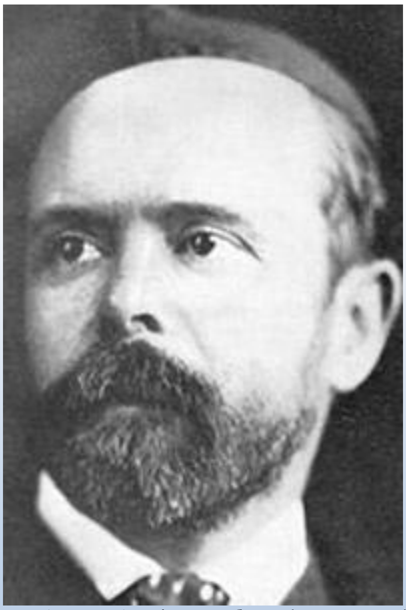
El Modelo de Intercambio de Walras [1]

Este capítulo constituye un resumen de la importante contribución de Léon Walras a la microeconomía moderna. Constituye un punto culminante de la evolución teórica de nuestra disciplina. Por tal motivo, les sugiero seguir su lectura acompañada de material complementario. Me parece oportuno comentarles que, en el siglo pasado hubo grandes aportes que permiten una mejor apreciación de su trabajo principal, los *Éléments d'Économie Politique Pure*. Esta obra merece ser leída en el original, pero, claro, está en francés. Hay una edición electrónica de esta obra bajo el título Léon Walras, Théorie Mathématique de la Richesse Sociale, 1883, hecha por Gallica. Entre las extensiones del siglo pasado está la teoría del equilibrio general de K. Arrow y G. Debreu a la que nos referiremos en el próximo capítulo, y un breve y preciso documento de Oscar Lange, Price Flexibility and Employment (Bloomington, Indiana: The Principia Press, 1944). Mi exposición se basará en gran medida en el aporte del economista Michio Morishima (1977) *Walras' economics: a pure theory of capital and money*, a quien ya consultamos cuando hablamos sobre la teoría económica de Karl Marx.



Marie Esprit Léon Walras (1834-1910)
La Ley de Walras con intercambio puro (2m 25s)

1. Léon Walras, algunos elementos biográficos

En 1874 apareció la obra capital del economista Léon Walras, *Éléments d'Économie Politique Pure*. Esta obra introdujo muchos de los conceptos hoy utilizados en la teoría del equilibrio económico. Posteriormente, Karl Gustav Cassel (1918) y Abraham Wald (1936) ampliaron y corrigieron su tratamiento. Hacia 1950 hubo un resurgimiento de interés en su teoría, cuando se desarrollaron los primeros esquemas con tecnologías lineales y problemas de existencia. Con Arrow, Debreu y Koopmans el modelo (denominado desde entonces de Walras-Cassel) fue integrado con la tradición paretiana y se transformó en el **modelo neo-walrasiano**.

Walras era hijo del economista francés **Auguste Walras**. Auguste era un maestro de escuela y no ejercía como economista profesional, aunque su pensamiento económico tuvo un profundo efecto sobre el de su hijo. Pensaba que el valor de los bienes quedaba determinado comparando su escasez con las necesidades humanas. Walras también heredó de su padre sus intereses por las reformas sociales. Como los socialistas Fabianos, Walras deseaba nacionalizar la tierra, creyendo que de esa manera aumentaría su valor y que las rentas derivadas de la misma serían suficientes para mantener al país sin introducir impuestos. Otra influencia importante fue la de **Augustin Cournot**, compañero de estudios. A través de Cournot Walras quedó bajo la influencia del racionalismo francés y comenzó a utilizar matemáticas en economía. Cournot había creado relaciones funcionales en las cuales las "cantidades están vinculadas con los precios de demanda y con los costos." También había sugerido la existencia de curvas de demanda decrecientes.

[1] He incluido solamente algunas secciones del capítulo XIX del *Tratado de Microeconomía*, limitándome a exponer sólo aspectos vinculados con el modelo de intercambio. La primera sección la he tomado del website de la New School.

Aunque Walras llegó a ser considerado como uno de los tres líderes de la revolución marginalista, no estaba familiarizado con las otras dos grandes figuras del marginalismo, William Stanley Jevons y Carl Menger, y de hecho desarrolló sus teorías de forma independiente. En 1874 y 1877 publicó sus "Elementos de Economía Pura", una obra que lo encaramó como el padre de la teoría del equilibrio económico general. El problema que Walras se propuso resolver había sido presentado por Cournot, quien podía demostrar cómo se comportaban los mercados en forma individual, pero ignoraba cómo los bienes podían interactuar unos con otros afectando a la oferta y la demanda. Walras creó un sistema de ecuaciones simultáneas intentando resolver el problema de Cournot, pero reconoció que aunque el sistema fuera el correcto, el número de incógnitas y la carencia de información lo hacían insoluble.

