguientes provienen de (5.15) y (5.13), respectivamente. Luego, $u(\hat{w}_1) < u(\hat{w}_2)$, como se deseaba. Concluimos que el equivalente cierto del consumidor 1 para cualquier apuesta dada es inferior al del consumidor 2. Y de aquí se deduce fácilmente que si los consumidores 1 y 2 tienen la misma riqueza inicial, entonces el consumidor 2 (con la menor medida global de Arrow-Pratt) aceptará más apuestas que el consumidor 1. Es decir, el consumidor 1 estará dispuesto a aceptar un menor número de apuestas que el consumidor 2.

Por último, cabe destacar que, de paso, también hemos demostrado que (5.12) implica que la función de utilidad VNM del consumidor 1 es *más cóncava* que la del consumidor 2 en el sentido de que (una vez más poniendo $x = v(w)$ en (5.13)):

$$(5.16) \qquad u(w) = h(v(w)) \text{ para todo } w \geq 0$$

donde, como se recordará, h es una función estrictamente cóncava. Luego, (5.16) expresa que u es una *concavización* de v. Es otra forma de expresar que el consumidor 1 es más intolerante al riesgo que el consumidor 2.

$R_a(w)$ es sólo una medida **local** de la aversión al riesgo, por lo que no tiene por qué ser la misma a todos los niveles de riqueza. De hecho, se espera que las actitudes hacia el riesgo, y luego la medida de Arrow-Pratt, normalmente variarán con la riqueza, y varíen de forma "sensible". Arrow ha propuesto una clasificación sencilla de funciones de utilidad VNM (o segmentos de funciones de utilidad) de acuerdo con la forma en que $R_a(w)$ varía con la riqueza. Yendo al grano, se dice que una función de utilidad VNM muestra *aversión al riesgo absoluta* sobre un dominio de riqueza que resulta constante, decreciente, o creciente si, en ese intervalo, R_a *(w)* se mantiene constante, disminuye o aumenta con un aumento de la riqueza, respectivamente.

La disminución de la aversión al riesgo absoluta (DARA) es generalmente una restricción razonable a imponer. Con aversión constante al riesgo absoluta, no habría una mayor disposición a aceptar una pequeña apuesta en los niveles más altos de riqueza, y bajo aversión al riesgo absoluto creciente, tendríamos un comportamiento bastante perverso: cuanto mayor sea la riqueza, más reacio se vuelve uno a aceptar una pequeña apuesta. DARA impone la más plausible restricción de que el individuo sea menos reacio a tomar riesgos pequeños a los niveles más altos de riqueza.

Ejemplo *Consideren la posibilidad de un inversor que debe decidir qué parte de su riqueza inicial w coloca en un activo de riesgo. El activo de riesgo puede tener cualquiera de las tasas positivas o negativas de retorno* r_i *con probabilidades* p_i, $i = 1,\dots, n$. *Si* β *es la cantidad de riqueza a poner en el activo riesgoso, la riqueza resultante final bajo será* $(w - \beta) + (1 + r_i)\,\beta = w + \beta r_i$. *El problema del inversor es elegir* β *para maximizar la utilidad esperada de la riqueza. Podemos escribir esto formalmente como un problema de optimización de una sola variable*

$$(E.1) \qquad \max_\beta \sum_{i=1}^n p_i\, u\,(w + \beta r_i) \text{ sujeto a } \quad 0 \leq \beta \leq w$$

En primer lugar, determinamos bajo qué condiciones un inversor con aversión al riesgo decidirá no colocar riqueza alguna en el activo riesgoso. En este caso, tendríamos una solución de esquina, donde la función objetivo en (E.1) alcanza un máximo en $\beta^* = 0$, *por lo que su primera derivada debe ser no creciente allí. Diferenciando la utilidad esperada en (E.1) con respecto a* β, *a continuación, evaluando en* $\beta^* = 0$, *por lo tanto, debemos tener*

$$\sum_{i=1}^n p_i\, u'\,(w+ \beta^* r_i)\, r_i = u'(w) \sum_{i=1}^n p_i\, r_i \leq 0$$

