

## Los resultados de Sonnenschein, Mantel y Debreu en Teoría del Equilibrio General<sup>1</sup>

### Impacto de los resultados SMD

Las propiedades de exceso de demanda agregada o demanda del mercado juegan un rol clave en existencia, unicidad, estabilidad y estática comparativa del equilibrio general competitivo. También son importantes en teoría del equilibrio general de la competencia imperfecta y los fundamentos microeconómicos de la macroeconomía. Como es probable que las observaciones de demanda estén a nivel agregado, en tanto que la teoría económica ha estado mayormente interesada en el comportamiento individual, las propiedades de exceso de demanda agregada o demanda de mercado son fundamentales para la identificación econométrica. La importancia de estos proyectos para el desarrollo de la teoría del equilibrio general puede ser apreciada en Kenneth Arrow and Frank Hahn, *General Competitive Analysis* (1971).

Poco después de que el libro fuera publicado, sin embargo, Hugo Sonnenschein (1973) planteó el siguiente problema. Sea una función que mapea precios en cantidades. ¿Qué condiciones debe satisfacer esta función si se desea que sea la función de exceso de demanda agregada de una economía de intercambio de buen comportamiento? La teoría de existencia destacaba la importancia de que la función satisfaga la continuidad, la homogeneidad de grado cero y la ley de Walras. ¿Eran éstas todas las restricciones sobre el exceso de demanda agregada involucradas en los supuestos habituales sobre preferencias y dotaciones? Sonnenschein conjeturó que esto era así cuando preguntó: "¿Caracterizan la identidad de Walras y la continuidad a la clase de las funciones de exceso de



Rolf Mantel (1934-1999)  
Fernando Tohmé, [Rolf Mantel and the Computability of General Equilibria: On the Origins of the Sonnenschein-Mantel-Debreu Theorem](#) (2006)

demanda de la comunidad?" Mostró que la respuesta es "sí" para el caso de dos bienes. Rolf Mantel (1974) y Gerard Debreu (1974) probaron versiones generales de estos resultados sobre exceso de demanda agregada. El trabajo de Debreu utilizó supuestos menos restrictivos que Mantel y demostró el teorema siguiente: **dada una función continua, homogénea de grado cero, y que cumpla la ley de Walras, existe una economía con al menos tantos agentes como bienes tal que, para precios positivos, la función corresponde a la demanda agregada de esa economía. Éste es el teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu ó SMD.**

<sup>1</sup> Versión en español de S. Abu Turab Rizvi, [The Sonnenschein-Mantel-Debreu Results after Thirty Years](#), *History of Political Economy* 38 (annual suppl.) DOI 10.1215/00182702-2005-024 Copyright 2006 by Duke University Press. El autor agradece a los participantes en la conferencia HOPE 2005 y en el encuentro anual de la History of Economics Society 2005 por sus útiles comentarios, y a Patrick Murphy por su excelente asistencia de investigación.

A ello le siguieron elaboraciones y aclaraciones. Mantel (1976) demostró que el teorema es válido incluso si los agentes tienen preferencias homotéticas (y dotaciones arbitrarias); por tanto, un supuesto que de común se hacía para obtener manejabilidad (ver Chipman 1974) no ayudó en este contexto. Incluso la intuición de que dotaciones colineales ayudaría resultó ser falsa. Alan Kirman y K. J. Koch (1986) mostraron que el supuesto de que la distribución del ingreso se fija de esta manera no restringe el exceso de demanda. Para cualquier función suave homogénea de grado cero, que satisfaga la ley de Walras, definida en el ortante estrictamente positivo, hay una economía de agentes con preferencias suaves, monótonas, y estrictamente convexas cuyas dotaciones están alineadas de tal manera que la demanda agregada de la economía coincide con la función en el ortante estrictamente positivo. Los resultados SMD también parecían dar a entender que el conjunto de precios de equilibrio no tenía restricciones. De hecho, Andreu Mas-Colell (1977) mostró que, dado cualquier conjunto compacto no vacío de precios (estrictamente positivos), siempre es posible construir una economía de consumidores con preferencias continuas, monótonas y estrictamente convexas de manera que los precios de equilibrio de la economía coincidan con el conjunto dado. Así observaciones sobre los precios de mercado por sí solas no limitan de ninguna manera significativa el tipo de economía que podría haberlas generado. Erwin Diewert (1977), en un entorno diferenciable, halló algunas restricciones sobre las derivadas del exceso de demanda agregada, pero John Geanakoplos y Herakles Polemarchakis (1980) mostraron que éstas son las únicas restricciones. Durante algún tiempo el problema de las funciones de demanda de mercado (donde los individuos tienen ingresos dados en lugar de dotaciones determinadas) permaneció sin resolverse por completo. Sin embargo, Diewert (1977) y Mantel (1977) avanzaron en este problema, y Jordi Andreu (1982) mostró que resultados tipo SMD se aplican a subconjuntos finitos de precios de demanda del mercado. Pierre-André Chiappori e Ivar Ekeland (1999), utilizando supuestos de suavidad, mostraron que los resultados SMD se extienden a la totalidad de la función de demanda del mercado. El *corpus* de la teoría de SMD, por lo tanto, es bastante completo. Junto con el teorema de existencia de Arrow-Debreu y algunos resultados en economías regulares, la teoría SMD llena muchas de las lagunas que podríamos tener en nuestra comprensión de la teoría del equilibrio general (Chiappori et al., 2004).<sup>2</sup>