Cuando pasó a ser profesor de la Universidad de Lausanne, en Suiza, Walras fundó, bajo la dirección de su discípulo italiano, el economista y sociólogo Vilfredo Pareto, la que luego sería conocida como la **escuela de economía de Lausanne**. Por mucho tiempo las publicaciones de Walras sólo estuvieron disponibles en francés, lo que implicó que sólo una pequeña parte de la profesión estuviera familiarizada con sus trabajos. A partir de los años 1950, la situación cambió gracias a la obra de William Jaffé, traductor de las principales obras de Walras, y editor de su Correspondencia completa (1964).

Walras elaboró sus Elementos a través de etapas progresivas en cuanto a complejidad y generalidad. Sus ocho partes pueden ser resumidas de la siguiente manera:

(1) Walras define el alcance de la economía, de la teoría subjetiva del valor y del método matemático;

(2) Discute el intercambio puro de dos bienes cuyas demandas y ofertas han sido derivadas mediante la maximización de la utilidad; aquí se introduce al "subastador" y al proceso de tanteo (*tâtonnement*) para la estabilidad.

(3) Introduce el intercambio en mercados múltiples; hace el recuento de "ecuaciones y de incógnitas" a fin de hallar la existencia de situaciones de equilibrio; y considera al tanteo multimercado con un subastador;

(4) Incorpora a la producción (en las primeras ediciones, con coeficientes fijos; y en ediciones posteriores, con tecnologías flexibles que le permiten hablar de la teoría de la productividad marginal) con un empresariado que no persigue beneficios; demuestra cómo la demanda de factores se deriva como demanda indirecta por los bienes;

(5) Introduce su teoría del capital, que incluye la capitalización de las ganancias futuras y presenta una teoría del ahorro y del crédito;

(6) Introduce su teoría de la demanda de dinero como "*encaisse desirée*"; contempla al dinero como brindando servicios futuros y, por ende, como "deseado" en un problema de elección general;

(7) Considera un mercado continuo y una economía en crecimiento;

(8) Efectúa reflexiones sobre la competencia imperfecta y el monopolio.

Después de las repercusiones de los Éléments, Walras trató de mantener correspondencia con virtualmente todo los economistas importantes de su época, desde Estados Unidos hasta Rusia, en un esfuerzo por popularizar su nueva teoría. Halló simpatizantes y seguidores entre varios jóvenes italianos con buena formación (p.ej. Barone y Pareto) y norteamericanos (p.ej. Moore y Fisher). Pero en su mayor parte fue ignorado o despreciado por los economistas y matemáticos contemporáneos.

En 1893, la cátedra de Walras fue continuada por su joven discípulo, Vilfredo Pareto. Entre ambos formaron el núcleo de la que llegó a conocerse como Escuela de Lausanne. Aunque estaban de acuerdo en las principales cuestiones teóricas, los detalles del programa de investigación subsiguiente serían dictados más por los intereses de Pareto que por las preocupaciones de Walras.

Walras había escrito *Éléments* de 1874 como parte de un proyecto más amplio, que resultó inconcluso porque en los 1890s sus capacidades mentales habían comenzado a ceder y resultaba dudoso que pudiera completar su gran obra de la forma en que lo había intentado originariamente. Walras compiló de apuro dos volúmenes, *Études d'économie sociale* (1896) y *Études d'économie politique appliquée: Théorie de la production de la richesse sociale* (1898) que consideró complementarios, indivisibles y pilares de su teoría económica general en forma conjunta con los *Éléments*. Para su infortunio, la mayoría de los economistas consideró a los dos últimos volúmenes como rellenos "livianos" o, lo que era peor aún, como una simple plataforma de política socialista. Hoy en día, como entonces, sólo los *Éléments* son considerados como la "verdadera" contribución de Walras. Aunque algunos economistas continúan creyendo que, al no ser tenidos en cuenta sus dos otros volúmenes, la teoría moderna del Equilibrio General neo-walrasiana no adhirió – sea en términos generales o en detalle – a la visión original de Walras.

Los economistas modernos también han descartado el intento de Walras, en una edición posterior (1896) de sus *Éléments*, de ser acreditado como el descubridor de la teoría de la productividad marginal de la distribución, dándole prioridad a Wicksteed. Es ampliamente reconocido que Walras supo de este teorema por medio de Enrico Barone (aunque, por extraña coincidencia, Walras había recibido el teorema escrito en una hoja de papel de un matemático de Lausanne, Hermann Amstein, en 1877, ¡pero no había comprendido suficientemente el tratamiento matemático como para saber qué hacer!). Walras pasó los últimos años de su vida en una soledad plena de frustraciones, amargura por la desatención hacia su obra, discapacitado por la senilidad y la enfermedad mental. Falleció en 1910.