La suma del 2º miembro es el rendimiento esperado de los activos de riesgo. Como u' (W) debe ser positiva, el rendimiento esperado debe ser no positivo. Como se puede verificar fácilmente que la concavidad de u en la riqueza es suficiente para asegurar la concavidad (E.1) en β, *llegamos a la conclusión de que un individuo con aversión al riesgo se abstendrá completamente del activo riesgoso si y sólo si ese activo tiene un rendimiento esperado no positivo. Alternativamente, se puede afirmar que un inversor adverso al riesgo siempre preferirá colocar algo de riqueza en un activo de riesgo con un rendimiento esperado estrictamente positivo.*

Supongamos ahora que el activo de riesgo tiene un retorno esperado positivo. Como hemos visto, esto significa que podemos descartar $\beta^* = 0$. *Supongamos también que* $\beta^* < w$. *Las condiciones de primero y segundo orden para un máximo interior de (E.1) nos dicen que*

$$(E.2) \qquad \sum_{i=1}^n p_i\, u'\,(w + \beta^* r_i)\, r_i = 0$$

$$(E.3) \qquad \sum_{i=1}^n p_i\, u''\,(w + \beta^* r_i)\, r_i^2 < 0,$$

respectivamente, donde la desigualdad (E.3) es estricta a causa de la aversión al riesgo.

Ahora nos preguntamos qué ocurre con la cantidad de riqueza dedicada al activo riesgoso a medida que aumenta la riqueza. Un empirismo informal sugiere que a medida que aumenta la riqueza, se coloca una mayor cantidad absoluta de riqueza en activos de riesgo, es *decir, que los activos de riesgo son bienes "normales" en lugar de "inferiores". Vamos a demostrar que esto es así en virtud de DARA. Viendo a β^* como función de w, diferenciando (E.2) con respecto a w, encontramos que*

$$(E.4) \qquad \frac{d\beta*}{dw} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r^2}$$

La aversión al riesgo asegura que el denominador de (E.4) será negativo, por lo que los activos riesgosos serán "normales" sólo cuando el numerador también sea negativo. DARA es suficiente para asegurar esto. Para ver esto, téngase en cuenta que la definición de $R_a(w+\beta^* r_i)$ implica

$$(E.5) \qquad -u''(w+\beta^* r_i)\, r_i \equiv R_a(w+\beta^* r_i)\, r_i\, u(w+\beta^* r_i), \qquad i = 1,\ldots, n.$$

Con DARA, $R_a(w) > R_a(w+\beta^* r_i)$ siempre que $r_i > 0$, y $R_a(w) < R_a(w+\beta^* r_i)$ siempre que $r_i < 0$. Multiplicando m. a m. por r_i, se obtiene en ambos casos,

$$(E.6) \qquad R_a(w) r_i > R_a(w+\beta^* r_i)\, r_i,\ i = 1,\ldots, n.$$

Sustituyendo $R_a(w+\beta^* r_i)$ por $R_a(w)$ en (E.5), usando (E.6) se tiene:

$$-u(w+\beta^* r_i)\, r_i < R_a(w)\, r_i\, u(w+\beta^* r_i),\ i = 1,\ldots, n.$$

Finalmente, tomamos la esperanza matemática m. a m.:

$$(E.7) \qquad -\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i)\, r_i < R_a(w) \sum_{i=1}^{n} p_i r_i u(w+\beta^* r_i) = 0,$$

donde la última desigualdad procede por (E.2). Luego, el comportamiento es evidencia de DARA, (E.4) es positivo y cada vez más riqueza será asignada al activo riesgoso.□

Ejercicio Un individuo con aversión al riesgo, con riqueza inicial w_0 y función de utilidad VNM u (·) debe decidir si, y por cuánto, asegurará su coche. La probabilidad de que vaya a tener un accidente y sufrir pérdida monetaria por daños \$L es $\alpha \in (0, 1)$. ¿Cuánto seguro, x, debe comprar?