También es un resultado profundamente negativo. La teoría SMD significa que los supuestos que garantizan un buen comportamiento a nivel microeconómico no se transfieren al nivel agregado o a las características cualitativas del equilibrio. Ha sido difícil lograr avances en las elaboraciones de teoría del equilibrio general, expuestas en Arrow y Hahn 1971. Hay problemas para establecer resultados generales sobre unicidad (Ingrao e Israel 1990, cap 11; Kehoe 1985, 1991; Mas-Colell 1991), estabilidad (Sonnenschein 1973; Ingrao e Israel 1990, cap 12; Rizvi 1990, 94-144), estática comparada (Kehoe 1985; Nachbar 2002, 2004), identificación econométrica (1984a Stoker,



Hugo Freund Sonnenschein (1940-)  
*Incentives and Efficiency*, 57m.

<sup>2</sup> Wayne Shafer y Hugo Sonnenschein (1982) proporcionan una reseña de la teoría SMD. Andreu Mas-Colell, Michael Whinston, y Jerry Green (1995, 598-606) dan un tratamiento más reciente.

1984b), microfundamentos de la macroeconomía (Kirman 1992; Rizvi 1994b), y fundamentos del equilibrio general de competencia imperfecta (Roberts y Sonnenschein 1977; Grodal 1996). Subcampos de la economía que se basaban en el buen comportamiento del exceso de demanda agregada en gran parte de su desarrollo teórico, tales como la economía internacional, también quedaron en situación incómoda (Kemp y Shimomura 2002).

En parte debido a la convicción de que no se podía avanzar en la teoría del equilibrio general, hubo un cambio sustancial en el rumbo de la teoría económica. A medida que los resultados en la teoría de SMD llegaron a ser bien conocidos, por ejemplo a través de la encuesta de Wayne Shafer y Hugo Sonnenschein (1982), los economistas comenzaron a cuestionar el carácter central de la teoría del equilibrio general y plantear alternativas a la misma. Así, en los diez años siguientes a la encuesta de Shafer-Sonnenschein, encontramos nuevos rumbos en teoría económica. Fue en esta época que los métodos de elección racional de teoría de los juegos llegaron a ser adoptados por toda la profesión, lo que repre-



*Gerard Debreu (1921-2004) Nobel 1983  
4 lectures on Economic Theory (1987)*

sentó un cambio profundo en el modo de hacer teoría económica. Aun así, después de una creciente toma de conciencia de las dificultades formales con teoría de los juegos de la elección racional, así como de evidencia experimental que no concordaba con algunos de sus resultados previstos, un grupo de profesionales se volvió a la teoría de los juegos evolutivos. De hecho, el aumento de la economía experimental en sí representa un avance importante en el crecimiento de los enfoques alternativos a raíz de las dificultades de la teoría del equilibrio general. Junto a estos desarrollos, otros enfoques que hacían hincapié en un comportamiento menos que totalmente racional, como la economía del comportamiento, también ganaron prominencia (Sent 2004). Ahora era posible ver, con más frecuencia, modelos cuyos agentes eran programados para actuar de cierta manera o que tuvieran "inteligencia cero" (Gode y Sunder 1993). Otros colocaron el origen del problema en uno de los modos característicos de proceder en buena parte de la teoría económica, a saber, la "idea de que debemos comenzar a nivel del individuo aislado." En cambio, el objetivo debe ser "teorizar en términos de grupos que tienen un comportamiento colectivamente coherente" (Kirman 1989, 138), de modo que la interacción entre los individuos que llevan a regularidades a nivel agregado no opere únicamente a través de los mercados. Esto sugiere un análisis de sistemas complejos (Kirman 2004; véase también Saari 1995). O los teóricos pueden hacer supuestos sobre la distribución de las características de los agentes, en cuyo caso "los supuestos acerca de la organización de la sociedad" (Kirman 1989, 138) podrían explicar otras regularidades a nivel macro. Éste es el enfoque adoptado en lo que podría llamarse el enfoque europeo de la demanda de mercado asociado con Werner Hildenbrand, Jean-Michel Grandmont, y otros. Un problema típico que estos autores persiguen es si una distribución declinante de los ingresos (los individuos más ricos son menos numerosos), u otras dispersiones de las características de los agentes, tales como las preferencias, conducen a una justificación de la ley de la demanda en el agregado (Hildenbrand 1994; Grandmont 1992; Quah 2000). Vemos, entonces, que las dificultades que llevaron a la comprensión de que había problemas dominantes en el proyecto de equilibrio general también dieron lugar a una reorientación de la teoría económica. Lo

que surge es cada vez menos reconocible como la tradición de la microeconomía que dominó durante la posguerra (Rizvi, 2003). Incluso podríamos decir que esto ha llevado al pluralismo en economía después de un largo período en el que sólo se observaban como enfoques válidos los que buscaban basarse en la teoría del equilibrio general.<sup>3</sup>

