Equilibrios perfectos en Modelos de Negociación (Nash-Rubinstein)[1]

El problema de negociación de dos personas es el problema de entender cómo dos agentes deben cooperar cuando no hacerlo conduce a resultados Pareto-ineficientes. Es en esencia un *problema de selección del equilibrio*; muchos juegos tienen equilibrios múltiples con diferentes beneficios para cada jugador, obligando a los jugadores a negociar sobre a cuál equilibrio apuntar como meta. Las soluciones a la negociación encaradas en la literatura son de dos tipos: enfoques axiomáticos cuando se cumplan las propiedades deseadas de una solución, y enfoques estratégicos en los que el procedimiento de negociación se modela en detalle como un juego secuencial.

1. *La solución de Nash*

Nash planteó el problema en The Bargaining Problem (1950). El juego de negociación o juego de negociación de Nash es un simple juego de dos jugadores usado para modelar las interacciones de negociación. En el juego de negociación de Nash, dos jugadores demandan una porción de algún bien (generalmente una cierta cantidad de dinero). Si la cantidad total solicitada por los jugadores es inferior a la disponible, ambos jugadores obtienen su petición. Si su solicitud total es mayor que la disponible, ningún jugador recibe su petición. Una solución de negociación de Nash es una solución Pareto- eficiente de un juego de negociación de Nash.

En su documento Nash presentó un nuevo tratamiento del problema económico clásico, "*que ocurre en muchas formas, como la negociación, el monopolio bilateral, etc. considerándolo como un juego de dos personas de suma distinta de cero. En este tratamiento [hizo] algunos supuestos generales en relación con el comportamiento de un solo individuo y de un grupo de dos individuos en ciertos ambientes económicos. A partir de estos, [obtuvo] la solución del problema clásico. En términos de teoría de los juegos, [halló] los valores del juego.*"

La solución de negociación de Nash ha sido ampliamente utilizada como una herramienta de modelado de las negociaciones salariales en economía aplicada.[2] Su solución de negociación se formula en términos de un conjunto *X* (convexo) de pares de utilidad que representan posibles ofertas en que dos negociadores podrían estar de acuerdo, y un par de *desacuerdo* (d_1,d_2) que representa las utilidades que los negociadores recibirán si

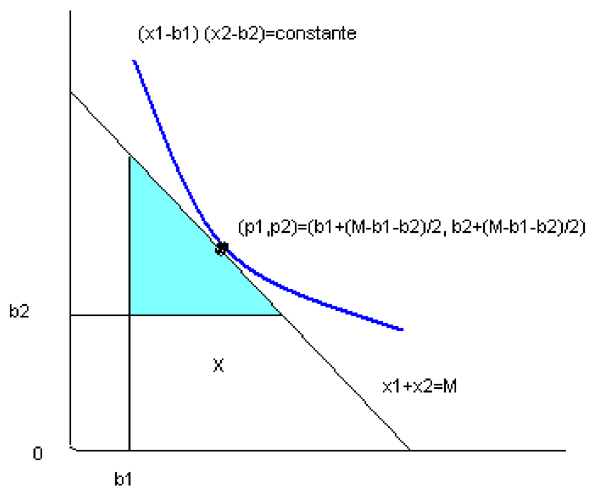


Figura 1. Solución de Nash al Problema de Negociación

[1] Ariel Rubinstein, *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, 1982. Aquí se expondrá la versión de Alla Khalitova, Xiao Qin, Jeff Faris & Lijing Song, *Paper: Perfect Equilibrium in A Bargaining Model* (2012). El importante y recomendable documento de Ingolf Stahl – *Bargaining Theory* (1972) es utilizado en la sección 10 de este capítulo. El lector podrá comparar con el tratamiento del problema de la negociación en el Capítulo 7 de Martin J. Osborne y Ariel Rubinstein, *A Course in Game Theory*, 1994.
[2] Binmore K., Avner Shaked, and John Sutton (1989), *An Outside Option Experiment*.

no hay acuerdo. La solución de negociación de Nash (s_1, s_2) es entonces el punto en X donde el producto ($s_1 – d_1$) (s_2-d_2) se maximiza con sujeción a las limitaciones de s_1 - d_1 y s_2 - d_2. En la mayoría de las aplicaciones, los acuerdos consisten en compartir una suma de dinero M (que no estará disponible sin no hay acuerdo) entre negociadores cuyas utilidades son lineales en el ingreso. En este caso X es un conjunto de la forma $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq M\}$, y $s_i = d_i + (M-d_1 - d_2)/2$ $(i = 1, 2)$. La solución de negociación de Nash, a continuación, asigna a cada jugador su pago de desacuerdo más la *mitad* de lo que resta de M después de haber realizado los pagos de desacuerdo.

En aplicaciones prácticas, muchas veces se ha tomado como referencia de punto de desacuerdo el *punto de impasse,* definido como el par de utilidades que resultarían si la negociación se prolongara constantemente sin alcanzarse ningún acuerdo o, también, abandonando las negociaciones. Abandonada la mesa de negociación, los negociadores pueden tener una oportunidad en otro lugar, o, si se posterga el acuerdo pueden surgir factores aleatorios que pueden implicar la pérdida de la posibilidad negociadora de las partes. Los pares de utilidad que surjan en tales casos de ruptura son candidatos adicionales a funcionar como puntos de ruptura verosímiles. Voy a suponer que hay un único *punto de ruptura*, con la característica de que asigna a los dos jugadores pagos b_1, b_2 tales que se respeta el presupuesto (es decir, $b_1+b_2 \leq M$, $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$). (Véase Figura 3.) La ruptura será precipitada por uno de los jugadores – seguido por el otro – que abandona la mesa de negociación, a fin de utilizar su *opción externa*.

En las negociaciones salariales es apropiado pensar en los puntos en X como flujos de salarios y de ganancias, en las utilidades *impasse* como flujos de ingresos durante una huelga y en las opciones externas como los mejores flujos de ingresos disponibles para cada parte en caso de cese completo de colaboración. En tal contexto es habitual colocar el punto de desacuerdo para la solución Nash en el punto de ruptura (b_1, b_2) como se indica en la Figura 3. Una mnemónica útil para la predicción (p_1, p_2) del resultado de la negociación así generada es la de *partir la diferencia*.

Nash obtuvo la solución de negociación del *juego cooperativo de negociación* en base a cuatro axiomas, a saber:

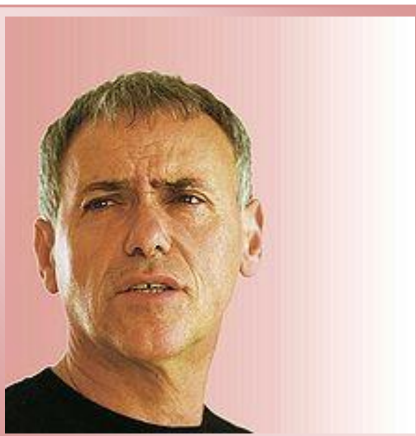
1. Eficiencia (en el sentido de Pareto): es la asignación que maximiza el producto de las utilidades de los agentes.
2. Simetría: si la posición de las partes en la negociación es idéntica (en cuanto a su aversión al riesgo, información disponible, etc.) y en el desacuerdo son tratados de la misma manera, entonces en la solución deben recibir lo mismo.
3. Invariancia escalar: Roger Myerson (*Two-person bargaining problems with incomplete information*, 1984) plantea este axioma así: la solución no debe ser sensible a los cambios conjuntos de las funciones de utilidad y las creencias que dejan inalteradas las utilidades esperadas *interim*, que denomina axioma de *invarianza de probabilidad.*
4. Independencia de alternativas irrelevantes: la elección de una asignación de utilidades no debe depender de asignaciones que, siendo factibles, no fueron elegidas.

Obsérvese que en la solución de Nash está presente de manera inevitable el *riesgo: a saber, que el punto de desacuerdo (b_1, b_2) pueda ser el resultado.* Otro aspecto a tener en cuenta es que las *opciones externas* no son “puntos de desacuerdo o *impasse*” y afectan al resultado sólo si son mejores para al menos una parte que el resultado de negociación planificado.

2. Las ofertas alternadas de Rubinstein, el modelo económico como fábula y John Nash

Resumen Ariel Rubinstein modela la negociación entre dos agentes como un juego en forma extensiva con información completa en el que los jugadores realizan alternadamente sus ofertas. El supuesto fundamental es que los agentes son impacientes y el resultado principal aporta condiciones bajo las que el juego tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos, caracterizando este equilibrio. Trataremos así su respuesta a la siguiente pregunta:

Dos individuos tienen ante sí varios acuerdos contractuales posibles. Ambos tienen interés en llegar a un acuerdo, pero sus intereses no son totalmente idénticos. ¿Cuál "será" el contrato acordado, en el supuesto de que ambas partes se comportan racionalmente?



Ariel Rubinstein (1951, Jerusalem)
Website personal

Rubinstein dice en *Dilemas de un Teórico Económico* (2006) que *uno de [sus] primeros intereses fue la teoría de la negociación. Por dos razones. La primera, y la más importante, la teoría de la negociación involucra la construcción de modelos simples pero ricos en resultados y con interpretaciones atractivas. Por cierto, la posibilidad de obtener enunciados significativos mediante la manipulación de símbolos matemáticos fue lo que [lo] atrajo a la economía. Segunda, cuando era niño [frecuentó] los mercados abiertos del occidente de Jerusalén y el bazar de la Ciudad Vieja, y por ello la negociación tenía un atractivo exótico. [Llegó] a preferir la teoría de la negociación a la teoría de las subastas porque las subastas estaban asociadas con los ricos mientras que la negociación estaba asociada con la gente común. Pero nunca [imaginó] que la teoría de la negociación [le] haría un mejor negociante. Después, cuando las personas se [le] acercaban para [pedirle] consejo sobre la negociación de la compra de un apartamento o sobre la participación en un grupo de planeación estratégica en negociaciones políticas, [él se] negaba. Les decía que como teórico económico no tenía nada que aportarles. No decía que [le] faltaba sentido común o experiencia que pudiera ser útil en esas negociaciones, sino que [su] conocimiento profesional no era útil en esos asuntos. Esta respuesta era suficiente para disuadirlos. Quienes toman decisiones suelen buscar un consejo profesional y no un consejo basado en el sentido común. Creen, y tal vez estén en lo cierto, que tienen al menos tanto sentido común como los economistas profesionales afirmativos.* Irónicamente, termina: *No obstante, soy profesor de microeconomía. Soy parte de la "maquinaria" que sospecho influye en los estudiantes para que piensen de una manera que no me gusta.*

Concluye: *Como teóricos económicos, organizamos nuestros pensamientos usando "modelos". La palabra "modelo" suena más científica que "fábula" o "cuento de hadas", aunque no veo mucha diferencia entre ellas. El autor de una fábula establece un paralelo con una situación de la vida real. Desea presentar una moraleja al lector. La fábula es una situación imaginaria situada entre la fantasía y la realidad. Toda fábula se puede descartar por irreal o simplista. Pero esta es una de sus ventajas. Por situarse entre la fantasía y la realidad, no contiene detalles extraños ni distracciones aburridas. En esta situación libre de estorbos, podemos discernir claramente lo que no siempre podemos ver en el mundo real. Al volver a la realidad, contamos con un consejo sensato o un argumento relevante que podemos usar en el mundo real.*

Hacemos exactamente lo mismo en teoría económica. Un buen modelo de teoría económica, igual que una buena fábula, identifica varios temas y los aclara. Hacemos ejercicios mentales que sólo están débilmente conectados con la realidad pues los hemos despojado de gran parte de sus características reales. Pero un buen modelo, igual que una buena fábula, mantiene algo significativo. Igual que nosotros, el narrador de fábulas enfrenta el dilema de las conclusiones absurdas pues la lógica de su historia también lleva a conclusiones absurdas. Igual que nosotros, el narrador de fábulas enfrenta el dilema de responder a la evidencia. Desea mantener una relación entre su fábula y lo que observa. Existe una línea delgada entre una fantasía divertida y una fábula que tiene un mensaje. Igual que nosotros, el narrador de fábulas se ve frustrado por el dilema de las regularidades sin fábula cuando entiende que algunas veces sus fábulas no son necesarias para lograr observaciones útiles. Igual que nosotros, el narrador de fábulas enfrenta el dilema de la relevancia. Desea influir en el mundo real, pero sabe que su fábula es sólo un argumento teórico. Igual que en las fábulas, las conclusiones absurdas revelan contextos en que el modelo produce resultados irrazonables, pero que esto no necesariamente le resta interés al modelo. Igual que las fábulas, los modelos de la teoría económica se derivan de observaciones del mundo real, pero esto no significa que sean comprobables. Igual que una buena fábula, un buen modelo puede tener enorme influencia en el mundo real, no porque dé un consejo o prediga el futuro, sino porque ejerce influencia en la cultura.