Michio Morishima (1923-2004)
Why has Japan succeeded? (1982)
Introduction

2. Modelo de intercambio

Walras apreció que, antes de pasar a considerar el funcionamiento de una economía capitalista, era de vital importancia clarificar el problema del numerario (*numéraire*). Sea una economía en la que todos los individuos son precio-aceptantes. Para el tratamiento matemático se seguirá el moderno enfoque de Michio Morishima, sobre la base de que enriquece el tratamiento del propio Walras. Designamos como $p = (p_1, \ldots, p_n)$ al vector de precios. Cada individuo está provisto de ciertas cantidades de los n bienes, $x_1^o, \ldots, x_n^o$ antes de realizar transacciones, que desea convertir en cantidades $x_1, \ldots, x_n$ a fin de maximizar su función de utilidad:

[1] $u = u(x_1, \ldots, x_n)$

La restricción presupuestaria es la siguiente:

[2] $\sum_i p_i x_i = \sum_i p_i x_i^o$.

Adicionalmente, las cantidades que le deben quedar luego del intercambio deben ser no negativas:

[3] $x_i \geq 0, (i = 1, \ldots, n.)$

Este es un problema de programación no lineal, cuya solución podemos encontrar aplicando las conocidas condiciones de Karush, Kuhn y Tucker:

[4] $u_i \leq \lambda p_i \ (i = 1, \ldots, n.)$

en las cuales u_i denota a la derivada parcial de u con respecto a x_i, y λ es el multiplicador de Lagrange. Si [4] rige como desigualdad estricta '<' para algún i, luego el correspondiente x_i debe ser nulo en el máximo; en cualquier otro caso, $x_i \geq 0$. Aunque Walras no incluyó en ninguna parte de su libro las desigualdades [3]-[4], escribió lo siguiente: "*Dados dos bienes en un mercado, cada poseedor alcanza su máxima satisfacción, o utilidad máxima efectiva, cuando el cociente de sus "*raretés*"* [e.d. utilidades marginales] *es igual al de sus precios... Naturalmente, es posible que una parte del intercambio encuentre interesante ofrecer toda la dotación de uno de los dos bienes de que dispone al comenzar el trueque* [e.d. quedarse con $x_i=0$ del bien i con $x_i^o > 0$] *o no demandar nada del otro bien* [e.d. demandar $x_i=0$ para i con $x_i^o=0$]." Para este último caso concluyó: "*La cantidad demandada de uno de los dos bienes por un tenedor del otro bien resulta cero, cuando el precio del bien demandado es igual o mayor que el cociente entre la intensidad de su deseo máximo por él y la intensidad del último deseo que puede ser satisfecho con la cantidad poseída del bien ofrecido* [e.d. el cociente de utilidades marginales]." En cuanto al bien restante, expresó que "*el tenedor de uno de ambos bienes ofrecerá todo lo que tiene de ese bien cuando el precio del bien demandado a cambio sea igual o menor que el cociente de intensidades del último deseo que puede ser satisfecho por el bien demandado con relación a la intensidad de la necesidad máxima satisfecha por el bien que es ofrecido.*" De estas citas cabe deducir que Walras estaba al tanto de las verdaderas condiciones de equilibrio del consumidor [4]. Y nada cambia al agregar varios bienes dentro del análisis.

Como ya hemos visto precedentemente, posteriormente hubo un análisis riguroso de los bienes libres por economistas germanófonos como Zeuthen, Neisser, von Stackelberg, etc. Pero con Walras el concepto de escasez por oposición al de bienes libres resulta fundamental en su teoría del valor. Walras no aceptó ni la teoría del valor-trabajo británica ni la teoría francesa de la utilidad, porque ninguna de ellas consideraba en forma apropiada a la escasez. En contra de la primera escribió que "*si el trabajo tiene valor y es comerciable, lo es porque es útil y limitado en cantidad, es decir escaso. El valor deriva por consiguiente de la escasez. Otras cosas que no sean trabajo, mientras sean escasas, tienen valor y son comerciables como si fueran trabajo*". En contra de la teoría de la utilidad dijo: "*La utilidad... de por sí no crea valor. Además de ser útil, una cosa debe ser escasa, es decir no debe existir en cantidad ilimitada...El aire que respiramos, el viento que hace ondear los sembradíos en la tie-*

rra, el sol que nos proporciona luz y calor y alimenta nuestras cosechas, el agua y el vapor de agua, éstas y otras fuerzas de la naturaleza no sólo son útiles, sino indispensables. Y sin embargo no tienen valor. ¿Por qué? Porque se encuentran en cantidades ilimitadas y todos podemos hacer uso de ellas en la cantidad que deseemos cuando están presentes, sin postergar nada o realizar a cambio ningún sacrificio."