Dada lo dramático que parecen los cambios producidos por la teoría SMD, es comprensible que se hayan hecho algunas declaraciones muy generales sobre el carácter de la teoría del equilibrio general. Quince años después de *General Competitive Analysis*, Arrow (1986) afirmó que la hipótesis de racionalidad tendría pocas consecuencias a nivel agregado. Kirman (1989) sostuvo que la teoría del equilibrio general no podría dar lugar a enunciados falsables, dado que casi cualquier conjunto de datos parecería consistente con la teoría. Estos puntos de vista son ampliamente compartidos. Bliss (1993, 227) escribió que "la vacuidad acerca de la teoría del equilibrio general es un teorema de la teoría". Andrew Mas-Colell, Michael Whinston, y Jerry Green (1995) intitulan una sección de su libro de texto para graduados de microeconomía "Todo vale: El teorema Sonnenschein-Mantel-Debreu." Se interpretó la existencia de una brecha similar en los fundamentos de la economía empírica. La teoría del equilibrio general "plantea algunos retos difíciles" como "paradigma para organizar y sintetizar los datos económicos" ya que "una contraparte empírica generalmente aceptada de la teoría del equilibrio general aún no se ha desarrollado" (Hansen y Heckman 1996).<sup>4</sup> Este parece ser el punto de vista aceptado 30 años después de la aparición de la teoría de SMD.

Como quiera que sea, hay un reciente desafío a esta sabiduría ahora convencional. La obra clave que ha llevado a una reconsideración de la importancia de la teoría SMD es el documento de Donald Brown y Rosa Matzkin (1996) sobre las restricciones comprobables en la variedad de equilibrio. Ellos y sus seguidores afirman que la teoría del equilibrio general sí tiene estatus científico y que se pueden hacer progresos en algunos de los temas en los que el enfoque de la demanda agregada demostró ser ineficaz. Chiappori et al. (2004, 106) sostienen que la opinión de Arrow "es demasiado pesimista, y que la teoría del equilibrio general en realidad puede generar fuertes predicciones comprobables". En el resto de este artículo, expongo los resultados de Brown-Matzkin y algunas variantes. Luego considero cómo debemos ver su trabajo en la evaluación del impacto de la teoría SMD después de treinta años.

### **Restricciones comprobables en la Variedad de Equilibrio**

El trabajo de Brown y Matzkin fue motivado por la preocupación de que la teoría del equilibrio general carezca de consecuencias falsables o, como dijo Paul Samuelson, de "teoremas significativos" (citado en Brown y Matzkin 1996, 1249).<sup>5</sup> Para Samuelson (1947) tales teore-

<sup>3</sup> He examinado los avances mencionados en este párrafo y los dos anteriores en una serie de escritos (Rizvi 1994a, 1997, 1999, 2003, 2005a, 2005b). Otros autores que se ocupan de la historia y el desarrollo de la economía reciente han comentado con agudeza sobre estas transformaciones de la teoría. Una lista parcial incluiría a Mirowski 1993, 312-13, 333-35; Mirowski y Hands 1998; Sent 2005; Giocoli 2003, 204, 377, 408; y Davis 2003, 37-38.

<sup>4</sup> Estas conclusiones también provocaron reacciones negativas de los que habían contado con la teoría del equilibrio general para proporcionar una estructura progresiva para la teoría y la política. Werner Hildenbrand (1994, prefacio) dice que la teoría SMD lo dejó "profundamente consternado." Herakles Polemarchakis (2004, 140) informa, "Corre el rumor de que James Tobin, quien sostuvo firmemente que la economía puede y debe aliviar la necesidad y mejorar el bienestar general, consideró que el resultado de Sonnenschein-Mantel-Debreu es uno que no debería haber sido demostrado".

<sup>5</sup> Un título anterior de su documento era "estática comparativa walrasiana." Por tanto, su preocupación se extiende a las características cualitativas de equilibrio general. Este aspecto de su trabajo se considera a continuación.

mas son hipótesis "sobre datos empíricos que posiblemente podrían ser refutadas."<sup>6</sup> Al considerar su proyecto, cabe recordar el cargo de Kirman (1989, 126, 127) de que la teoría del equilibrio general es "vacía en el sentido de que no se puede esperar que albergue elementos de una teoría científica, capaz de producir proposiciones empíricamente falsables" o, de manera similar, que "parece que se llegó al punto en que se muestra al modelo como intrínsecamente incapaz de generar proposiciones verificables". O se puede recordar el enunciado de Bliss de que la "vacuidad de la teoría del equilibrio general es un teorema de la teoría."