Antes de analizar el trabajo de Rubinstein, mencionaré una contribución del mismo autor a la saga de la premiación a John Nash.

> *En octubre de 1994, varios días después de que la Academia de Ciencias de Suecia anunciara que el Premio Nobel de Economía se otorgaría al "Dr. John Nash, de 66 años, residente de Princeton, Nueva Jersey", se realizó una recepción en su honor en el salón de café del legendario departamento de matemáticas de la Universidad de Princeton. La sala estaba medio llena. Había matemáticos, estudiantes, un pequeño número de profesores de economía, unos pocos administradores de la universidad y algún fotógrafo. En ese momento, la afiliación formal de Nash con la universidad era tener allí una cuenta en su equipo de computación.*


John Nash y esposa Alicia Lardé

La ceremonia se inició con cierto retraso, y no duró más de un minuto o dos. Alguien levantó la copa para dar un brindis, pero no hubo discursos gratuitos. El invitado de honor no dijo nada. En cuanto se vació el último vaso, comenzó a reinar un silencio embarazoso. Nash se quedó solo en el medio de la sala. Nadie se le acercó. Caminó hacia la mesa de los refrescos, y se quedó parado allí. "Las cookies están mejor que de costumbre hoy", dijo a sus huéspedes incrédulos.

Nash fue uno de los tres premios que ganaron el premio Nobel de ese año por su contribución a la teoría de los juegos no cooperativos: una serie de conceptos y modelos matemáticos que atribuyen racionalidad absoluta a todos los "jugadores" en situaciones estratégicas. La teoría de los juegos temprana fue establecida por von Neumann y Morgenstern (ambos de Princeton, por cierto) en una monumental obra publicada durante la II Guerra Mundial. Durante 25 años se mantuvo como una teoría marginal en el ámbito de las matemáticas. Recién en la década de los 1970s logró infiltrarse en la economía y procurarle uno de sus mayores avances intelectuales. A principios de los 1980s, la teoría de los juegos se enseñaba en forma rutinaria en Departamentos de Economía de todo el mundo. Todo estudiante de economía sabía lo que era el "equilibrio de Nash" -, pero nadie había oído hablar de un economista llamado Nash.

Como estudiante de economía en la década de los 1970s, yo también daba por sentado que quien fuera Nash, habría muerto hacía mucho tiempo. De hecho, sólo tenía unos cuarenta años al momento, ¡y su contribución a la economía estaba encapsulada en tres documentos - un total de 30 páginas - publicados antes de cumplir los 25! Tan central fue su trabajo en la teoría económica que en circunstancias normales habría ganado el Premio Nobel en ese momento. Pero Nash era ante todo un matemático. Su mayor logro - la solución de lo que se cree uno de los problemas más complejos en el ámbito de la geometría - fue antes de cumplir 30 años.

A los 31, sin embargo, Nash fue víctima de lo que él describe como "trastornos mentales". Durante 25 años, se trasladó "de la racionalidad científica a las características delirantes de las personas a las que se diagnostica psiquiátricamente como esquizofrénicas o paranoides esquizofrénicas." El genio arrogante, el profesor de matemáticas excéntrico que a los 21 años ofreció a Einstein una teoría postulando la contracción del universo y ganara elogios en la revista Fortune como una de las más brillantes estrellas jóvenes en el campo de las matemáticas, fue un hombre enfermo y solitario.[3]

Sylvia Nasar (1947) Sylvia Nasar on Grand Pursuit: The Story of Economic Genius *57m 13s*

Para Sylvia Nasar, el premio Nobel de Economía era sólo un evento anual de rutina. Como reportera de economía senior de The New York Times, con estrechos contactos en el mundo académico, era enviada para cubrir la entrega de premios de todos los años. Al informar sobre las contribuciones

[3] En la Universidad de Princeton impartían clases Albert Einstein y John von Neumann, algo que motivó su ansia por destacarse y obtener reconocimiento.

de los ganadores del premio Nobel, los periodistas tienden a sonar ridículos. Nasar, por el contrario, siempre ha sabido describir su trabajo científico de manera creíble e inteligente. Su informe en 1994 fue aún más especial. Ella fue la única periodista que entendió que la entrega del premio ese año no era sólo un evento académico, sino un acontecimiento humano. Varias semanas después de que los ganadores fueran anunciados, Nasar publicó un artículo largo, punzante sobre Nash en The New York Times, que se desvió de la política habitual y ubicó al artículo en las dos primeras páginas de la sección financiera.

Nasar describe a Nash durante tres fases de su vida: como un genio joven y apuesto; como una víctima de la enfermedad mental que frecuenta el campus idílico de Princeton ; y como un científico recuperado que regresa a la investigación activa y gana el premio Nobel. La decisión del comité Nobel articuló el reconocimiento del mundo académico a teoría de los juegos; Nasar articuló la dimensión humana: la concesión del premio al "genio loco." El éxito del artículo de Nasar impulsó a la redacción del libro. Simon y Schuster, reconociendo el enorme potencial comercial de semejante libro, hicieron posible que Nasar tomara una licencia de dos años de su empleo y se dedicara a escribirlo.

"Una mente brillante" es el producto de una investigación meticulosa.[4] *Como periodista dedicada y talentosa, Nasar recorrió el país recopilando datos, beneficiándose de su encanto personal para desbloquear secretos encerrados. Se adentró en libros de psiquiatría y leyó biografías de matemáticos y otros genios para entender mejor el funcionamiento de la mente de Nash. El propio Nash se negó a cooperar, pero Nasar fue asistida por su ex esposa, Alicia, quien a pesar de su divorcio en 1960, continúa viviendo con él y ocupándose de sus necesidades. Las razones de Alicia para colaborar con Nasar no están claras. Quizás era emocionante conocer a una periodista famosa, o tal vez creía que sería útil de algún modo a su hijo, que ha heredado tanto las habilidades matemáticas del padre como su enfermedad mental.*

¿Por qué Nash no habría cooperado con Nasar? ¿Era sólo su temor a revelaciones embarazosas? Nash es conocido como un hombre de principios sólidos. Pedido a componer una breve biografía en honor de ganar el premio Nobel - un texto escrito no menos fascinante que el libro de Nasar - Nash explica que él omite deliberadamente "detalles de tipo verdaderamente personales". Yo mismo le oí decir en varias ocasiones que la única biografía digna de él era una que se concentre en sus logros científicos e intelectuales, pero que semejante libro no se puede escribir, ya que aún no ha completado su trabajo.

Nasar excava sin piedad en la vida privada de Nash. Describe sus síntomas, sus diagnósticos médicos, los tratamientos terribles a que fue sometido. Deja caer cuidadosamente pistas sobre sus preferencias sexuales, y describe en detalle su relación con una mujer con quien engendró un hijo "ilegítimo". Pocos de los conocidos de Nash sabían acerca del niño antes de la publicación del libro. Nasar explota la libertad periodística a capa y espada, siempre y cuando esté convencida de los hechos.

John Milnor, uno de los matemáticos más importantes de nuestro tiempo, atacó al libro de Nasar como una "drástica violación de la intimidad."[5] *No hay nadie para protegerlo. El propio Nash ha tenido dificultades para leer el libro, que dice "lo tomó prestado de Ali-*

---

[4] Sylvia Nasar publicó una versión comprimida de su libro en 1998 en la revista Vanity Fair.

[5] John Milnor es autor del artículo *John Nash and A Beautiful Mind* (1998), donde hay una lista de los trabajos publicados por Nash.

cia." ¿Pueda dicha exposición servir a un propósito digno? ¿Ayuda de alguna manera a resolver el enigma humano, o se trata simplemente de chismes de la clase alta para aquellos a los que no les interesan las estrellas de cine?

Nasar dispone de mucha simpatía por Alicia y le dedica el libro. La ve como una víctima trágica de las circunstancias: una mujer bella, joven, y brillante que pasó toda su vida cuidando a un marido con problemas mentales y a un niño no menos problemático, su lucha por la supervivencia hecha aún más difícil, ya que se libra en la periferia de la sociedad de una Princeton condescendiente e indiferente. Nasar llama a Alicia "Alicia" y a Nash "Nash". Sólo tiene simpatía parcial hacia él, como si él tuviera una mente hermosa, pero no un alma pura.

Cualquiera que busque la explicación de un lego de teoría de los juegos en este libro quedará decepcionado. Nasar merece ser elogiada por no tratar de hacer lo que no debe. Una de las razones por la que teoría de los juegos ha tenido tanto éxito es que utiliza conceptos de uso cotidiano de una manera intrigante. Sin embargo, la relación entre esta teoría y la realidad no es en absoluto simple. Los intentos de una descripción popular de teoría de los juegos pueden hacer más daño que bien, precisamente porque las palabras suenan tan familiares. Nasar mantiene acertadamente las distancias. Las aplicaciones de teoría de los juegos son polémicas y bastante complicadas. Los lectores tendrían dificultades para comprender desde un breve capítulo cómo los modelos matemáticos pueden ayudar a describir el comportamiento humano en situaciones estratégicas complejas. Es más probable que se engañen a sí mismos pensando que las matemáticas pueden predecir las jugadas del competidor.

La historia del genio loco nos fascina, tal vez porque refuerza el temor que sentimos frente a los misterios del cerebro humano o porque se retrata la fragilidad de la condición humana en su forma más extrema. Estamos a la vez fascinados y temerosos por los genios locos. Tal vez, al igual que Nash, creemos que los genios locos están más cerca de otros mundos. La línea divisoria entre el pensamiento de gran originalidad y la locura no es del todo clara, y el libro de Nasar se detiene en esto. Cuando estaba enfermo, Nash buscaba un significado más allá de lo cotidiano, del orden y la racionalidad en lugares donde no miramos habitualmente. Pero la preocupación de Nash no era más extraña que los que buscan códigos en la Biblia, el destino en las estrellas, los rasgos del carácter en el café molido o el significado oculto en la Gematría. Tal vez ni siquiera sea tan diferente de lo que muchos científicos hacen cuando buscan leyes en un mar de datos aleatorios. Nash, al parecer, estaba haciendo precisamente eso, pero de una manera más obsesiva e inusual. Nash, dicho sea de paso, ve su período de "irracionalidad" como un período de "hipótesis delirantes similares al sueño." Él describe su regreso al "pensamiento racional en el estilo característico de los científicos" como un proceso que "no es para nada una cuestión jubilosa... Un aspecto de esto es que la racionalidad del pensamiento impone un límite al concepto de la relación de una persona con el cosmos".