En realidad, el objetivo de Walras en su teoría del intercambio era verificar el punto de vista de que todas las cosas valiosas y comerciables son útiles y al mismo tiempo están disponibles en cantidades limitadas, y recíprocamente. Para ello, prestó especial atención a la cantidad de un bien demandado por un individuo a un precio cero. A esta cantidad la llamó la "*utilidad extensiva*" de ese bien y la supuso finita. La utilidad extensiva total de un bien i es la suma de las utilidades extensivas individuales. Es la cantidad total de i que los individuos querrán retener cuando su precio sea nulo. En otros términos, es la suma de los x_i sobre todos los individuos en $p_i=0$. Como cada x_i depende no solamente de p_i sino también de los precios restantes, la cantidad total X_i es una función de todos los precios, de modo que la utilidad total extensiva, e.d. X_i calculada en $p_i=0$, puede tener fluctuaciones si cambian los precios de los otros bienes. Interpretado en terminología moderna, esto puede plantearse en los términos siguientes: Sean $p_1^o,\dots, p_n^o$ los valores de equilibrio general de los precios, y $X_i(p_1^o , \dots,p_{i-1}^o ,0,p_{i+1}^o,\dots p_n^o)$ la demanda total particular de utilidad extensiva del bien i obtenida cuando los restantes mercados se encuentran en equilibrio. *Entonces el precio de equilibrio del bien i será nulo*, e.d. $p_i^o =0$, si la 'utilidad total extensiva' es menor que la cantidad poseída, e.d. $X_i (p_1^o, \dots,p_{i-1}^o, 0,p_{i+1}^o,\dots p_n^o)$.

Para un individuo escribimos $d_i=x_i-x_i^o$ si su x_i es mayor que su x_i^o, $s_j=x_j^o-x_j$ si su x_j^o es mayor que su x_j. El individuo comprará la cantidad d_i del bien i de otras personas y venderá la cantidad s_j del bien j a los demás. En el mercado la demanda total de i es la suma de las d_i sobre todos los individuos y la oferta total la suma de las s_i. Las denotamos como $D_i (p_1, \dots, p_n)$ y $S_i(p_1, \dots,p_n)$. La suma de la ecuación presupuestaria [2] para todos los individuos puede entonces escribirse como:

[5] $$\textstyle\sum_i p_i D_i (p_1, \dots, p_n) = \sum_i p_i S_i (p_1, \dots, p_n),$$

ecuación que habitualmente es denominada ley de Walras. Por consiguiente, un **equilibrio general** se define como un estado de la economía sin demanda excedente positiva en ningún mercado, es decir,

[6] $$D_i (p_1, \dots, p_n) \leq S_i (p_1, \dots, p_n) \quad \forall i.$$

Como los precios son no-negativos, de [5] y [6] en forma conjunta se desprende que

[7] $$D_i (p_1, \dots, p_n) < S_i (p_1, \dots, p_n) \rightarrow p_i = 0$$

porque en caso contrario se tendría

$$\textstyle\sum_i p_i D_i (p_1, \dots, p_n) < \sum_i p_i S_i (p_1, \dots, p_n),$$

si hubiera un exceso de oferta en algunos mercados, lo que entraría en contradicción con la ley de Walras [5].

Por definición resulta claro que el exceso de demanda, D_i-S_i, es idéntico a X_i-X_i^o. Por lo tanto, la ley de Walras y las condiciones de equilibrio pueden ser escritas de manera alternativa como:

[5′] $\sum_i p_i X_i(p_1, ..., p_n) = \sum_i p_i X_i^o,$

[6′] $X_i(p_1,... p_n) \leq X_i^o.$

Si en una situación de equilibrio existe algún bien en exceso de oferta, regirá [7]. Lo que implica que, para los precios de equilibrio que satisfagan [6'], se tendrá la regla

[7′] $X_i(p_1,..., p_n) < X_i^o \rightarrow p_i = 0.$

Por consiguiente, los precios de equilibrio deben satisfacer la regla de los bienes libres.

Ahora bien, ¿Existe algún sistema de precios que satisfaga las condiciones [6] o [6']? Walras abordó en forma rigurosa este problema discutiendo el intercambio entre dos bienes A y B. Tomando a cualquiera de ellos, por ejemplo a B, como bien numerario, supuso que las funciones de demanda D_a, D_b y las de oferta S_a, S_b son continuas en el precio relativo de A con respecto a B. Por consiguiente, como veremos más adelante, las funciones de exceso de demanda satisfacen todas las condiciones necesarias para aplicar el **teorema de punto fijo de Brouwer** y hallar una solución de

[8] $D_a(p_a, 1) \leq S_a(p_a, 1)$ y
$D_b(p_a, 1) \leq S_b(p_a, 1)$

donde p_b ha sido fijado igual a 1 porque B fue tomado como numerario. Luego, como veremos siguiendo la obra de Arrow y Debreu entre otros, debe existir al menos una solución de [8].