**Es importante entender lo que autores como Kirman y Bliss no quieren decir.** Hay aspectos de la teoría del equilibrio general que tienen proposiciones verificables, pero éstas son a nivel de individuos (y por lo tanto se refieren a una situación previa a la discusión de un equilibrio general). Así están las restricciones de Slutsky, o el axioma débil de la preferencia revelada (WARP), a nivel individual. Sin embargo, éstos no se trasladan al ámbito global. Por lo tanto Kirman y otros no podrían haber querido decir proposiciones a nivel individual. Del mismo modo, Arrow habló de implicaciones de la racionalidad en el agregado. Una declaración de Arrow fue objeto de escrutinio por el trabajo de Brown-Matzkin. Arrow (1986, S388) declaró: "En conjunto, la hipótesis de comportamiento racional no tiene consecuencias en general", concluyendo que "si los agentes son diferentes en formas no especificables, luego. . . muy pocas inferencias, si las hay, se podrán hacer" (S389). Esto será importante más adelante. Finalmente, un último punto preliminar. Los resultados SMD son teoremas y por lo tanto no pueden ser incorrectos. Esto significa que los resultados que parecen no estar de acuerdo con ellos deben estar basados en diferentes construcciones o premisas. Lo que está en juego es qué implica este marco alterado. Es importante, entonces, evaluar cómo la teoría de SMD y los resultados Brown-Matzkin pueden coexistir.

Entonces, ¿qué sostienen Brown y Matzkin?<sup>7</sup> Brown y Matzkin, en lugar de considerar el exceso de demanda agregada, tienen en cuenta la variedad de equilibrio (Balasko 1975): **dadas las preferencias, la variedad de equilibrio es el conjunto de dotaciones y precios para los que el exceso de demanda del mercado es cero.** Como Andrés Carvajal, Indrajit Ray, y Susan Snyder (2004, 3) señalan, la variedad de equilibrio puede ser una forma natural de pensar en restricciones comprobables derivadas de la teoría del equilibrio general, ya que las variables exógenas, tales como las dotaciones, se pueden variar para ver sus efectos sobre las variables endógenas, los precios.

Será más fácil de ver el argumento de Brown y Matzkin como una serie de pasos.

En primer lugar, comienzan con los resultados de la teoría de la preferencia revelada. Sidney Afriat se preguntó cuándo un número finito de observaciones sobre los precios y cantidades podría ser consistente con la maximización de la utilidad. Desarrolló una condición llamada **coherencia cíclica**, así como un conjunto de desigualdades que ahora se llaman las **desigualdades de Afriat** para responder a esta pregunta. Las desigualdades Afriat contienen niveles

<sup>6</sup> Paso por alto la cuestión de si la refutabilidad o falsificación tiene sentido como una prueba de la validez de la teoría del equilibrio general. Polemarchakis (2004) sostiene que sí lo es. John Chipman y Jean-Sébastien Lenfant discuten los intentos anteriores para poner a prueba la teoría de la demanda y el problema de la agregación (2002, 568 n. 30, y la discusión que acompaña). Sobre estos temas en general, véase Hands 1993.

<sup>7</sup> Hay extensiones del documento de Brown y Matzkin, aunque no todas rinden resultados positivos. Felix Kubler (2003) busca restricciones comprobables en un marco de utilidad esperada, Susan Snyder (1999) considera bienes públicos, y Andrés Carvajal (2003), externalidades. Carvajal, Indrajit Ray, y Snyder (2004) y Pierre-André Chiappori, Ivar Ekeland, Kubler, y Polemarchakis (2004) resumen y desarrollan esta literatura.

de utilidad no observables ( $U^i$ ), la utilidad marginal de la renta ( $\mu_i$ ), y canastas de consumo.<sup>8</sup> Usando el teorema de la alternativa o [Lema de Farkas](#), Afriat mostró desigualdades equivalentes a una condición de consistencia cíclica que contiene sólo precios y cantidades observables. Esto puede formularse de manera más formal. **Dadas  $N$  observaciones sobre precios y cantidades  $(p^i, x^i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , una función de utilidad  $U(x)$  racionaliza los datos si para todo  $x$ ,  $p^i \cdot x^i \geq p^i \cdot x$  implica  $U(x^i) \geq U(x)$ .** A continuación, el siguiente teorema de Afriat, como está enunciado por Hal Varian (1982, 946), muestra que un número de enunciados son equivalentes.

**TEOREMA (Afriat, 1967):**

Dado un conjunto de datos,  $(p^i, x^i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  las siguientes condiciones son equivalentes:

- ✓ Existe una función de utilidad no saciada que racionaliza los datos.
- ✓ Los datos satisfacen la consistencia cíclica, es decir, para todos  $\{r, s, t, \dots, q\}$  si  $p^r \cdot x^r \geq p^r \cdot x^s$ ,  $p^s \cdot x^s \geq p^s \cdot x^t$ ,  $\dots$ , y  $p^q \cdot x^q \geq p^q \cdot x^r$ , luego  $p^r \cdot x^r = p^r \cdot x^s$ ,  $p^s \cdot x^s = p^s \cdot x^t$ ,  $\dots$ , y  $p^q \cdot x^q = p^q \cdot x^r$ .
- ✓ Hay números  $U^i > 0$ ,  $\mu^i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , que satisfacen las desigualdades de Afriat:  $U^i \leq U^j + \mu^j p^j \cdot (x^i - x^j)$  para  $i, j = 1, \dots, N$ .
- ✓ Existe una función de utilidad cóncava, continua, no saciada, que racionaliza los datos.