*Por supuesto, la respuesta depende del **precio** al que el seguro está disponible. Supongamos que el seguro está disponible a un precio actuarialmente justo, es decir, que las compañías de seguros tienen ganancias esperadas cero. Ahora bien, si ρ denota la tasa a la que cada peso de seguro puede ser comprado, los beneficios esperados de la compañía de seguros por peso de seguros vendidos (suponiendo costo cero) serán = $\alpha(\rho - 1) + (1 - \alpha)\rho$. Haciendo esto igual a cero implica que $\rho = \alpha$.*

Así pues, con el precio por cada peso de seguro igual a α, ¿cuál será la cantidad de seguro comprada por este individuo adverso al riesgo? Como es un maximizador de utilidad esperada, elegirá aquella cantidad de seguros, x, para maximizar su utilidad esperada,

$$(E.1) \qquad \alpha\, u(w_0 - \alpha x - L + x) + (1-\alpha)\, u(w_0 - \alpha x).$$

Diferenciado (E.1) con respecto a x y haciendo igual a 0:

$$(1-\alpha)\, \alpha\, u'(w_0 - \alpha x - L + x) - \alpha\, (1-\alpha)\, u'(w_0 - \alpha x) = 0,$$

que, dividido por $(1-\alpha)\,\alpha$, da lugar a:

$$u'(w_o - \alpha x - L + x) = u'(w_o - \alpha x).$$

Pero como el individuo es adverso al riesgo, u" <0, por lo que la utilidad marginal de la riqueza u' es estrictamente decreciente en la riqueza. En consecuencia, la igualdad de la utilidad marginal de la riqueza precedente implica la igualdad de los propios niveles de riqueza, - ya que la función u' es biyectiva - es decir,

$$w_o - \alpha x - L + x = w_o - \alpha x$$

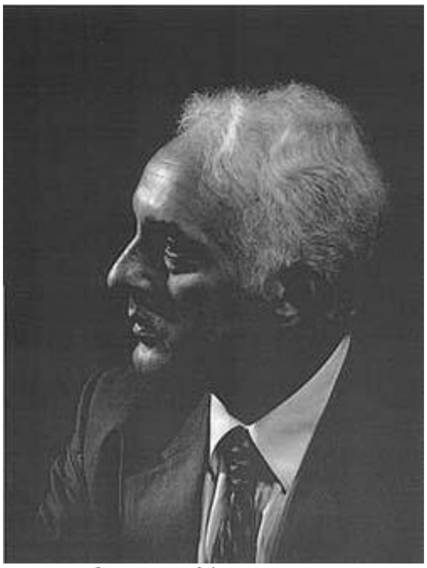
lo que implica $x = L$. *En consecuencia, si dispone de un seguro actuarialmente justo, un individuo con aversión al riesgo se asegura totalmente contra todo riesgo. Nótese que en el óptimo, la riqueza del individuo es constante e igual a* $w_o - \alpha L$, *tenga o no un accidente.* □

Ejercicios

1.- Derivar la función de utilidad directa del consumidor si su función de utilidad indirecta tiene la forma $v(\mathbf{p}, y) = y\, p_1^{\alpha}\, p_2^{\beta}$ para α y β negativos.

2.- Un consumidor tiene la función de gasto $e(p_1, p_2, u) = up_1\, p_2 /(p_1+p_2)$. Hallar una función de utilidad directa $u(x_1, x_2)$ que racionaliza la conducta de demanda de esta persona.

3.- Derivar las funciones de demanda *inversas*, $p_1(x_1, x_2)$ y $p_2(x_1, x_2)$, cuando la función de utilidad tiene la forma Cobb-Douglas, $u(x_1, x_2) = A\, x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ para $0<\alpha<1$.



Sydney N. Afriat Home page

4.- El consumidor compra la canasta $\mathbf{x}^i$ a un precio $\mathbf{p}^i$, i = 0, 1. Por separado para las partes (a) a (d), deberá indicarse si las opciones indicadas satisfacen el WARP.

(a) $\mathbf{p}^0 = (1, 3)$, $\mathbf{x}^0 = (4, 2)$; $\mathbf{p}^1 = (3, 5)$, $\mathbf{x}^1 = (3, 1)$.

(b) $\mathbf{p}^0 = (1, 6)$, $\mathbf{x}^0 = (10, 5)$; $\mathbf{p}^1 = (3, 5)$, $\mathbf{x}^1 = (8, 4)$.

(c) $\mathbf{p}^0 = (1, 2)$, $\mathbf{x}^0 = (3, 1)$; $\mathbf{p}^1 = (2, 2)$, $\mathbf{x}^1 = (1, 2)$.

(d) $\mathbf{p}^0 = (2, 6)$, $\mathbf{x}^0 = (20, 10)$; $\mathbf{p}^1 = (3, 5)$, $\mathbf{x}^1 = (18, 4)$.