Nasar escribió un libro que está maduro para Hollywood. La industria del cine ya ha ofrecido a Nash una enorme suma de dinero por el permiso para hacer una película basada en su vida. Nash, que vive muy modestamente cerca de la estación de tren en Princeton, junto a Alicia y un hijo muy enfermo, se ha negado. Ahora de 70, él aún está comprometido con el amor de su vida: la investigación. En su modo maravillosamente incisivo de decir lo que quiere decir, con franqueza, breve y al punto, Nash escribe en su bio-

grafía: "Estadísticamente, parece improbable que cualquier matemático o científico, a la edad de 66 años, sea capaz, a través de esfuerzos continuados de investigación, de añadir mucho más a sus logros anteriores. Sin embargo, tengo la esperanza de poder lograr algo de valor mediante mis estudios actuales o con nuevas ideas que vengan en el futuro".

Sin querer, Nash ha tenido éxito en lograr algo que no es menos valioso que la solución a un problema matemático difícil. Ha ganado el Premio Nobel a pesar de la grave vacilación del jurado sueco de otorgar un premio a alguien que puede "incomodar al rey", y pese al hecho de que el mundo académico omitió intencionadamente el honor que le habría correspondido de no ser por su enfermedad. Dando a Nash el premio, el comité sueco ha reconocido que la enfermedad mental no debería impedir los derechos de una persona del mismo modo que el género, la raza o la salud emocional no nos deben impedir el reconocimiento de la capacidad intelectual. Este es el mensaje del libro de Nasar y ésta es la victoria humana de John Nash.

3. Modelo de negociación de Rubinstein

Daremos en esta sección una descripción sumaria de este modelo y del modelo emparentado de Stahl, dejando para secciones posteriores un tratamiento más detallado.

El modelo de negociación de Rubinstein se refiere a una clase de juegos de negociación que cuenta con ofertas alternadas a través de un horizonte de tiempo infinito. La prueba original se debe a Ariel Rubinstein en el ensayo *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, publicado en Econometrica en 1982. Durante mucho tiempo, la solución a este tipo de juegos fue un misterio; por lo tanto, la solución de Rubinstein se transformó en uno de los hallazgos más influyentes en teoría de los juegos.

Requisitos Un modelo clásico de negociación de Rubinstein tiene los siguientes elementos:

- ✓ Dos jugadores
- ✓ Información completa
- ✓ Ofertas ilimitadas - el juego sigue adelante hasta que un jugador acepta una oferta
- ✓ Alternancia de ofertas - el primer jugador hace una oferta en el primer periodo, si el segundo jugador la rechaza, el juego se traslada al segundo periodo en el que el segundo jugador hace una oferta, si el primero la rechaza, el juego se traslada al tercer período, etc.
- ✓ Los retrasos son costosos

Ayudará tener en cuenta el documento de *Bargaining and Repeated Games* (Jonathan Levin, 2002).

Sean dos jugadores, α y β, que se alternan en hacer ofertas sobre cómo dividir un pastel de tamaño uno. El tiempo corre desde $t = 0, 1, 2, \ldots$. En el momento 0, el jugador α propone una división $(x_0, 1 - x_0)$ (con $x_0 \in [0, 1]$), que el jugador β puede aceptar o rechazar. Si β acepta, el juego termina y se consume el pastel. Si β lo rechaza, el juego se traslada a $t = 1$, cuando β propone una división $(y_1, 1 - y_1)$. Una vez que el jugador β propone la división, el jugador α la puede aceptar o rechazar, y así *ad infinitum*.

Supondremos que ambos jugadores aprecian un pastel más grande, y que también les disgusta el retraso temporal. Por tanto, si se alcanza un acuerdo de división del pastel $(x, 1-x)$ en el momento t, el pago del jugador α es $\delta^t_\alpha\, x$ y el pago del jugador β es $\delta^t_\beta\,(1 - x)$, para algunos δ_α, $\delta_\beta \in (0, 1)$. Estos coeficientes δ son *factores de descuento*, diferentes para ambos jugadores.

Para saborear este tipo de negociación con ofertas secuenciales, vamos a comenzar con una variante en la que hay un número *finito* de ofertas N. Este modelo fue primero estudiado por Ingolf Stahl (Stahl, I. (1972): *Bargaining Theory* 1972). Para resolver el Equilibrio Perfecto en Subjuegos (SPE), podemos usar inducción retrógrada, comenzando por la oferta final.

Supongamos N = 2. En la fecha 1, el jugador β podrá hacer una oferta final *tómalo o déjalo*. Como el juego está terminando, el jugador α aceptará cualquier división, con lo cual el jugador β ofrecerá $y = 0$.

¿Qué implica esto en la fecha cero? El jugador β anticipa que si rechaza la oferta del jugador α, conseguirá todo el pastel el período siguiente, con un pago total de δ_β. Luego, para conseguir que su oferta sea aceptada, el jugador α le debe ofrecer al jugador β por lo menos δ_β. En consecuencia, el jugador α le ofrecerá la división $(1-\delta_\beta, \delta_\beta)$, y el jugador β aceptará.

Proposición 1 En el juego de negociación con ofertas secuenciales para N = 2, el único equilibrio perfecto en subjuego SPE involucra una división inmediata $(1 - \delta_\beta, \delta_\beta)$.

Solución del Modelo de Rubinstein

Resulta bastante sencillo ver cómo un juego de negociación en N períodos puede ser resuelto mediante inducción retrógrada y generar un equilibrio perfecto en subjuego único (los detalles del caso N>2 son algo tediosos y no agregan contenido económico, por lo cual no trataremos el caso general).

Pero la versión en horizonte infinito no es obvia. Sin embargo, se puede demostrar la siguiente proposición:

Proposición 2 Hay un único equilibrio perfecto en subjuegos en el juego de negociación secuencial siguiente. Cuando el jugador α propone, sugiere una división $(x, 1 - x)$ con $x = (1 - \delta_\beta) / (1 - \delta_\alpha\delta_\beta)$. El jugador β acepta cualquier división que deja en sus manos como mínimo $1 - x$. Cuando el jugador β propone, sugiere una división $(y, 1 - y)$ con $y = \delta_1 (1 - \delta_2) / (1 - \delta_1\delta_2)$. El jugador α acepta cualquier división que deja en sus manos como mínimo y. Luego, la negociación termina *inmediatamente* con una división $(x, 1 - x)$. Ver la demostración en Levin.

Algunos comentarios sobre este modelo de Rubinstein.

1. *Ser paciente ayuda*. El pago del jugador α, $(1 - \delta_\beta) / (1 - \delta_\alpha\delta_\beta)$, es creciente en δ_α y decreciente en δ_β. La razón es que, si ustedes son más pacientes, se pueden dar el "lujo" de esperar hasta que alcancen a tener poder de negociación (o sea, hasta poder hacer la oferta).

2. El primer jugador en hacer una oferta se encuentra en ventaja. Con idénticos factores de descuento δ, el modelo predice una división

$$(1/ (1 + \delta), \delta/ (1 + \delta))$$

que resulta mejor para el jugador α. Sin embargo, a medida que $\delta \to 1$, esta ventaja del que mueve primero desaparece. La division límite es $(1/2, 1/2)$.

3. No hay retrasos. El jugador β acepta la primera oferta del jugador α.

4. Sin embargo, los detalles del modelo dependen en grado sumo de que no haya contraofertas inmediatas. Si las hay, ¡resulta que el modelo genera *muchísimos equilibrios*!

4. <u>*Notación utilizada para el artículo de Rubinstein*</u>

Para el tratamiento general del modelo de Rubinstein, introducimos la siguiente notación:

s_i Porción del pastel que el jugador i recibe en la partición s; es decir $s_1= s$ y $s_2=1\text{-}s$, donde $s \epsilon S$, $S= [0, 1]$

(s, t) Resultado del juego; es decir, el par ordenado cuando 1 recibe s y 2 recibe $1\text{-}s$ en el momento t. $(0, \infty)$ indica un desacuerdo perpetuo

S^t El conjunto de todas las sucesiones de longitud t de elementos en S

F El conjunto de todas las sucesiones de funciones $f= \{f^t\}_{t=1}^{\infty}$, en donde $f^1 \epsilon S$, para t impar $f^t: S^{t-1} \to S$, y para t par $f^t : S^t \to \{Y, N\}$; es decir, el conjunto de todas las estrategias del jugador que comienza la negociación

G el conjunto de todas las sucesiones de funciones $g= \{g^t\}_{t=1}^{\infty}$, donde $g^1 \epsilon S$, para t impar $g^t: S^t \to \{Y, N\}$, y para t par $g^t: S^{t-1} \to S$; es decir, el conjunto de estrategias del jugador que debe responder a la oferta del otro jugador en la primera jugada de negociación

$\sigma(f, g)$ la sucesión de ofertas en que 1 arranca la negociación adoptando $f \epsilon F$, y 2 adopta $g \epsilon G$. En forma similar, $\sigma(g,f)$ es el caso en que 2 arranca la negociación adoptando $f \epsilon F$ y 1 adopta $g \epsilon G$

$T(f,g)$ La duración de $\sigma(f,g)$ (puede ser ∞)

$D(f, g)$ la partición inducida por (f, g): es decir, el último elemento de $\sigma(f, g)$ (si existe ese elemento)

$P(f, g)$ la función de resultados del juego, $P(f, g)= (D(f, g), T(f, g))$ si $T(f, g) < \infty$

$\gtrsim_i$ la relación de preferencias del jugador i (completa, reflexiva y transitiva) sobre el conjunto $S \times N \cup \{(0, \infty)\}$, siendo N el conjunto de números naturales

c_i costo fijo de negociación del jugador i

δ_i factor fijo de descuento del jugador i

A conjunto de todas las particiones de los equilibrios perfectos (=PEP) de un juego en que 1 arranca la negociación; es decir, $\{s \epsilon S |$ existe una PEP $(f, g) \epsilon F \times G$ tal que $s= D(f, g)\}$

B conjunto de todas las PEP de un juego en que 2 arranca la negociación; es decir, $\{s \epsilon S|$ existe una PEP $(g, f) \epsilon G \times F$ tal que $s= D(g, f)\}$

$d_1(x)$ el menor de los y tales que $(y, 0) \gtrsim_1 (x, 1)$, $d_1(x) > 0$

$d_2(y)$ el mayor de los x tales que $(x, 0) \gtrsim_2 (y, 1)$, $d_2(y) < 1$

Δ el conjunto de todas las PEP; es decir,

$\{(x, y) \in S \times S \mid y$ es el menor número tal que $(x, 1) \succsim_1 (y, 0)$, x es el mayor número tal que $(y, 1) \succsim_2 (x, 0)$

Δ_1 $\{x \in S \mid$ existe $y \in S$ tal que $(x, y) \in \Delta\}$

Δ_2 $\{y \in S \mid$ existe $x \in S$ tal que $(x, y) \in \Delta\}$

$\epsilon(x)$ la partición que ofrece el jugador 2 basándose en la primera oferta del jugador 1 si el costo fijo de negociación se traslada al segundo período

x_0 partición que el jugador 1 propone en el primer período en una negociación que dura más de un período; o sea, el punto en el que $\epsilon(x)$ alcanza su máximo.