El teorema de Afriat relaciona la maximización de la utilidad y la teoría de la preferencia revelada.<sup>9</sup>

En segundo lugar, teniendo en cuenta el teorema de Afriat, ¿qué condiciones se deben mantener en equilibrio? Supongamos que hay  $T$  agentes con preferencias con buen comportamiento especificadas en el teorema de Afriat. Supongamos también que tenemos  $N$  perfiles de niveles de utilidad de los agentes ( $U^i$ ), utilidad marginal de la renta ( $\mu^i$ ), y cestas de consumo ( $x^i$ ) (que pueden ser considerados como los datos no observados que corresponden a las observaciones sobre precios y dotaciones). Brown y Matzkin (1996, 1253) señalan que, debido a sus supuestos, en equilibrio se tendrán las siguientes condiciones (eliminando los subíndices específicos del agente):

- ✓ Desigualdades de Afriat:  $U^i \leq U^j + \mu^j p^j \cdot (x^i - x^j)$  para  $i, j = 1, \dots, N$ .
- ✓  $\mu^i > 0$ ,  $x^i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  (utilidad marginal del ingreso positiva, consumo no negativo).
- ✓ Restricción presupuestaria:  $p^i \cdot x^i = p^i \cdot w^i$  para  $i = 1, \dots, N$ .
- ✓  $\sum x^i = \sum w^i$ , suma para los  $T$  agentes ( $i=1, \dots, N$ ).

<sup>8</sup> Brown y Matzkin se dan cuenta de que los paquetes de dotación son difíciles de observar, de manera que desarrollan la teoría también en términos de ingreso en lugar de dotaciones, como se explica a continuación.

<sup>9</sup> Hal Varian (1982) mostró que la consistencia cíclica es equivalente a tener datos que satisfacen el axioma generalizado de la preferencia revelada (GARP), lo que se añade a esta lista de condiciones equivalentes en el teorema.

Se llama a éstas **desigualdades de equilibrio**. Las variables observables son las dotaciones y los precios. Estas restricciones forman conjuntamente una familia de desigualdades polinomiales en las variables no observadas (utilidades, utilidades marginales, y cestas de consumo).

En tercer lugar, Brown y Matzkin invocan un resultado de la teoría de los modelos llamado el **teorema de Tarski-Seidenberg** que demuestra que cualquier sistema finito de desigualdades polinomiales se puede reducir a una familia finita equivalente de desigualdades polinomiales en los coeficientes del sistema, con un algoritmo que implica un número finito de pasos (Van Den Dries 1988). La equivalencia significa que el sistema original de desigualdades tiene una solución si y sólo si los valores de los coeficientes satisfacen el sistema derivado de desigualdades. (De hecho, la equivalencia de las desigualdades Afriat y la consistencia cíclica [que contiene sólo los coeficientes del sistema, a saber, los precios y las dotaciones observables] es un ejemplo del teorema de Tarski-Seidenberg.)

En el caso de las desigualdades de equilibrio, los coeficientes del sistema son los precios observables y dotaciones, y la familia de desigualdades se compone de las desigualdades Afriat, las restricciones de presupuesto, y las condiciones de equilibrio del mercado.

En cuarto lugar, ahora hay **tres posibilidades**.

1. El algoritmo de Tarski-Seidenberg no termina debido a que las desigualdades de equilibrio no tienen solución. **En este caso no existe equilibrio**.

2. El algoritmo termina, pero las desigualdades se satisfacen para cada observación de precios y dotaciones. En este caso, **el modelo de equilibrio no puede ser refutado por los datos**, ya que todos los datos están en consonancia con él.

3. El algoritmo termina, y las desigualdades polinomiales definen un subconjunto estricto del espacio precio-dotación (la variedad de equilibrio). En este caso, **el modelo de equilibrio es refutable**, dado que las observaciones de precios-dotación pueden ser incompatibles con el equilibrio.