A continuación, Walras encaró la tarea de hallar una solución de [6] (o de [6']) en el caso general de más de dos bienes. Al abordar esta tarea, utilizó un enfoque particular. Si hay n bienes, tenemos $½n(n\text{-}1)$ pares de bienes que pueden ser intercambiados entre sí.[2] Debe hallarse un equilibrio para cada par de la misma forma en que Walras lo halló para la economía con dos bienes. Para ello, recurrió a la teoría del arbitraje desarrollada por Cournot, dejando de lado su teoría del subastador. En esta teoría, que veremos en el punto 3, los precios de los bienes, en términos de un numerario, son propuestos y ajustados por el subastador. Por otra parte, en el modelo de arbitraje no hay subastador; la negociación es conducida directamente entre dos individuos, y el precio entre ambos bienes, por ejemplo el precio de i en términos de j, es una relación de intercambio *expost* entre i y j. Se trata de dos modelos basados en conceptos diferentes de los precios, y no resulta claro si ambos dan lugar al mismo equilibrio general.

Walras desarrolló un programa bastante completo de investigación. Para resolver el modelo con subastador, que explica cómo los precios de equilibrio son determinados empíricamente en un mercado con subastadores mediante el mecanismo de la libre competencia, propuso una teoría económica; para resolver el problema de arbitraje, propuso un método analítico de acuerdo con el cual cada una de las $½n(n\text{-}1)$ ecuaciones de intercambio bilateral es resuel-

---

[2] Para llegar a este número realicen el siguiente cálculo: consideren una matriz cuadrada de n^2 componentes, de la que hay que excluir a las componentes de la diagonal principal (n), quedando una cantidad igual a n^2-n=n(n-1). Pero sólo tienen sentido los precios *relativos*, de los cuales hay ½n(n-1).

ta matemáticamente, especificando la forma algebraica o analítica de las funciones de oferta y demanda, y ajustando las soluciones de equilibrio parcial así obtenidas hasta satisfacer las condiciones para un arbitraje completo. Aunque no fue completo, tuvo más éxito con el primer problema que con el segundo.

3. <u>Intercambio</u>

Si se supone la existencia de un equilibrio competitivo en el intercambio (que demostraremos más adelante) el paso siguiente consiste en apreciar cómo este equilibrio es alcanzado en el mundo real, o, en palabras de Walras, "*de qué modo el problema del intercambio entre los bienes… es resuelto empíricamente en el mercado por medio del mecanismo competitivo*" (*Éléments*). A fin de plantear el problema asumiremos como Walras que cada mercado está perfectamente **organizado**, una abstracción que suelen hacer los científicos cuando se trata de hallar las leyes de movimiento que funcionan en un mundo idealizado sin fricciones.

El objetivo de Walras era clarificar el proceso de comercio competitivo. Se trataba de un tema nuevo para él, cuando las teorías del monopolio y del monopsonio ya habían sido desarrolladas por Cournot, con quien había comenzado a estudiar economía. Otorgó una mínima incidencia a los elementos monopólicos, y justificó limitarse al análisis del comercio competitivo de la forma siguiente: "*Los mercados mejor organizados desde el punto de vista competitivo son aquellos en que las compras y las ventas son realizadas mediante subastas, mediante la participación de corredores de Bolsa, agentes comerciales o voceros que actúan como agentes que centralizan las transacciones de tal manera que los términos de todo intercambio son anunciados abiertamente y se concede una oportunidad a todo vendedor de bajar sus precios y a todo comprador de elevar sus cotizaciones. De esta forma se opera en la Bolsa de valores, en los mercados comerciales, los mercados de cereales, los mercados de peces, etc. Además de éstos, hay otros mercados como los de las frutas, las verduras y las aves de corral, donde la competencia, aunque no esté tan bien organizada, funciona bastante bien y de manera satisfactoria. Las calles de la ciudad con sus depósitos y tiendas de todo tipo – peluqueros, carniceros, almaceneros, sastres, zapateros, etc. – son mercados donde la competencia, aunque esté organizada de manera escasa, sin embargo funciona en forma bastante adecuada. Sin duda alguna, también la competencia es la fuerza primaria que determina el valor de las consultas al médico y al abogado, o de lo que gana un músico o un cantor en un recital, etc." Más aún, "lo comprado y lo vendido en [la bolsa de valores de un gran centro de inversiones como París o Londres] son títulos de propiedad sobre formas importantes de la riqueza social, como acciones del estado o de los municipios en los ferrocarriles, canales, plantas metalúrgicas, etc.*" Por consiguiente, los bienes más importantes tienen sus propios mercados organizados, y los otros, aunque no estén tan bien organizados como para hallar en forma precisa el equilibrio competitivo, se encuentran bajo la presión de la competencia, de modo que los precios no se pueden apartar demasiado de sus valores de equilibrio. Por lo tanto, la idealización walrasiana puede servir como una primera aproximación a la realidad. Como él mismo dijo, *"¿qué científico elegiría deliberadamente un tiempo nublado para hacer observaciones astronómicas en lugar de beneficiarse con una noche estrellada?*"