5. *Supuestos básicos*

Rubinstein comienza con la aclaración de que le gustaría evitar la confusión común del problema planteado con otros dos problemas que pueden plantearse sobre la situación de la negociación, a saber: (i) la cuestión positiva pregunta - ¿cuál es el acuerdo alcanzado en la práctica?; (ii) la cuestión normativa - ¿cuál es el acuerdo justo?

F. Y. Edgeworth había tratado el mismo problema hacía más de cien años en Mathematical Psychics: An Essay on the Applications of Mathematics to the Moral Sciences (1881) declarando que se trataba del problema más fundamental que existía en la economía. Pero los economistas tradicionalmente han tenido muy poco que decir acerca de situaciones de negociación donde el resultado depende claramente de interacciones entre sólo unos pocos individuos. Lo "muy poco" anteriormente mencionado es que el contrato acordado sea individualmente racional y Pareto óptimo; es decir, no peor que el desacuerdo, y que no haya un acuerdo que ambos prefieran. Sin embargo, ¿cuál de los numerosos (en general) contratos que reúnan estas condiciones se acordará? Los economistas respondían vagamente diciendo que esto depende de la "capacidad de negociación" de las partes.

Continúa nuestro autor: "Muchos intentos se han hecho con el fin de llegar a una respuesta clara al problema de negociación. Dos enfoques se pueden distinguir en la literatura publicada. El primero es el enfoque estratégico. Las maniobras de negociación de los jugadores son jugadas en un juego no cooperativo y el supuesto de racionalidad se expresa examinando los equilibrios de Nash. El segundo enfoque es el método axiomático." Se afirman como axiomas varias propiedades que parecería natural que tenga la solución y luego se descubre que los axiomas de hecho determinan la solución única.

Rubinstein utiliza un enfoque estratégico para examinar el equilibrio perfecto en un juego de negociación. El método estratégico resuelve las estrategias que seleccionan los jugadores a fin de maximizar sus pagos esperados en un juego no cooperativo. En este sentido, Rubinstein responde a la pregunta positiva porque su modelo describe el proceso de negociación y los resultados posteriores. El método axiomático, por otro lado, es un enfoque normativo porque "afirma como axiomas varias propiedades que parecería natural que tengan las soluciones y luego descubre que los axiomas de hecho determinan la solución de forma única" (Nash). El propósito del enfoque de Rubinstein es evitar algunas dificultades inherentes al enfoque estratégico. Hace supuestos sobre la solución sin especificar el proceso de negociación en sí. Obsérvese que, si son relevantes, estos axiomas sólo pueden restringir o bien el dominio de la solución o bien se deducen del supuesto de racionalidad. Por ejemplo, el axioma de simetría de Nash se puede considerar como el supuesto de que todas las diferencias entre los jugadores se pueden expresar en el conjunto de pares de utilidad derivados de los contratos posibles y que no hay otro elemento relevante que los distinga. Sin embargo, Rubinstein constata que el axioma fundamental en la mayoría de axiomatizaciones - la "Independencia de Alternativas Irrelevantes"-- no recibió una adecuada defensa y, de hecho, es el que más se adapta a la pregunta normativa.

El modelo de negociación de Rubinstein se compone de dos jugadores que deben ponerse de acuerdo sobre el reparto de un pastel. Un equilibrio de Nash es una situación en la que no hay ningún jugador que pueda alcanzar un mayor pago por desviarse de la estrategia de equilibrio. Un equilibrio de Nash supone que cada jugador conoce todas las mejores estrategias de respuesta de los demás. El modelo que analizaremos es dinámico en lugar de estático, ya que considera las estrategias adoptadas a lo largo de varios períodos de tiempo. Los modelos dinámicos obligan a los jugadores a contabilizar las respuestas de los demás jugadores a sus acciones al momento de decidir la estrategia óptima no sólo en el período de tiempo inicial sino a lo largo de todas las trayectorias futuras. En primer lugar, un jugador propone una partición del pastel, después el otro jugador la acepta o rechaza, sabiendo que el rechazo requiere una contrapropuesta. Las propuestas se alternan entre los jugadores hasta que se alcance un acuerdo. Formalmente: dos jugadores tienen que llegar a un acuerdo sobre el reparto de un pastel de tamaño 1. Cada uno tiene que hacer, a su vez, una propuesta sobre cómo debe ser dividido. Luego de que una de las partes hizo una oferta, la otra debe decidir si la acepta o la rechaza y sigue con la negociación. Las relaciones de preferencia de los jugadores están definidas sobre el conjunto de pares ordenados del tipo (x, t) (donde $0 \leq x \leq 1$ y t es un entero no negativo). El par (x, t) se interpreta como "1 recibe x y 2 recibe $1 - x$ en el momento t."

Con el fin de deducir el equilibrio perfecto, Rubinstein formula hipótesis importantes en su modelo. Un supuesto fundamental del modelo es la *información perfecta*; cada jugador tiene información completa sobre las preferencias de su adversario. Este supuesto es restrictivo, porque en realidad esto casi nunca es el caso y el modelo puede extenderse suponiendo asimetría de un solo lado o también doble información asimétrica. Rubinstein asume, además, que las dos partes sólo difieren en el *orden* de negociación y las *preferencias*.

Otros supuestos sobre el modelo se denotarán como (MA) para distinguirlos de los supuestos posteriores sobre las preferencias. Los dos primeros supuestos del modelo son que el pastel es *deseable* (Ma-1) y el tiempo es *valioso* (MA-2).

Rubinstein también supone tanto la *continuidad* (MA-3) y el carácter estacionario (MA-4). Un supuesto común en muchas técnicas de series de tiempo es que los datos son estacionarios. Un proceso estacionario tiene la propiedad de que la media, la varianza y la estructura de autocorrelación no cambian con el tiempo. La *estacionariedad* significa que si el jugador 1 prefiere una porción s_1 en el instante t_1 a la porción s_2 a recibir más tarde en t_2, entonces el jugador 1 siempre preferirá s_1 a s_2, siempre y cuando $t_2 - t_1$ no cambie (con independencia de los valores tomados por t_1 o t_2).

El supuesto final (MA-5), establece que *cuanto mayor sea la porción, más compensación será requerida por un jugador para que un retraso de un período le resulte irrelevante*. Esto es intuitivo. Si la cantidad que puede recibir en este momento aumenta, así también es necesario que aumente la cantidad a recibir después de este período de tiempo, con el fin de permanecer indiferente entre los dos períodos.

6. Modelo

Las relaciones de preferencia de los jugadores están definidas sobre el tipo *(s, t)* donde *s* es algún número entre 0 y 1 y *t* es un número entero no negativo. Por ejemplo, el par (0.5, 2) significa que el jugador 1 recibe la mitad del pastel en *t*= 2.

S= [0, 1] es el conjunto de todas las particiones posibles del pastel. Si s_i representa la porción de pastel que recibe el jugador *i* en la partición propuesta *s*, hacemos $s_1 = s$ y $s_2 = 1-s$. El conjunto de todas las estrategias posibles del jugador que comienza con la negociación es *F,* y *G* es el conjunto de estrategias del jugador que comienza el juego respondiendo a la primera oferta. El jugador 1 elige sus estrategias en *F*, mientras que el 2 lo hace en *G*. Entonces, cuando *t* es impar, el jugador 1 le hace una oferta al 2, y si es par, el jugador 1 decide si acepta o no la oferta del jugador 2. Hacemos que *σ (f, g)* sea la sucesión de ofertas cuando 1 comienza la negociación y adopta la estrategia $f \epsilon F$ y el jugador 2 adopta la estrategia $g \epsilon G$. *T (f, g)* es la longitud de la secuencia de negociación. *D (f, g)* es el acuerdo alcanzado al final, o la partición inducida por *(f, g)*. *T (f, g)* es igual a ∞ si nunca se alcanza un acuerdo, en cuyo caso *D (f, g)* es cero para los dos jugadores. En forma similar, aunque *T (f, g)* tenga un horizonte finito, pero los jugadores no lleguen a un acuerdo en el último período, ambos reciben cero.

La extensión del modelo para incluir opciones externas significa permitir que ambos jugadores tengan pagos por defecto para que ya no se vean obligados a irse con cero si no se alcanza un acuerdo. Con opciones externas e información perfecta, el jugador con la mejor opción externa tiene una ventaja de negociación. Opciones externas y diferentes valoraciones del pastel son dos componentes citadas comúnmente del poder de negociación que no están incluidas en el modelo de Rubinstein. Su modelo del poder de negociación está atado específicamente a los costos de negociación y los factores de descuento.

Sea *P (f, g)* la función de resultados, que responde a la siguiente especificación:

$$
\begin{aligned}
P(f, g) &= (D(f, g), T(f, g)) && T(f, g) < \infty \\
&= (0, \infty) && T(f, g) = \infty
\end{aligned}
$$

En caso de que se invierta el orden de negociación, se utiliza la misma notación, pero invirtiendo el orden de *f* y *g*. Por lo que la secuencia de las ofertas, cuando el jugador 2 inicia la negociación, es $s = \sigma(G, F)$, donde el jugador 2 selecciona ahora una estrategia de *F* y el jugador 1 selecciona una estrategia de *G*.

Rubinstein hace algunos supuestos adicionales sobre las preferencias.

Hay dos familias de modelos que satisfacen las condiciones anteriores, que son:

I. <u>*Costos fijos de negociación*</u>. Cada jugador tiene un número c_i tal que $(s, t_1) \gtrsim_i (s^o, t_2)$ si y sólo si $(s_i - c_i t_1) \geqq (s_i^o - c_i t_2)$. En otros términos, el jugador evalúa los resultados s_i obtenidos en *t* períodos convirtiendo el tiempo transcurrido en utilidad usando un coeficiente c_i fijo, que representa la desutilidad por período unitario de tiempo transcurrido (por ejemplo, desutilidad por mes). En un marco más general del modelo, el jugador i estaría caracterizado por la secuencia de preferencias $\{\gtrsim^t_i\}$, donde $\gtrsim^t_i$ es la preferencia de *i* sobre los resultados suponiendo que los jugadores no han llegado a un acuerdo en los primeros *t - 1* periodos. De hecho, se supone que $\gtrsim^t_i \equiv \gtrsim_i$ para todo *t*.

II. *Factores de descuento fijos*. Cada jugador i tiene un número $0< \delta_i \leqq 1$ tal que

$(s, t_1) \gtrsim (s^o, t_1)$ si y sólo si $s_i\delta_i^{t1} \geqq s_i \delta_i^{t2}$

Un factor de descuento fijo implica que la velocidad a la que los individuos descuentan su utilidad futura es constante en cada período. Un valor descontado de partición se evalúa multiplicando esa partición por el factor de descuento fijo elevado a la potencia t. Por ejemplo, la partición (s, t_1) se descuenta a $s_i\delta_i^{t1}$. Esto significa que a medida que δ_i se acerca a 1, un jugador descuenta el futuro en menor medida. Si δ_i fuera igual a uno, el individuo se hallaría indiferente entre recibir la misma partición en distintos momentos del tiempo, violándose MA-2. Si δ_i es igual a cero, en tal caso el individuo valuará en cero cualquier oferta más allá de la oferta inicial.