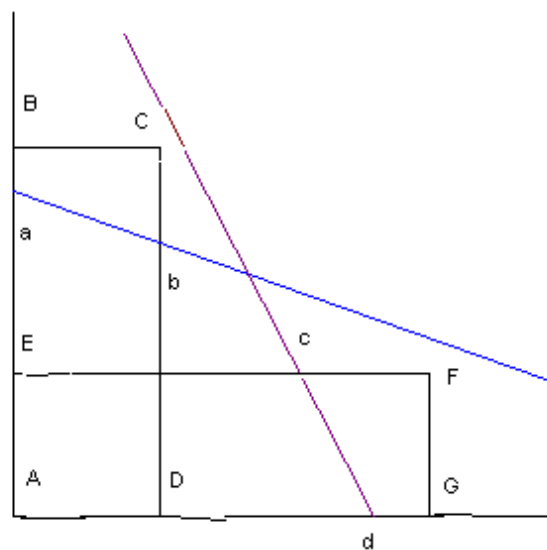


Figura 1 Violación de la consistencia cíclica

En quinto lugar, Brown y Matzkin ahora concluyen su argumento. El punto 1 no es cierto debido al **teorema de existencia de Arrow-Debreu**. Esto deja a los puntos 2 y 3. Se descarta el punto 2 por medio de un **contraejemplo**. Muestran un ejemplo de dos observaciones de precios y dotaciones que viola la consistencia cíclica. La figura 1 muestra dos observaciones diferentes de las dotaciones y los precios. Los rectángulos son cajas de Edgeworth con lados iguales a la suma de las dotaciones de dos productos para los dos agentes. El origen del agente 1 se encuentra en A para la primera observación de la dotación (ABCD), y los precios se

muestran por la línea  $a$  a través de  $a$  y  $b$ . El segmento de línea  $ab$  muestra las asignaciones que son potencialmente asignaciones de equilibrio. El origen del agente 2 está en  $C$  para la primera observación, y en  $F$  para la segunda (AEFG); el origen del agente 1 se mantiene en  $A$ ; y la línea que pasa por  $c$  y  $d$  muestra los precios para la segunda observación. La coherencia cíclica está violada por estos dos conjuntos de datos, ya que cada asignación en la segunda caja de Edgeworth se encuentra disponible al primer conjunto de precios, y cada asignación en la primera caja está disponible al segundo conjunto de precios. La coherencia cíclica es equivalente a las desigualdades Afriat (por el teorema de Afriat), que es necesario para el equilibrio. Esto significa que el punto 2 no puede ser verdad. Por lo tanto se aplica el punto 3, y el modelo es refutable.<sup>10</sup>

## Implementación

Brown y Matzkin avanzan en la posibilidad de que su trabajo se pueda implementar de forma empírica. Como he mostrado, las restricciones halladas son en forma de un sistema de desigualdades polinomiales no lineales en los precios y dotaciones. Puesto que los vectores de dotación pueden ser difíciles de observar, Brown y Matzkin re expresan sus resultados en términos de ingresos en lugar de dotaciones. Esto mejora la posibilidad de que su trabajo pueda servir para docimar la teoría del equilibrio general, ya que las variables observables son ahora los precios de todos los bienes y los ingresos de todos los consumidores. Además, se refieren a su trabajo sobre preferencias aleatorias, trabajo que plantea la posibilidad de que las restricciones puedan ser identificadas bajo la forma de ecuaciones simultáneas y luego docimadas. Resultados análogos a los de ellos han sido desarrollados en preferencias aleatorias (Carvajal 2003, citado en Carvajal, Ray, y Snyder 2004). Además, Brown y Matzkin derivan restricciones exactas para una serie de casos especiales: dos agentes y dos observaciones, preferencias homotéticas, y una economía de producción Robinson Crusoe. No obstante, subsisten problemas de aplicación. En primer lugar, con respecto a sus casos especiales, se dice que en las "economías estilizadas en nuestros ejemplos hay que pensar en cada «comerciante», como un tipo de agente, que consta de numerosos consumidores pequeños que tienen cada uno idénticos gustos e ingresos" (Brown y Matzkin 1996 1257). Esta interpretación plantea las mismas cuestiones de aplicación que llevaron a los investigadores a buscar el exceso de demanda agregada o la demanda del mercado, en primer lugar, a fin de no tener que suponer que los individuos simplemente representan agregados por decisión teórica (Kirman 1989, 1992; Rizvi 1990, 143 n. 14). En segundo lugar, a fin de aplicar el método a grandes conjuntos de datos, los investigadores necesitarían una forma eficiente de resolver grandes sistemas de desigualdades polinomiales no lineales. Brown y Matzkin (1996, 1258) sugieren el uso de formas funcionales particulares de utilidad para reducir la complejidad del problema. En tercer lugar, el método que proponen requiere estimar el impacto de los cambios de dotaciones individuales o ingresos en los precios agregados. Cuanto

<sup>10</sup> Chiappori et al. informan de un resultado complementario basado en la variedad de equilibrio. En un marco diferenciable, demuestran que, si los efectos ingreso siguen siendo positivos, observando la variedad de equilibrio "genéricamente se identifica la economía subyacente, en el sentido de que las preferencias individuales se pueden recuperar sin ambigüedad" (Chiappori et al. 2004, 107). Esto, dicen, proporciona una conclusión opuesta a la teoría de SMD, ya que la estructura microeconómica de las preferencias es recuperable en lugar de perderse por las observaciones de la variedad de equilibrio. Sin embargo, en los resultados de SMD, es la estructura de agregados la que no está disponible. Además, el enfoque de Chiappori et al. requiere considerable información (en particular, los datos microeconómicos sobre las dotaciones o ingresos, aspecto que se analiza más adelante), y su trabajo se diferencia de Brown y Matzkin, que requieren sólo un conjunto finito de datos; esto, como dice Carvajal (2002, 4), es "más conveniente desde el punto de vista empírico."