¿Cómo funciona la competencia en un mercado bien organizado? Por lo menos hay dos tipos de comercialización competitiva. Según la más usada, todos los intercambios son provisorios y no son efectivos mientras haya un exceso de oferta o de demanda en el mercado. Las cantidades de los bienes en manos de los individuos no se alteran durante el proceso de tanteo, hasta que el conjunto de precios de equilibrio no haya sido finalmente descubierto. Indicamos como $x_i^o = (x_{1i}^o, \ldots, x_{ni}^o)$ a la dotación inicial del individuo *i*. A los precios $p = (p_1, \ldots, p_n)$ su poder adquisitivo es $M = \sum_j p_j x_{ji}^o$. Si es un tomador de precios, las cantidades que desea adquirir $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})$ están determinadas mediante la maximización de su función de utilidad $u_i(x_i)$ sujeto a la restricción presupuestaria:

[9] $\sum_j p_j x_{ji} = \sum_j p_j x_{ji}^o$.

Si los x_{ji} así determinados exceden (o son menores que) la cantidad x_{ji}^o que tiene, entonces demandará (u ofrecerá) el bien *j* en cantidad $x_{ji}-x_{ji}^o$ (o $x_{ji}^o-x_{ji}$) en el mercado. Empero, las demandas u ofertas de los individuos *no serán efectivas hasta que la demanda total de cada bien sea igual a su oferta total*, o en otro términos que se verifique para todos los bienes $j=1,\ldots, n$ la siguiente situación:

[10] $\sum_i x_{ji} = \sum_i x_{ji}^o$.

Por consiguiente, mientras haya un exceso de demanda de al menos un bien, no habrá comercio; los individuos permanecerán en el mercado con la misma cantidad de los bienes que tenían al principio del *tâtonnement*. Sólo cuando se establezcan finalmente los precios de equilibrio, de modo que [10] se cumpla para todo *j*, serán realizadas las transacciones y los individuos se irán a su casa con las cantidades de los bienes deseadas, x_i.

El segundo método de *tâtonnement* presupone que entre cualquier par de comerciantes puede llegarse a un acuerdo durante el proceso de *tâtonnement*, aunque la ecuación [10] no se cumpla para algunos bienes. Todos estos contratos son efectivos, por lo cual las cantidades de los diversos bienes que están en poder de los individuos fluctúan de vez en cuando. Sin embargo, los contratos de compra-venta firmados durante el proceso de *tâtonnement* no son llevados a cabo a los precios respectivos cotizados en el mercado al momento de suscribirse los contratos, sino a los precios de equilibrio establecidos cuando todos los excesos de demanda son eliminados en el mercado. Cuando cambien los precios durante un *tâtonnement*, cambiarán las cantidades que el individuo desea vender o comprar; pero siempre podrá anular un acuerdo suscripto a un precio diferente, canjeando o revendiendo la cantidad necesaria con otro participante.

Designemos con $x_i^* = (x_{1i}^*, \ldots, x_{ni}^*)$ las cantidades que tiene el individuo *i* en cierto momento t^* del *tâtonnement*. En ese momento los precios son $p = (p_1, \ldots, p_n)$. El individuo *i* comenzó el *tâtonnement* con x_i^o, de modo que hasta ese momento ha comprado del bien *j* la cantidad $(x_{ji}^*-x_{ji}^o)$, si $x_{ji}^*>x_{ji}^o$, o vendido la cantidad $(x_{ji}^o-x_{ji}^*)$, si $x_{ji}^* < x_{ji}^o$ hasta el instante t^*. Si los precios actuales *p* son de equilibrio, deberá pagar el importe neto $\sum_j p_j (x_{ji}^*-x_{ji}^o)$, igual al gasto en compras menos el monto adquirido por las ventas. Por otra parte, tiene stocks en especie, $x_{1i}^*,\ldots, x_{ni}^*$ que, evaluados a esos precios significan un importe igual a $\sum_j p_j x_{ji}^*$. Por consiguiente, su poder total de compras en t^* es:

[11] $\sum_j p_j x_{ji}^* - \sum_j p_j (x_{ji}^*-x_{ji}^o)$.

en base al cual el individuo decide su nuevo plan de ventas. Es decir, en t* calculará la cantidad de los bienes $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})$ que querrá tener, de modo de maximizar su función de utilidad $u_i(x_i)$ sujeto a la condición de que el valor total de x_i a los precios *p* sea igual a su poder de compras [11]. Obviamente [11] es igual a $\sum_j p_j x_{ji}^o$ de modo que la ecuación de presupuesto en t* es idéntica a [9], que es la restricción presupuestaria que existe bajo el primer tipo de comercio competitivo. Luego, si utiliza el segundo método, un individuo tomador de precios responderá a los precios dados como lo hace bajo el primer método (por lo cual, no habrá diferencia entre ambos métodos en su demanda u oferta), aunque en el curso de las transacciones del *tâtonnement* algunos intercambios tengan lugar en el segundo método, pero no en el primero. Podemos escribir luego que la demanda excedente total del bien j en el mercado, cualquiera sea el método utilizado, es

$$E_j\,(p_1,\ldots,\,p_n) = \sum_i x_{ji}\,(p_1,\ldots,\,p_n) - \sum_i x_{ji}{}^o,$$

que resulta ser una función dependiente sólo de los precios.