(A-1) Si $r_i > s_i$, entonces $(r, t) >_i (s, t)$. Éste es un resultado simple de las preferencias completas y del supuesto de estacionariedad (MA-4). Si $r_i > s_i$ y al jugador le ofrecen las dos al mismo tiempo, en tal caso preferirá la mayor partición porque el pastel es deseable.

(A-2) Si $s_i > 0$ y $t_2 > t_1$, entonces $(s, t_1) >_i (s, t_2) >_i (0, \infty)$. Este axioma también está vinculado con supuestos previos de que el pastel es deseable y que el tiempo es valioso (MA-2). Si $s_i > 0$, un jugador siempre lo aceptará más bien temprano que tarde. Como se supone que c_i es constante entre los diversos períodos, luego si $c_i > 0$ y $s_i \leq 1$, en tal caso (s_i, t) será preferida a (s_i, ∞), lo que significa que esperar para siempre a fin de tener s_i es la opción *menos* preferida.

(A-3) $(r, t_1) \gtrsim_i (s, t_1+1)$ si y solo si $(r,t_2) \gtrsim_i (s, t_{2+1})$. El supuesto 3 descansa en el supuesto MA-4 de estacionariedad. Si una partición propuesta ahora mismo es preferida a otra partición de aquí a un tiempo, entonces esta preferencia sobre particiones se mantiene siempre que la diferencia entre fechas en las que se ofrecen las particiones permanezca constante.

(A-4) Si $r_n \mapsto r$ y $(r_n, t_1) \gtrsim_i (s, t_2)$ luego $(r, t_1) \gtrsim_i (s, t_2)$;
Si $r_n \mapsto r$ y $(r_n, t_1) \gtrsim_i (0, \infty)$, luego $(r, t_1) \gtrsim_i (0, \infty)$.

El supuesto 4 asume que existe otro conjunto de particiones posibles que converge a un equilibrio r a lo largo del tiempo. Si alguna r_n se prefiere a la partición de equilibrio s, en tal caso la partición de equilibrio r también debe ser preferida al equilibrio s. Asimismo, si alguna partición r es preferida a nada en el infinito $(0, \infty)$, el equilibrio en r debe ser preferido a una situación en la que ambas partes no pueden alcanzar un acuerdo.

(A-5) Si $(s+ \varepsilon, 1) \sim_i (s, 0)$, $(s^o+ \varepsilon^o, 1) \sim_i (s^o, 0)$, y $s_i < s^o$, luego $\varepsilon_i \leq \varepsilon^o$.

El supuesto 5 es intuitivo. Si el jugador 1 está indiferente entre dos particiones en $t=1$ y $t=0$, un aumento en la partición en $t=0$ requiere un incremento en la partición en $t=1$ de al menos el mismo monto a fin de que el jugador 1 permanezca indiferente. Esto resulta del supuesto anterior MA-5. Supóngase un juego similar donde el jugador está indiferente entre 1 hoy o 100 dentro de diez años. Si alteramos la propuesta para que el jugador reciba $100,000 hoy, debemos incrementar el monto que el jugador recibe dentro de diez años en al menos $99 ($\epsilon \geq 99$) para que el jugador esté indiferente entre (100000, 0) y (100000 + ϵ, 10 años).

El enfoque estratégico de Rubinstein da lugar a un único equilibrio en el que se propone una oferta que es aceptada en el primer período de tiempo. Con costos de negociación fijos, si $c_1 > c_2$ la partición de equilibrio es $\boldsymbol{s_1 = c_2}$, porque el jugador 2 toma $1\text{-}c_2$ dejando al jugador 1 con c_2. Si $c_2 > c_1$, la partición de equilibrio es $\boldsymbol{s_1 = 1}$ donde el jugador 1 se queda con todo el pastel. Con factores de descuento fijos, la solución de equilibrio favorece al jugador que inicia la negociación, con la asignación de equilibrio $s_1 = (1\text{-}\ \delta_2)/\ (1\text{-}\ \delta_1\ \delta_2)$.

6. *Equilibrio Perfecto*

Equilibrio de Nash

Un par de estrategias tales que cada estrategia de un jugador sea la mejor respuesta a la estrategia anticipada del oponente es un equilibrio de Nash. Un equilibrio de Nash es estratégicamente estable (también se dice *auto-impuesto*) porque ningún jugador tiene incentivos a desviarse de la estrategia que adoptó.

En el documento, Rubinstein define el conjunto de estrategias $(f^*, g^*) \epsilon F \times G$ como un equilibrio de Nash si no existe $f \epsilon F$ tal que $P\ (f, g^*) >_1 P\ (f^*, g^*)$. Esto significa que el jugador 1 no tiene otra estrategia alternativa f que le proporcione mayor pago que f^*, dado el conocimiento común de que el jugador 2 jugará su estrategia de equilibrio g^*. Por simetría, un equilibrio de Nash también requiere que el jugador 2 no se desvíe en forma unilateral, lo que implica que no hay una estrategia g preferida sobre g^*, dado el conocimiento común de que el jugador 1 jugará la estrategia de equilibrio f^*.

Proposición 1 Para $s \epsilon S$, s es una partición inducida por el equilibrio de Nash.

Demostración $f^* \epsilon F$ y $g^* \epsilon\ G$ se definen como:

Para t impar, $f^{*t} \equiv s,\ g^{*t}(s^1,\dots s^t) = Y,\ s^t \leqq s,$
$$= N,\ s^t > s;$$

Recuérdese que s constituye la propuesta de una partición que asigna (s^t) al jugador 1 y $(1\text{-}s^t)$ al jugador 2. El jugador 1 (estrategia f^*) mueve en primer término y propone una partición de equilibrio de Nash s. Responde el jugador 2 (estrategia g^*), y rechaza la propuesta si la porción s^t del jugador 1 es estrictamente mayor que la partición de equilibrio, porque deja al jugador 2 con una porción más reducida que s. El jugador 2 consiente la propuesta si el jugador 1 obtiene menos o igual que la partición de equilibrio, dejando la partición del jugador 2 como $(1\text{-}s^t) \geqq s$.

Para t par, $g^{*t} \equiv s, f^{*t}\ (s^1,\dots s^t) = Y,\ s^t \geq s,$

$$= N,\ s^t < s;$$

En t par, el jugador 2 propone la asignación de equilibrio de Nash al jugador 1. El jugador 1 consiente siempre que la porción t que él obtenga sea mayor o igual que la partición de equilibrio de Nash; el jugador 2 rechazará la propuesta si su porción es estrictamente menor que la partición de equilibrio.

Luego la estrategia de equilibrio de Nash es *(f*, g*)* y da lugar a la función de resultados *P (f*, g*)= (s, 1)*, lo que significa que se propone y se acepta la asignación de equilibrio de Nash en el primer período. Como se verá luego, el equilibrio de Nash es un concepto débil dentro del contexto de un juego dinámico, por lo cual en su lugar se usa el concepto de equilibrio perfecto para obtener un equilibrio. ▌

Equilibrio Perfecto

Las dos ecuaciones siguientes definen el supuesto de racionalidad requerido para un Equilibrio Perfecto. Supongamos, como Rubinstein, que T es par y t es impar.

$$(f \mid s^1 \ldots s^T)^t\,(r^1 \ldots r^{t-1}) = f^{T+t}\,(s^1 \ldots s^T, r^1 \ldots r^{t-1})$$
$$(g \mid s^1 \ldots s^T)^t\,(r^1 \ldots r^t) = g^{T+t}\,(s^1 \ldots s^T, r^1 \ldots r^t)$$

$(f \mid s^1 \ldots s^T)$ (para el jugador 1) y $(g \mid s^1 \ldots s^T)$ (para el jugador 2) se definen como las estrategias adoptadas después de observar la secuencia de ofertas rechazadas antes de y en T. Luego el 1º miembro de cada ecuación es una predicción que hace cada jugador en el momento t de las futuras estrategias $r^1 \ldots r^{t-1}$ (o $r^1 \ldots r^t$), habiendo observado las ofertas pasadas rechazadas $s^1 \ldots s^T$. El 2º miembro de cada ecuación es la estrategia del jugador en el momento $T+t$ luego de haber observado las ofertas rechazadas $s^1, \ldots, s^T, r^1, \ldots, r^{t-1}$ (o $s^1 \ldots s^T, r^1 \ldots r^t$). La igualdad entre el 1º miembro y el 2º m. es el supuesto crítico de racionalidad: los jugadores conocen los resultados pasados y tienen previsión perfecta sobre la progresión del juego en los futuros subjuegos. En otras palabras, un Equilibrio Perfecto requiere que las estrategias predichas para los períodos futuros sean iguales a las que fueron jugadas una vez que el juego llega a t.

Supongan la siguiente simplificación para apreciar el requerimiento de racionalidad involucrado por ambas ecuaciones: $T=2$ y $t=1$, lo que significa que han pasado dos períodos y que los jugadores están mirando al siguiente período tres,

$$(f \mid s^1, s^2)^1 = f^{2+1}\,(s^1, s^2)$$
$$(g \mid s^1, s^2)^1\,(r^1) = g^{2+1}\,(s^1, s^2, r^1)$$

Suponiendo que el jugador 1 comenzó el juego, luego de dos rondas, le corresponde nuevamente hacer la propuesta. Una vez que se llega a $T+t= 3$, el jugador 1 aún observa las ofertas rechazadas (s^1, s^2) porque sus propias propuestas aún no han sido respondidas y luego no son parte de la información pasada. La jugada del jugador 2 en el momento t es una respuesta a la oferta del jugador 1. Por el supuesto de racionalidad, en el momento $T+t = 3$, si la oferta es rechazada, en tal caso r^1 pasa a ser parte de la historia de ofertas rechazadas.