5.- Considere el problema de asegurar un activo contra robo. El valor del activo es \$ D, el costo del seguro es \$ I por año, y la probabilidad de robo es p. Enumerar los cuatro resultados en el conjunto A asociado a esta situación de riesgo. Caracterizar la elección entre el seguro y sin seguro como una elección entre dos apuestas, cada una involucrando los cuatro resultados en A, donde las apuestas difieren sólo en las probabilidades asignadas a cada resultado.

6.- Demostrar que un individuo es neutral al riesgo si y sólo si cada una de las condiciones siguientes se satisface:

(a) La función de utilidad VNM es lineal en la riqueza.
(b) $C = E(g)$ para todo g ∈ G.
(c) $P = 0$ para todo g ∈ G.

¿Cuáles son las tres condiciones necesarias y suficientes equivalentes para los tolerantes al riesgo?

7.- Otra medida de la aversión al riesgo ofrecida por Arrow y Pratt es su medida de aversión al riesgo relativa, $R_r(w) \equiv R_a(w)\, w$. ¿En qué sentido es $R_r(w)$ una *elasticidad*? Si $u(w)$ muestra aversión al riesgo relativa constante, ¿qué forma funcional debe tener?

8.- Un agente con vida infinita debe escoger el plan de consumo de toda su vida. Notación: x_t es el gasto de consumo en el período t, y_t es el ingreso esperado en el periodo t, y $r > 0$, es la tasa de interés del mercado en el que el agente puede tomar prestado o prestar libremente. La función de utilidad intertemporal del agente toma la forma aditivamente separable

$$u^*(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t\, u(x_t),$$

donde $u(x)$ es creciente y estrictamente cóncava, y $0 < \beta < 1$. La restricción presupuestaria intertemporal requiere que el valor actual de los desembolsos no supere el valor actual de la renta:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left(1/1+r\right)^t x_t \leq \sum_{t=0}^{\infty} \left(1/1+r\right)^t y_t$$

(a) ¿Cuál es la interpretación del parámetro β?

(b) Escribir las condiciones de primer orden para una elección óptima del consumo en t.

(c) Suponiendo que el consumo en todos los demás períodos se mantiene constante, trazar una curva de indiferencia que muestre el trade-off intertemporal entre x_t y x_{t+1}. Justificar cuidadosamente la pendiente y la curvatura que se ha representado.

(d) ¿Cómo varía el consumo del período t con los cambios en la tasa de interés?

(e) Muestre que la utilidad de por vida (u^*) siempre aumenta con un aumento del ingreso en cualquier período.

(f) Suponga que $\beta = 1/(1 + r)$. ¿Cuál es el plan de consumo del agente?

(g) Describa el plan de consumo del agente cuando $\beta > 1/(1 + r)$ y si $\beta < 1/(1 + r)$.

(Ver Tratado de Microeconomía, Capítulo VIII).

9.- Sea la siguiente versión bi-periódica del modelo presentado en el ejercicio precedente.

$$u(x_t) = -\tfrac{1}{2}(x_t - 2)^2 \quad t=0, 1.$$

(a) Si $y_0 = 1$, $y_1 = 1$, y $\beta = 1/(1 + r)$, obtener el consumo óptimo de cada período y calcular el nivel de utilidad de por vida logrado por el agente.

Suponga ahora que el agente conoce el ingreso del período inicial $y_0 = 1$, pero tiene incertidumbre sobre el nivel que podría alcanzar en el período próximo. Podría llegar a ser tan alto como $y_1^A = 3/2$; o tan bajo como $y_1^B = 1/2$. Sabe que será alto con probabilidad ½. Su problema, hoy, es elegir el nivel de consumo inicial, x_0; el consumo futuro si el ingreso es alto, x_1^A, y el consumo futuro si el ingreso es bajo, x_1^B, buscando maximizar su utilidad esperada intertemporal.

(b) De nuevo, suponiendo que $\beta = 1/(1 + r)$, formule el problema de optimización del agente obteniendo el plan de consumo óptimo y el nivel de utilidad de por vida.

(c) ¿Cómo se explica cualquier diferencia o similitud en sus respuestas a las partes (a) y (b)?