Ahora vamos a representar mediante $p(t)= [p_1(t),p_2(t),\ \ldots,p_n(t)]$ a los precios "gritados" por un agente de precios en el mercado en el momento *t* durante una sesión de comercio competitivo, y mediante $E_j\ (t)$ a la demanda excedente del bien *j* que corresponde a estos precios, $E_j[p(t)]$. Se supone que, si la demanda de *j* es superior (o inferior) a su oferta en t, el agente elevará (bajará) su precio en proporción al exceso de demanda positivo (o negativo). El factor de proporcionalidad, que sería llamado por Lange el "*grado de flexibilidad del precio*", podría ser diferente según de qué bien se trate, pero en el análisis siguiente haremos el supuesto simplificador de que se trata del mismo parámetro para todos los bienes. También supondremos que el grado de flexibilidad es *proporcional al nivel de precios*, de tal forma que si una unidad de exceso de demanda genera un aumento de *v* centavos al precio $1, el precio aumentará en *v* pesos al precio de $100. Por lo tanto, el **grado de flexibilidad de precios** viene dado por $v\sum_k p_k(t)$, donde *v* es una constante positiva para todos los bienes. En tal caso, la ecuación de ajuste de precios del bien j puede ser escrita como:

[12] $$p_j\,(t+1)-p_j\,(t) = v\,[\textstyle\sum_k p_k(t)]\,E_j\,(t) \qquad (j=1,\,\ldots,\,n).$$

Pero en esta fórmula no hay consideración alguna de que la negatividad del precio $p_j\ (t+1)$ no tiene ningún sentido; en realidad, tal podría ser el caso si $E_j\ (t)$ adopta un valor negativo para un valor suficientemente pequeño de $p_j\ (t)$, ya que entonces se tendría un valor negativo de $p_j(t+1)$. Para evitarlo, supondremos que [12] sólo es válida en tanto dé lugar a un precio no-negativo en t+1; en caso contrario, probablemente el agente gritaría un precio cero en lugar de sumir al mercado en un innecesario estado de confusión resultante de gritar el precio según la fórmula anterior. Esto lo expresamos diciendo que el agente utilizará la siguiente *fórmula revisada de tâtonnement*:

[13] $$p_j\,(t+1) = max\,\{p_j\,(t) + v\,[\textstyle\sum_k p_k\,(t)]\,E_j\,(t),\,0\} \qquad (j=1,\,\ldots,\,n).$$

Hasta ahora no hemos hablado de la normalización de los precios; pero los precios son relaciones de cambio entre los bienes; si hay arbitraje perfecto, son relaciones de cambio con relación al numéraire. ¿Qué bien podría desempeñar el rol de numerario? No podría ser un bien libre: sería imposible y carente de sentido evaluar a los bienes con relación a un bien libre. ¿Qué tipo de bien no es libre? Esto lo podremos responder una vez que hayamos desplegado todo el proceso de tanteo. Pero necesitamos un numerario de arranque.

Para evitar lo que parece una paradoja, armaremos un bien compuesto hecho con *una unidad de cada bien existente* y lo consideraremos como nuestra mercancía patrón o numerario. Ahora podemos estar tranquilos de que, definitivamente, no se tratará de un bien libre, porque siempre habrá al menos algunas componentes de esta mercancía compuesta que no serán libres (*si todas las componentes fueran libres, no existirían bienes escasos en toda la economía, y desaparecería el problema económico.*)

El valor de una unidad de la mercancía compuesta es igual a la **suma de los precios** de todos los bienes: $\sum_k p_k(t)$. Una unidad del bien *j* se intercambia con $p_j(t)/\sum_k p_k(t)$ unidades de la mercancía compuesta porque son equivalentes. Esta relación de intercambio la denotaremos como $q_j(t)$:

[14] $$q_j(t) = p_j(t)/\sum_k p_k(t)$$

y proporciona el precio del bien j en el momento t, con relación al numéraire escogido, y

[15] $$q_j(t+1) = p_j(t+1)/\sum_k p_k(t+1)$$

será el precio correspondiente en t+1. Dividiendo numerador y denominador del segundo miembro de [15] por $\sum_k p_k(t)$, sustituyendo [13] en [15] y teniendo en cuenta [14]:

[16] $$q_k(t+1) = \frac{\max[q_j(t) + v\,E_j(t), 0]}{\sum_k \max[q_k(t)+v\,E_k(t), 0]}$$

Las funciones de exceso de demanda $E_j(t)$ $(j=1, \ldots, n)$ son las sumas de las funciones de exceso de demanda de los individuos para todos aquellos que maximizan $u_i(x_i)$ sujeto a la restricción presupuestaria [9].