Definición *(f*, g*)* es un Equilibrio Perfecto si, después de una historia de ofertas rechazadas $s^1 \ldots s^t$, para T impar (propone el jugador 2),

(P-1) si no hay estrategia $f \epsilon F$ que el jugador 2 pueda jugar y quedar mejor, dado que el jugador 1 ya ofreció su estrategia de equilibrio $f^* \epsilon F$

(P-2) si el jugador 2 acepta un equilibrio $g^* \epsilon G$, el jugador 1 no puede hacer ninguna contrapropuesta $f \epsilon F$ tal que el jugador 2 preferiría ahora mismo

(P-3) si el jugador 2 rechaza una oferta $g^* \epsilon G$, existe otra oferta que sería preferida ahora mismo

Cuando T es par (propone el jugador 1),

(P-4) si no hay estrategia $f \in F$ que el jugador 1 pueda jugar y quedar mejor, dado que el jugador 2 ya ofreció su estrategia de equilibrio $g^* \epsilon G$

(P-5) si el jugador 1 ha aceptado el equilibrio $f^* \epsilon F$, el jugador 2 no puede contraofrecer $f \epsilon F$ que el jugador 1 preferiría ahora mismo

(P-6) si el jugador 1 rechaza la oferta $f^* \epsilon F$, existe otra oferta que preferiría ahora mismo

Debilidad del Equilibrio de Nash

En un juego de negociación dinámico, el equilibrio de Nash es un concepto débil porque puede surgir en situaciones donde un jugador pueda desviarse del equilibrio y conseguir un mayor pago. Rubinstein propone el ejemplo siguiente: Supongan un equilibrio de Nash que divide el pastel por mitades, $s= 0.5$, y que los dos jugadores tienen costos fijos de negociación $c_1= 0.1$ y $c_2= 0.2$. Si en un equilibrio de Nash como se definió previamente, en t_1 el jugador 1 ofrece la partición $s^1= 0.6$ (0.4 para el jugador 2), el jugador 2 la rechazará porque $s^1> s$. El juego se desplaza entonces a t_2 en cuyo punto supondremos que se ofrece y acepta el equilibrio de Nash $s= 0.5$. Como la negociación es costosa, ahora los pagos son $(0.4, 0.3)$. Aunque la estrategia del jugador 2 fue consistente con el equilibrio de Nash, no es un Equilibrio Perfecto ya que hubiera preferido un pago de 0.4 en el período inicial en lugar de 0.3 en t_2. Su rechazo de $s^1= 0.6$ no es por lo tanto una estrategia de Equilibrio Perfecto.

La perfección del subjuego requiere que una estrategia del jugador sea óptima en todo momento del juego, no sólo en la etapa inicial. En otras palabras, un Equilibrio Perfecto requiere que en todo subjuego, las estrategias de los jugadores constituyan equilibrios de Nash. Obviamente, el equilibrio de Nash en un juego en una sola etapa satisface el requerimiento de perfección de los subjuegos por *default*. Bajo una solución de Equilibrio Perfecto, el jugador 1 puede desviarse de una asignación inicial Nash de $s= 0.5$ ofreciendo al jugador 2 una asignación $0.5 - \epsilon \geq 0.3$. El jugador 2 acepta el desvío a fin de evitar los costos asociados con prolongar el juego con desacuerdos. Esta *purificación* del concepto de equilibrio de Nash es la que se usa como concepto de solución.

7. *Lemas sin demostración y teorema central*

Previamente vamos a clarificar la notación. Sea el conjunto siguiente

$A= \{s \epsilon S \mid$ existe un equilibrio perfecto $(f, g) \epsilon F \times G$ tal que $s= D(f, g)\}$

que es el conjunto de todos los E.P. (=Equilibrios Perfectos) de un juego cuando el jugador 1 inicia la negociación. Sea B el conjunto de todos los E.P. cuando es 2 el que inicia la negociación:

$\{s \epsilon S \mid$ existe un equilibrio perfecto $(g, f) \epsilon G \times F$ tal que $s= D(g, f)\}$.

Lema 1: Sea $a \epsilon A$. Para todo $b \epsilon S$ tal que $b> a$, existe $c \epsilon B$ tal que $(c, 1) \gtrsim_2 (b, 0)$.

El lema 1 requiere que el jugador 2 tenga protección contra el jugador 1 cuando le exija más en su oferta inicial. El jugador 2 sólo puede tener una protección creíble si él puede amenazar con rechazar cualquier propuesta del jugador 1, que sea mayor que a. La única manera de que el jugador disponga de esa amenaza es si el jugador 2 prefiere otra partición, c, y está *dispuesto a esperarla*. Para este lema, hay otro lema simétrico cuando el jugador 2 comienza la negociación:

Lema 2: Para todo $a \epsilon B$ y $b \epsilon S$ tales que $b < a$, existe $c \epsilon A$ tal que $(c, 1) \gtrsim_1 (b, 0)$.

Lema 3: Sea $a \epsilon A$. Luego para todo b tal que $(b, 1) >_2 (a, 0)$ existe $c \epsilon A$ tal que $(c, 1) \gtrsim_1 (b, 0)$.

El lema 3 requiere que el jugador 1 tenga protección contra el jugador 2 si le exige más de la oferta original del jugador 1. Sin protección, el jugador 2 rechazará la oferta del jugador 1 a favor de una porción más grande del pastel. Pero si el jugador 2 sabe que el jugador 1 preferiría esperar otra partición, *c*, en lugar de aceptar la contraoferta del jugador 2, entonces el jugador 1 tiene una amenaza creíble, y por lo tanto desalienta al jugador 2 a pedir más de la perfección de los equilibrios.

A continuación, el lema simétrico del Lema 3.

Lema 4: Para todo $a \epsilon B$ y todo $b \epsilon S$ tales que $(b, 1) >_1 (a, 0)$ existe $c \epsilon B$ tal que $(c, 1) \gtrsim_2 (b, 0)$.

El teorema central

Previamente algunas definiciones:

$\Delta = \{(x, y) \in S \times S \mid y$ es el menor número tal que $(x, 1) \lesssim_1 (y, 0)$; x es el mayor número tal que $(y, 1) \lesssim_2 (x, 0)\}$

$\Delta_1 = \{x \epsilon S \mid$ existe $y \epsilon S$ tal que $(x, y) \epsilon \Delta\}$

$\Delta_2 = \{y \epsilon S \mid$ existe $x \epsilon S$ tal que $(x, y) \epsilon \Delta\}$

Recordar que A es el conjunto de todas las particiones de equilibrios perfectos de un juego en el que 1 arranca la negociación; es decir, $\{s \epsilon S \mid$ existe una PEP $(f, g) \epsilon F \times G$ tal que $s = D(f, g)\}$. Asimismo, B es el conjunto de todas las PEP de un juego en que 2 arranca la negociación; es decir, $\{s \epsilon S \mid$ existe una PEP $(g, f) \epsilon G \times F$ tal que $s = D(g, f)\}$.

Ahora se enuncian cuatro proposiciones que tampoco se demostrarán sobre las relaciones que guardan A, B, Δ_1 y Δ_2.

Proposición 1. *Si* $(x, y) \epsilon \Delta$, entonces $x \epsilon A$ e $y \epsilon B$.

Proposición 2. $\Delta \neq \emptyset$, y por consiguiente A y B no son vacíos.

Proposición 3. El grafo de Δ es un segmento lineal cerrado que yace paralelo a la diagonal $y = x$.

Proposición 4. Si $a \epsilon A$, luego $a \epsilon \Delta_1$, y si $b \epsilon B$, luego $b \epsilon \Delta_2$.

El siguiente teorema resume estas proposiciones:

Teorema. $A = \Delta_1 \neq \emptyset$, $B = \Delta_2 \neq \emptyset$. A y B son intervalos cerrados y existe un $\epsilon \geq 0$ tal que $B = A - \epsilon$.

Demostración. *De las Proposiciones 1 y 4, se sabe que* $A = \Delta_1$, $B = \Delta_2$. *Por la Proposición 2, se sabe que ambos son no vacíos, luego* $A = \Delta_1 \neq \emptyset$, $B = \Delta_2 \neq \emptyset$. *De la Proposición 3 se sabe que A y B son intervalos cerrados y que existe* $\epsilon \geq 0$ *tal que* $B = A - \epsilon$. ▌

8. Conclusiones del modelo de Rubinstein

Conclusión 1: Costos fijos de negociación

En caso de que ambos jugadores tengan costos fijos de negociación, c_1 y c_2:

(1) Si $c_1 > c_2$, c_2 es el único E.P.

(2) Si $c_1 = c_2$, toda $c_1 \leqq x \leqq 1$ es un E.P.

(3) Si $c_1 < c_2$, el único E.P. es 1.

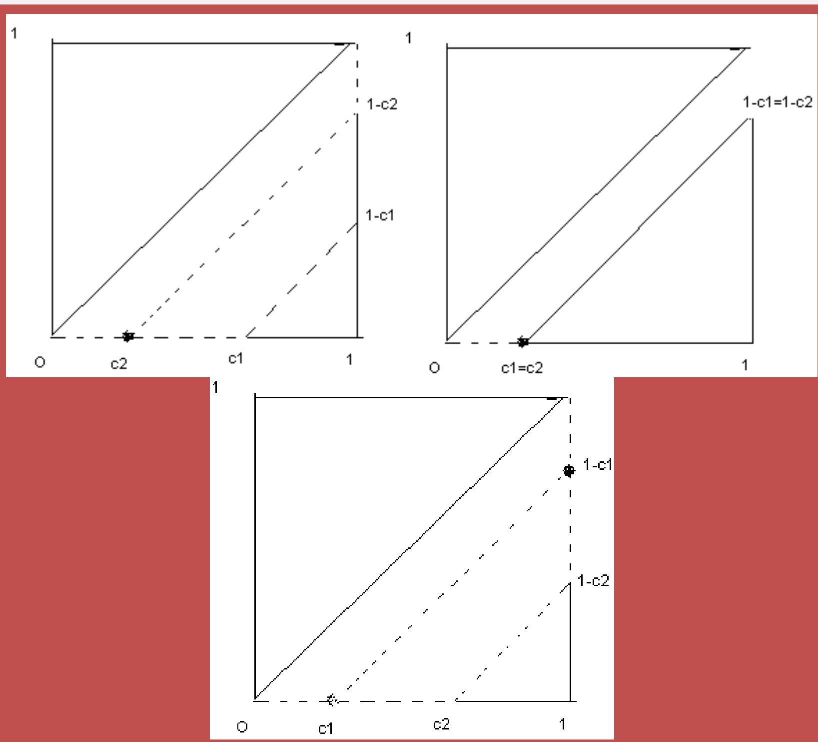


Figura 1: Costos Fijos de Negociación

Demostración

En el modelo con costo fijo de negociación, las preferencias de i se derivan de la función $y\text{-}c_it$, es decir todo jugador soporta un costo fijo en cada período. Recuérdese que $d_1(x)$ identifica al menor y tal que $(y, 0) \gtrsim_1 (x, 1)$ y que $d_2(y)$ es el mayor x tal que $(x, 0) \gtrsim_2 (y, 1)$. Dados $d_1(x)>0$ y $d_2(y)<1$, $d_1(x)=$ máx. $\{x - c_1, 0\}$ y $d_2(y)=\min\{y+c_2, 1\}$. Aquí, $x\text{-}c_1$ es el menor pago que el jugador 1 puede conseguir en el segundo período e $y+c_2$ es el máximo pago que el jugador 2 puede obtener en el segundo período. Como conjunto de todas las soluciones de los E.P., $\Delta = \{(x, y) \mid y = d_1(x) \text{ y } x = d_2(y)\}$, y así Δ resulta el conjunto de todas las ecuaciones $y=$ máx. $\{x - c_1, 0\}$ y $x=\min\{y+c_2, 1\}$. Esta conclusión surge de los tres diagramas vinculados a los casos (1) $c_1 > c_2$, (2) $c_1 = c_2$, y (3) $c_1 < c_2$.

Nota La condición $A \cap B = \emptyset$ es requerimiento suficiente para que un E.P. particular sea el acuerdo alcanzado después de la primera oferta. Si no, un acuerdo E.P. puede alcanzarse con posterioridad, ya que existe una intersección entre A y B. En otras palabras, significa que si (f^*, g^*) es un E.P. y $T(f^*, g^*)>1$, luego $D(f^*,g^*)$ no sólo es miembro de A sino también de B. En el modelo de costos fijos de negociación, $c_1 > c_2$ y $c_1 < c_2$ son casos en que la negociación terminará en efecto en el primer período.