mayor sea la economía, tanto más probable será que tales efectos sean pequeños y más difícil será producir un trabajo empírico basado en la variación observada (Chiappori et al., 2004, 117-18). Chiappori et al. se hacen eco de la idea de Brown y Matzkin de interpretar a los agentes como tipos, y también sostienen que "el equilibrio general se aplica no sólo a las *grandes economías*" y sugieren aplicaciones en grupos pequeños, tales como "comités, clubes, pueblos y otras organizaciones locales" (118), citando a Townsend 1994 como ejemplo. Es difícil ponerse de acuerdo de todo corazón. Las grandes economías son precisamente aquellas en las que el supuesto tomador de precios de la teoría del equilibrio competitivo tiene más sentido y donde los efectos *convexificadores* tornan irrelevantes las no convexidades y discontinuidades a nivel de agente para la existencia de equilibrio.

## Interpretación

Sea que los resultados de Brown-Matzkin se puedan implementar con éxito o no, **los investigadores han establecido que, dados ciertos tipos de datos, la teoría del equilibrio general puede ser falsada.** *Esto está en abierto contraste con la interpretación usual de los resultados SMD, según la cual pareciera que las manifestaciones agregadas de la teoría del equilibrio general son vacuas.* Las implicaciones contrastantes para la interpretación de la teoría del equilibrio general requieren alguna discusión. Está claro que los dos conjuntos de resultados se refieren a diferentes construcciones. Los resultados SMD se refieren a la demanda agregada (excedente o de mercado) y la teoría de Brown-Matzkin a la variedad de equilibrio. Así, podemos ver por qué estos resultados coexisten. Esto deja abiertas cuestiones de interpretación.

El primer punto a considerar es que las dos teorías no se refieren al mismo tipo de datos. En el caso de la teoría de SMD, todos los datos son a nivel agregado. La teoría se refiere al exceso de demanda agregada y los precios. Esta es la razón por la cual Arrow (1986, S388) afirmó: "En el agregado, la hipótesis de comportamiento racional, en general, carece de consecuencias." Su declaración sigue siendo correcta. Para proceder, la hipótesis de Brown-Matzkin requiere al menos dos observaciones de datos a nivel individual (vectores de dotación o ingresos), al igual que cualquier otro método que funciona con la variedad de equilibrio.<sup>11</sup> Esto da cuenta de una diferencia entre los dos enfoques. Surge entonces la pregunta de si son necesarios para la refutabilidad de la teoría del equilibrio general datos a nivel individual. La respuesta parece ser "sí".

Chiappori y Ekeland (1999) demuestran este punto de la siguiente manera (ver también Chiappori et al., 2004, 115-17). Supongamos que solamente se observa una dotación global, y

<sup>11</sup> Mas-Colell, Whinston, y Green, en su discusión de los resultados SMD, señalan que la teoría no restringe las dotaciones. Por el contrario, Brown y Matzkin (1996, 1252) suponen que el consumo está en el ortante no negativo y las dotaciones son estrictamente positivas. El procedimiento SMD de construir una economía de buen comportamiento que puede generar un determinado exceso de demanda agregada no siempre es posible, si se restringen las dotaciones (Mas-Colell, Whinston y Green de 1995, 604, fig. 17.E.3). Mas-Colell, Whinston y Green diferencian el enfoque SMD del de Brown y Matzkin, en referencia a una versión anterior del documento que he discutido. En un enfoque general de estática comparativa, "ningún efecto de primer orden es posible. . . [Todavía] también se trata de que si hay restricciones previas sobre las dotaciones iniciales y el consumo debe ser no negativo, entonces hay de nuevo restricciones de estática comparativa de carácter global" (Mas-Colell, Whinston y Green 1995, 617; véase Brown y Matzkin 1993 para una reciente investigación de este punto). Aquí es importante tener en cuenta la observación de Nachbar (2000, 2074) de que las restricciones de Brown-Matzkin, en el contexto del análisis de estática comparativa, "no dan lugar a una interpretación sencilla".

se supone que hay alguna regla que asigna la dotación agregada en dotaciones individuales, pero que no son observadas.<sup>12</sup> Sin embargo, los precios que resultan también se observan. Como los cambios en las reglas de distribución de dotación, hay fluctuaciones en los precios. Entonces, la variedad de equilibrio es función de la dotación agregada y de una regla de distribución. ¿Hay alguna restricción a la forma de esta relación? Chiappori y Ekeland muestran que cuando el número de agentes es al menos tan grande como el número de productos (un supuesto estándar de la teoría SMD), cualquier variedad suficientemente suave puede ser resultado de la maximización de la utilidad para una regla de distribución que satisfaga ciertas condiciones.<sup>13</sup> Por lo tanto son necesarios datos a nivel individual para las restricciones comprobables a seguir a partir del enfoque de la variedad de equilibrio (Chiappori et al., 2004, 115-17). *Así vemos que la cuestión de refutabilidad depende de qué tipos de datos sean observados. Si nos ceñimos a datos no individuales o agregados (precios, dotaciones, consumo), entonces la teoría del equilibrio general no puede ser refutada. Pero si tenemos suficientes datos a nivel individual, puede serlo, al menos en principio.* No hay incompatibilidad entre la teoría SMD y los resultados Brown-Matzkin en este aspecto. Como Brown y Matzkin (2000, 1529) afirman, "ningún enunciado relativo a consecuencias refutables es significativo, sin especificar qué información es observable y cuál no."