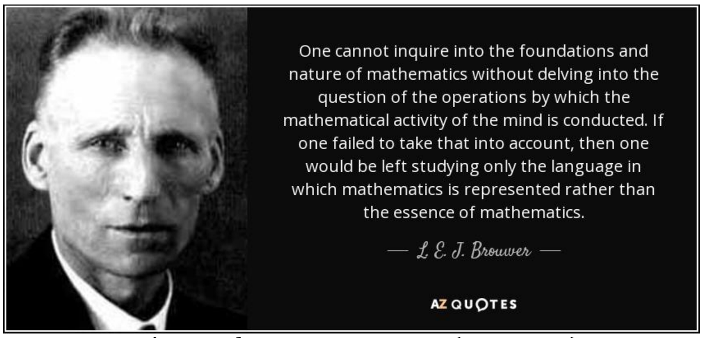
Resulta obvio que el punto de máximo no será afectado aunque reemplacemos [9] por la restricción de presupuesto normalizada

[9′] $$\sum_j q_j x_{ji} = \sum_j q_j x_{ji}^0.$$

Por consiguiente las funciones de exceso de demanda son funciones de los *precios relativos*, a saber

[17] $$E_j(t) = E_j[q_1(t), \ldots, q_n(t)].$$

Es evidente que las ecuaciones de ajuste de precios [16] que transforman $q(t)$ en $q(t+1)$ satisfacen dos condiciones: 1º) la condición de normalización de precios, según la cual la suma de los $q_j(t+1)$ es idénticamente igual a uno, y 2º) la condición de no-negatividad, según la cual los precios no caerán por debajo de cero aunque exista un enorme exceso de oferta. También se tiene, por definición de función de exceso de demanda, a partir de [9']:



Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)
van Atten, Mark, "Luitzen Egbertus Jan Brouwer", (The Stanford Encyclopedia of Philosophy)

[18] $$\sum_j q_j E_j(q) \equiv 0,$$

que vale en forma idéntica para todos los posibles *qs* y es referida como 'ley de Walras'.

Si $q(t) \neq q(t+1)$ habrá un cambio de los precios entre t y t+1. Un punto tal que $q(t)=q(t+1)$ se dice ser un **punto fijo** o un sistema de precios estacionario. El matemático Brouwer ha establecido un resultado que desarrollaremos en el capítulo siguiente, y que ha sido interpretado de la siguiente manera por los economistas: existe al menos un punto fijo, siempre que las funciones de exceso de demanda sean continuas. Llamemos q a ese punto fijo, luego por [16]:

[19] $$q_j = max\,[q_j + v\, E_j\,(q),\, 0]/c \quad (j=1,\dots, n)$$

en donde $c= \sum_k max\,[q_k + v\, E_k\,(q),\, 0]$. Como $c>0$[3] se desprende de [19] que si $q_j > 0$, entonces $q_j + v\, E_j\,(q) > 0$, y por lo tanto $E_j\,(q)=(c-1)\, q_j /v$. Por [19], $E_j\,(q) \leq 0$ *si* $q_j = 0$. Luego se tiene

$$E_j\,(q) \quad =(c-1)\, q_j/v \text{ si } q_j>0,$$
$$\leq 0 \text{ si } q_j = 0.$$

Es evidente que estas funciones de exceso de demanda no satisfacen la ley de Walras a menos que $c=1$. Por consiguiente,

$$E_j\,(q) \quad = 0 \text{ si } q_j>0,$$
$$\leq 0 \text{ si } q_j = 0.$$

En otras palabras, en el punto fijo en el cual los precios dejan de cambiar, (1º) no existe ni demanda excedente ni oferta excedente de ningún bien escaso (con precio positivo), y (2º) puede haber exceso de oferta para un bien libre (con precio cero), pero no existe posibilidad de exceso de demanda. Por consiguiente el punto fijo del proceso de *tâtonnement* proporciona un sistema de precios de equilibrio que constituye el sistema de precios al que las cantidades demandadas son iguales a las ofrecidas, con excepción de los bienes libres. Queda así establecida la existencia de un equilibrio de intercambio.

[3] En efecto, si c fuera negativo, se tendría $q_k + v\, E_k(q) \leq 0$ para todo k. Como $q_k \geq 0$, se tiene que $\sum_k q_k^2 + v \sum_k q_k\, E_k(q) \leq 0$. Por la ley de Walras, el segundo término del 1º miembro es igual a 0, mientras que el primero debe serría positivo porque $q_k \geq 0$ y $\sum_k q_k = 1$. Luego hay una contradicción, 0< 0.