Sea $\epsilon(x)$ la oferta del jugador 2 hecha en el segundo período basada en la estrategia del jugador 1 en el primer período, que es una función no negativa definida en el intervalo unitario $[0,1]$ tal que $\epsilon(x) \leq$ máx. $\{0, x\text{-}c\}$. Supóngase que $\epsilon(x)$ alcanza un máximo en x_0 donde $\epsilon(x)>2c$ porque el jugador 1 desea maximizar su pago en el segundo período.

Sean (f^*, g^*) que satisfacen $f^{1*}=x_0$; $g^{1*}(x_0)=N$, si $c<x_0$; $g^{1*}(x_0)=Y$, si $x_0 \leq c$. Estas son las estrategias E.P. que los jugadores 1 y 2 adoptan en el primer período. Después, sus estrategias

en la partición $\epsilon(x_0)$ son idénticas a las estrategias descriptas en la Proposición 1. Ahora derivaremos las tres condiciones para que el juego de negociación ***no termine*** *en el primer período.*

I. El jugador 2 acordará con cualquier partición que le deje a 2 más que 1-c en el primer período porque 2 nunca recibirá más que eso a partir de entonces, lo que es igual a $x_0 < c$, Luego, para que la negociación se traslade al segundo período, el jugador 1 no le ofrecerá a 2 una partición que no pueda rechazar en el primer período, con lo cual $x_0 \geq c$.

II. Tómese en consideración el costo de negociación de 2. El pago de 2 recibido de la oferta que él proponga debe ser mayor que el que 2 puede conseguir en el primer período. Para conseguir $(x_0, 0) \precsim_2 (\epsilon(x_0), 1)$, $1-x_0 \leq 1 - \epsilon(x_0) - 1$. Lo cual significa que la partición $\epsilon(x_0)$ le debe dar a 2 al menos $1-x_0+c$, es decir $\epsilon(x_0) \leq x_0 - c$.

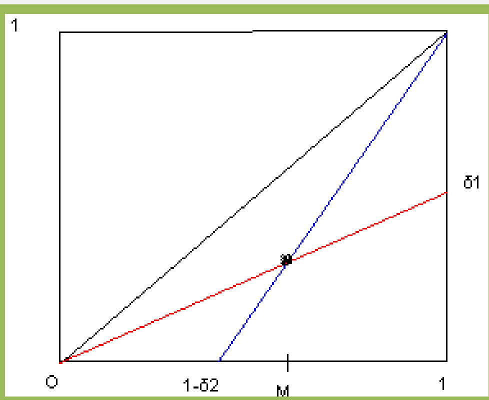


Figura 2 Factores de descuento fijos

III. Si la negociación termina en el segundo período, también el jugador 1 estará dispuesto a aceptar la partición $\epsilon(x_0)$. Luego desde el punto de vista del jugador 1, el pago recibido por 1 en el primer período debería ser menor que en el segundo período, lo que puede ser denotado como $(x_0, 0) \precsim_1 (\epsilon(x_0), 1)$. Por lo tanto, $\epsilon(x_0) - c > x_0$, lo que da $\epsilon(x_0) \geq 2c$ y $x_0 \geq 3c$ dado que $\epsilon(x_0)+c \leq x_0$.

Nótese que el resultado de E.P. puede no ser un óptimo paretiano, dado que ambos jugadores prefieren acordar $\epsilon(x_0)$ al principio de la negociación, pero terminarán eventualmente con $(\epsilon(x_0), T(f^*, g^*))$ mientras que $T(f^*, g^*) > 1$. ▌

<u>Conclusión 2: Factores de descuento fijos</u>

En caso de que los jugadores tengan factores de descuento fijos – δ_1 y δ_2 – si al menos uno de los δ_i es estrictamente menor que 1 y al menos uno de ellos es estrictamente positivo, en tal caso el único E.P. es $M = (1-\delta_2)/(1-\delta_1\delta_2)$.

<u>Demostración</u> En el modelo con factores de descuento fijos, la preferencia de i se obtiene a partir de la función $y\delta_i^t$, o sea cada jugador tiene un factor fijo de descuento. La expresión $d_1(x)$ significa el menor y tal que $(y, 0) \succsim_1 (x, 1)$ y la expresión $d_2(y)$ es el mayor x tal que $(x,0) \succsim_2 (y, 1)$. Las expresiones $d_1(x) = x\delta_1$ y $d_2(y) = 1-\delta_2 + \delta_2 y$. Matemáticamente, $M = (1-\delta_2)/(1-\delta_1\delta_2)$ es la solución de $d_2(d_1(x)) = x$. En la figura 2 adjunta también se aprecia que la intersección de d_1 y d_2 está en $1-\delta_2 + \delta_2 x \, \delta_1 = x$, o sea donde $x = M$. ▌

9. *Modelo secuencial de arbitraje de oferta final. Rubinstein y de vuelta a Nash*[6]

La teoría de la negociación tiene dos pilares: la solución axiomática de negociación de Nash, y la solución de Rubinstein a la *negociación de horizonte infinito con ofertas alternadas*. Nash (punto 1) ha demostrado que si se satisfacen ciertos supuestos, entonces el objetivo de la "sociedad" de estos negociadores es maximizar el producto de sus pagos, la *función de bienestar social de Nash*. Rubinstein, como hemos visto, ha demostrado que un juego de negociación de horizonte infinito con ofertas alternadas tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos. Las dos soluciones están próximas cuando el factor de descuento es próximo a 1,[7] pero en general ambas soluciones son distintas.

Además de las negociaciones entre partes, en las negociaciones formales se utilizan algunos mecanismos alternativos de resolución de controversias si las partes no llegan a un acuerdo antes de un determinado plazo. Uno es el *arbitraje de oferta final*, en el que el árbitro tiene que elegir entre las ofertas presentadas por las partes. Por ejemplo, en los Estados Unidos, el arbitraje de oferta final es utilizado frecuentemente para resolver los conflictos de interés en el empleo público y para determinar los sueldos de los jugadores profesionales de béisbol.

Resulta que estas tres piezas importantes en la resolución de conflictos – Nash, Rubinstein y el arbitraje de oferta final – comparten una historia interesante. *Si el árbitro maximiza la función de bienestar social de Nash en el arbitraje de oferta final, entonces el único resultado de equilibrio perfecto en subjuegos del arbitraje es precisamente el resultado de equilibrio perfecto en subjuegos único en el juego de negociación de horizonte infinito de Rubinstein con ofertas alternadas*. La equivalencia se mantiene intacta si se negocia antes del arbitraje.

Es normal que en las negociaciones formales, las partes impongan una fecha límite. Cuando el plazo es corto, sin embargo, el mecanismo utilizado en la fecha límite por lo general tiene un gran impacto en el resultado de la negociación en equilibrio, introduciendo un sesgo a favor de una de las partes. El resultado del arbitraje de oferta final es una manera de imponer un plazo sin afectar el resultado de la negociación, independientemente de lo corta que sea la fecha límite, mediante el arbitraje con un árbitro que maximice la función de bienestar social de Nash. Una aportación más teórica a la teoría de la negociación es que la dinámica de equilibrio del modelo no es similar a la dinámica de los modelos de negociación habituales. A diferencia de éstos, las acciones de los jugadores tienen gran impacto en el comportamiento de equilibrio de los futuros jugadores, y es por eso que el resultado de dos períodos de negociación resulta ser el mismo que el resultado de la negociación en infinitos períodos en la configuración habitual.

El modelo más formal es el siguiente. Hay dos negociadores, a saber, 1 y 2, y un árbitro. Los negociadores han de seleccionar conjuntamente un par (x, y) de un conjunto convexo, compacto X, donde $X \subset R_{2+}$ y se entiende como el conjunto de todos los pares de utilidad esperada viables para los negociadores después de normalizar los pagos de desacuerdo a $(0, 0) \in X$. Hay tres fechas $t \in \{0, 1, 2\}$. En la fecha $t = 0$, el negociador 1 presenta una oferta $(x_0, y_0) \in X$ al árbitro. La oferta es observada por el negociador 2, que decide si debe aceptar la oferta, terminando el juego con (x_0, y_0), o esperar y presentar su propia oferta $(x_1, y_1) \in X$ al árbitro en $t = 1$. De nuevo, en $t = 1$, la oferta (x_1, y_1) es observable, y el negociador 1 decide si acepta. Si la acepta,

[6] Muhamet Yildiz - *Nash meets Rubinstein in final-offer arbitration*, 2011.
[7] Binmore K., Rubinstein A., y Wolinsky A. (1986), *The Nash Bargaining Solution in Economic Modelling*.

(x_1, y_1) es elegido y termina el juego. De lo contrario, el árbitro toma la decisión en *t= 2*, eligiendo

$$(x_2, y_2)= \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$$

(*En el arbitraje de oferta final, el árbitro tiene que elegir una de las ofertas presentadas*.) Si *(x, y)* es elegido en *t*, entonces los beneficios de los negociadores 1 y 2 son $\delta_t x$ y $\delta_t y$, respectivamente. La función de utilidad del árbitro en *t=2* es la función de bienestar social de Nash (1950):

$$u_A (x, y) = xy.$$

No es necesario identificar las preferencias temporales del árbitro porque mueve sólo una vez. Este juego de información perfecta se denomina *modelo secuencial de arbitraje de la oferta final*.

Se hacen dos hipótesis de modelado cruciales. En primer lugar, las partes pueden aceptar las ofertas antes de que el árbitro tome una decisión. Esta hipótesis se cumple comúnmente en la vida real. De hecho, en la Liga Mayor de Béisbol, en USA, en el 80% de los casos que se presentan a un árbitro, las partes resuelven antes de que el árbitro tome una decisión, que lleva un mes. En segundo lugar, las ofertas se realizan secuencialmente. Este supuesto es natural porque a veces la parte que presenta un caso a un árbitro tiene incentivo para presentar su oferta con la solicitud y dejar que la otra parte sepa cuál es la oferta.

Análisis del caso de utilidad transferible[8] Con el fin de ilustrar la idea principal, consideremos el caso de utilidad transferible, en la que $X = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$. Aquí, se excluyen los pagos Pareto-inferiores para mayor claridad. En el último periodo, para maximizar la función de bienestar social de Nash, el árbitro elige la oferta que está más próxima a (½, ½). Supongamos ahora que negociador 2 ofrece (x_1, y_1) tal que x_1 está más cerca de ½ que x_0. El negociador 1 no rechazaría tal oferta porque el árbitro seleccionaría (x_1, y_1) en el próximo período de todos modos. Si x_0 está más cerca de ½, entonces él acepta (x_1, y_1) si $\delta x_0 \geq x_1$, ya que (x_0, y_0) se seleccionaría al día siguiente si rechaza la oferta. Por lo tanto, en equilibrio, el negociador 2 contra ofrece $(x^*_1 (x_0), 1 - x^*_1 (x_0))$ con

$$x^*_1 (x_0) = mín. \{\delta x_0, 1-x_0\}$$

Nótese que $x^*_1 (x_0)$ alcanza su máximo en $x^*_0= 1/(1+\delta)$, que es la oferta de equilibrio del modelo de Rubinstein (véase sección 8.) En el primer período, si el negociador 1 oferta x^*_0, entonces el otro negociador aceptaría esa oferta porque es indiferente entre pagar x^*_0 en el primer período y el pago de $x^*_1 (x^*_0) = \delta/(1 + \delta)$ en el próximo período. Si le pide un pago más alto $x_0> x_0^*$, lo rechazará porque tan alta demanda x_0 le permite contra ofrecer un pago bajo $x^*_1(x_0)$ en el próximo período, tentándolo a esperar. En efecto, $1-x_0< \delta/(1+\delta)< \delta x_0=\delta (1-x_1^*(x_0))$, lo que muestra que aceptar x_0 en $t=0$ es peor que contra ofrecer $x^*_1 (x_0)$ en t_1, lo que proporciona

[8] *Utilidad transferible* es un término usado en teoría de los juegos cooperativos. La utilidad es transferible si un jugador puede transferir sin pérdida parte de su utilidad a otro jugador. Estas transferencias son posibles si los jugadores tienen una moneda común que se valora por igual por todos. Hay que tener en cuenta que la posibilidad de transferir los pagos en efectivo no implica que la utilidad sea transferible: los jugadores ricos y pobres pueden obtener una utilidad diferente de la misma cantidad de dinero. Theodore Bergstrom y Hal R. Varian demuestran que éste es el caso en que la demanda agregada del mercado se comporta como si fuera la demanda de un consumidor único (*When Do Market Games Have Transferable Utility*?, 1985.)

$\delta(1-x_1^*(x_0))$. Pero dado que la contraoferta depende de la oferta inicial, el negociador 1 todavía puede preferir ofrecer tal x_0 si conduce a una mejor contraoferta $x_1(x_0)$. Pero resulta que no es así: $\delta x^*_1 (x_0) < \delta/(1+\delta) < x_0^*$. ¿Podría obtener una ganancia mayor que x^*_0, ofreciendo $x_0<x^*_0$ y recibir una mejor contraoferta $x^*_1 (x_0)$? La respuesta, de nuevo, resulta ser negativa porque $x^*_1(x_0)$ está aumentando en esa región. Por lo tanto, se ofrece $x^*_0 = 1/(1 + \delta)$ en el primer período, y la oferta es aceptada, como en el modelo de horizonte infinito de Rubinstein.

En la negociación de Nash y Rubinstein, las acciones pasadas no tienen ningún impacto sobre el comportamiento futuro. Cuando el negociador 1 hace su oferta, toma las futuras contraofertas y el umbral de aceptación del otro negociador como dados. En cambio, en el modelo secuencial de arbitraje de la oferta final, las acciones pasadas afectan las futuras acciones de equilibrio. La decisión del árbitro depende de las dos ofertas, y la contraoferta depende de la oferta inicial. Ahora, el negociador 1 intenta afectar mediante su oferta a la contraoferta y, posiblemente, a la elección del árbitro. De este modo, termina ofreciendo lo que él habría ofrecido en el modelo de negociación de horizonte infinito de Rubinstein. Dos fuerzas principales lo conducen a hacer tal oferta. En primer lugar, una contraoferta superior óptima $x^*_1(x_0)$ hace que el negociador 2 esté más dispuesto a aceptar x_0. En segundo lugar, la contraoferta óptima, $x^*_1(x_0) = min \{\delta x_0, 1 - x_0\}$, se maximiza en la oferta de equilibrio del modelo de Rubinstein.

10. Aspectos empíricos

Ken Binmore Este economista, matemático y teórico de los juegos, con Nash y Rubinstein fue uno de quienes más han contribuido a este campo. Los principales aportes de Binmore han sido a la teoría de la negociación y su prueba en el laboratorio. Es un pionero de la economía experimental. Comenzó su trabajo experimental en los 1980s cuando muchos economistas pensaban que teoría de los juegos no funcionaría en el laboratorio. Binmore y sus colaboradores establecieron que la teoría de los juegos a menudo puede predecir muy bien el comportamiento de los jugadores experimentados en entornos de laboratorio, incluso en el caso de la conducta humana de negociación, un caso particularmente difícil para teoría de los juegos.

Kenneth George "Ken" Binmore (1940-) Vita
On the Evolution of Fairness Norms *51m*
Rational Decisions in Large Worlds (2006): *Por qué no es preciso ir más allá de Bayes en un mundo incierto*

Modelos No Cooperativos de Negociación Éste constituye el capítulo 7 del *Handbook of Game Theory With Economic Applications: Volume 1* (editado por Robert Aumann y Sergiu Hart, 1992), escrito por Binmore, Martin J. Osborne y Ariel Rubinstein.

Quien rompió con el estancamiento en los análisis del comportamiento de negociación fue John Nash. Hasta entonces, aún en los contextos más simples (por ejemplo, dos individuos se tienen que dividir entre ellos una suma de dinero) los economistas tendían a pensar que sin especificar una vaga idea de *capacidad de negociación* el resultado no podría ser predicho con claridad. Ni siquiera la contribución de von Neumann y Morgenstern logró cambiar este estado de cosas, dado que sugerían que el resultado dependería de propiedades psicológicas no modeladas de los jugadores. Nash, en *The Bargaining Problem* (1950) y en *Two-Person Coo-*

perative Games (1953) introdujo jugadores plenamente racionales cuyas preferencias, una vez establecidas, hacen que toda otra consideración psicológica sea irrelevante.

El objetivo último de lo que se ha llamado el *Programa de Nash* era clasificar los distintos marcos institucionales donde tienen lugar las negociaciones y proveer una solución negociadora apropiada dentro de cada marco. Como prueba de la idoneidad de un concepto de solución particular para un determinado tipo de marco institucional, Nash propuso que se hicieran intentos para reducir las tácticas de negociación disponibles dentro de ese marco a jugadas dentro de un juego de negociación formal. Si las reglas del juego de negociación representan adecuadamente las características más destacadas de las instituciones de negociación pertinentes, entonces una solución de negociación propuesta para su uso en presencia de las instituciones debe aparecer como un resultado de equilibrio del juego de negociación.

Binmore, Osborne y Rubinstein visualizan tres direcciones en las que se obtuvo un progreso considerable desde el tratamiento inicial de Nash: 1) el desarrollo de modelos secuenciales en los que se pueden apreciar procedimientos específicos de negociación; 2) las purificaciones del concepto de equilibrio de Nash; y 3) la inmersión de los modelos de negociación en estructuras de mercado que permiten apreciar el funcionamiento descentralizado de los mercados.

Dócimas Experimentales en Teoría de los Juegos Ken Binmore, Joseph Swierzbinski y Chris Tomlinson son autores de *An Experimental Test of Rubinstein's Bargaining Model* (2007). En el artículo se ofrece un test experimental de una versión del modelo de negociación de Rubinstein con factores de descuento de los jugadores desiguales. Los autores hallan que el aprendizaje, la racionalidad y la justicia son todos significativos en determinar el resultado. Los autores encuentran un apoyo matizado para el modelo de Rubinstein, en donde el comportamiento de los agentes exhibe una fuerte y clara tendencia a explotar la ventaja del primer movimiento de la que goza el jugador que tenga la oportunidad de hacer la siguiente oferta. Sin embargo, los resultados finales se alejan de la predicción de Rubinstein por una tendencia compensatoria que favorece una solución *justa*. Sugiero que lean la parte final escrita por Rubinstein en "defensa" del modelo analizado. Entre otras consideraciones, dice: *Nunca pensé que el modelo de ofertas alternadas (o cualquier otro modelo de la teoría económica para el caso) esté encaminado a tener algún poder predictivo. Yo siempre consideré que los modelos económicos son como fábulas que están vinculadas a la realidad de una manera más sutil, así como un cuento se relaciona con el mundo real. Mi interpretación favorita del modelo de ofertas alternadas se basa en la noción de un acuerdo aceptable, que también se ha utilizado para interpretar la solución de negociación de Nash.*

K. Binmore, A. Shaked y J. Sutton han escrito un documento poniendo a prueba modelos de teoría de los juegos: *Testing Noncooperative Bargaining Theory: A Preliminary Study* (1985). Este artículo pone de relieve el rol que desempeñan las nociones de *equidad* en la solución de un juego de estrategia. La tensión se ilustra claramente en un estudio experimental de W. Guth, R. Schmittberger, y B. Schwarze (*An Experimental Analysis of Ultimatum Bargaining*, 1982). Dos sujetos tienen que dividir una suma de dinero (la "torta"), mediante el siguiente procedimiento primitivo: el Jugador 1 hace una demanda, que el jugador 2 puede entonces aceptar o rechazar. Con esto termina el juego. Si se rechaza la demanda, ambos jugadores no reciben nada. Un análisis estratégico asigna toda (o casi toda) la torta al jugador 1, pero los experimentos muestran que es usual una división más "justa". Este documento parece sugerir que la funcionalidad de teoría de los juegos como un instrumento de predicción no está garantizada, y que cabría introducir consideraciones de "optimización con motivaciones complejas”. Binmore, Shaked y Sutton no comparten esta conclusión: dicen que sus resultados de simulación indican que este comportamiento no es estable en el sentido de que puede ser desplazado fácilmente por el comportamiento simple de optimización, una vez que se realizan pequeños cambios en las condiciones de juego.

11. Dos preguntas como ejercicio

Los siguientes ejemplos están tomados de Ingolf Stahl. Se pide analizar los casos planteados en términos de problemas de negociación.

1. En un pequeño país industrializado hay dos productores de un determinado material de construcción. Están igualmente bien ubicados en relación con el mercado principal, que consiste en un gran número de constructores para los que ellos producen según la demanda. No hay competencia de las importaciones. Los costos variables, principalmente para las materias primas, son prácticamente los mismos. La única diferencia significativa en el costo es que un productor tiene un mayor costo de capital y costos fijos por tanto superiores. Se espera que las plantas presentes, cada una con un considerable exceso de capacidad, duren por otra década. Después de años compitiendo, durante los cuales los precios reales de los dos productores han disminuido de manera constante, los presidentes de las dos empresas se reúnen con el fin de discutir su competencia. Están de acuerdo en cómo el mercado se ha comportado y se comportará. Dado que la colusión no está prohibida por ley, están dispuestos a llegar a un acuerdo sobre la división del mercado. Los interrogantes son si deben dividir el mercado en dos partes de igual tamaño o si una de las partes debe obtener una parte más grande.

2. El mercado de trabajo en un determinado país tiene las siguientes características: Las empresas negocian directamente con los sindicatos locales, donde los líderes mantienen una fuerte posición vis-a-vis los miembros. Las negociaciones salariales se llevan a cabo en la mayoría de las empresas grandes más o menos al mismo tiempo cada primavera. Durante un año determinado las negociaciones son críticas. Debido a la evolución de la inflación los trabajadores quieren grandes aumentos salariales, mientras que las corporaciones están totalmente contrarias a los aumentos de los costos. Las huelgas son inminentes en una serie de grandes corporaciones. Con el fin de reducir el antagonismo el gobierno planea enviar mediadores a las grandes corporaciones. Son para iniciar las discusiones "exploratorias" entre las partes acerca de la situación económica durante el próximo período de acuerdo, sobre todo en referencia al ciclo económico, el desarrollo de mercados particulares y la situación general de costos. En este momento el gobierno también está en el proceso de elegir entre aumentar el impuesto de sociedades o la recaudación de un impuesto proporcional sobre los salarios. La decisión sobre cuál de ellas es la medida más adecuada está muy influenciada por la forma en que estos impuestos afectarán las negociaciones salariales.