¿Son los resultados de Brown-Matzkin entonces triviales? ¿Implican poner los datos a nivel individual en un sombrero sólo para extraer refutabilidad más adelante? No lo creo. Los datos a nivel individual sobre los ingresos o las dotaciones por sí solos no están, evidentemente, conectados a los precios. Tampoco las decisiones individuales tienen que ser observadas en el enfoque de Brown-Matzkin; sólo tienen que serlo las restricciones individuales. Así, la teoría de Brown-Matzkin sí representa una grieta en el edificio de la interpretación basada en la teoría de SMD.

Sin embargo, es importante no extraer conclusiones demasiado precipitadas. Incluso si aceptamos que los problemas de aplicación no constituyen un impedimento, y permitimos datos a nivel individual, la refutabilidad es sólo un aspecto de una teoría deseable (ver la reserva expresada en la nota 6). Los resultados SMD han planteado muchos desafíos. ¿Cuál es, por ejemplo, el impacto de los resultados de Brown-Matzkin en términos de unicidad, estabilidad y estática comparativa?

### Unicidad, estabilidad y estática comparativa

*¿Los nuevos enfoques permiten docimar unicidad, estabilidad o estática comparativa? La respuesta a esta pregunta es "no".* Supongamos que tuviéramos los ingresos y los precios, como en la contribución original de Brown y Matzkin (1996). Entonces, para concluir que los datos, por ejemplo, muestran inestabilidad local, lo que es ciertamente posible en teoría, una economía que racionalizara los datos tendría que ser una en la que fuera posible la inestabilidad local. Lo mismo sería cierto para otras características cualitativas de equilibrio. *Sin embargo, resulta que la racionalización de los datos introduce restricciones significativas en las características cualitativas de equilibrio (unicidad, estabilidad y estática comparativa).* Cuatro años después de la contribución de Brown-Matzkin, Donald Brown y Chris Shannon (2000) demostraron el siguiente resultado de una economía de intercambio. Comenzamos con una serie de observaciones sobre precios, ingresos y consumo agregado. En-

<sup>12</sup> Si observamos sólo agregados, tales como la dotación agregada, no obstante, tiene que haber una manera de asignar la dotación agregada a los agentes. Esto es lo que hace la regla.

<sup>13</sup> Además de la suavidad, estos autores también suponen una condición de [analiticidad](#).

tonces, estos datos pueden ser racionalizados por una economía en la que cada consumidor tiene una función de utilidad suave, estrictamente cuasi-cóncava y monótona si y sólo si pueden ser racionalizados por una economía con consumidores con ese tipo de preferencias (suaves, estrictamente cuasi-cóncavas, monótonas) y donde cada equilibrio es observado a nivel local único y localmente estable bajo tâtonnement, y la correspondencia de equilibrio es localmente monótona. Luego, los datos pueden ser racionalizados en absoluto si y sólo si pueden ser racionalizados para una economía en la que el equilibrio goza de características cualitativas con buen comportamiento. *Así, los datos no podrían rechazar la hipótesis de que la economía tenga características cualitativas problemáticas. Esto significa que "la unicidad local, la estabilidad local y la estática comparativa monótona local no son refutables, dado un conjunto finito de observaciones sobre precios, niveles de ingreso y consumo agregado,"* y esto es válido incluso si se observan las demandas individuales (Brown y Shannon 2000, 1539).

## Conclusión

Ahora estamos en una posición de resumir el efecto del trabajo de Brown y Matzkin sobre las conclusiones extraídas de los resultados de SMD. Brown y Matzkin muestran que es posible, en principio, que la teoría del equilibrio general dé lugar a restricciones refutables. Éstas adoptan la forma de desigualdades polinomiales en la variedad de equilibrio donde los observables son los vectores de las dotaciones (o ingresos) y los precios. Puede ser difícil realizar pruebas a lo largo de estas líneas a medida que aumentan las dimensiones del problema. Esto es tanto más probable que suceda en un entorno en el que el número de agentes es lo suficientemente grande como para justificar el comportamiento tomador de precios en el que se basa el modelo. Sin embargo, Brown y Matzkin proporcionan una restricción que concebiblemente puede ser refutada. *A pesar de este desarrollo, una cuidadosa declaración en función de los resultados de SMD sobre refutabilidad sigue siendo cierta.* Es decir, *si los únicos datos a los que tenemos acceso son a nivel agregado, la teoría del equilibrio general no genera restricciones refutables. Ello se debe a que los resultados de Brown-Matzkin requieren vectores de ingresos o de dotación a nivel individual.* Gran parte de la intuición que parecería deducirse de los resultados SMD está todavía intacta. *La racionalidad, como dijo Arrow, no tiene implicaciones globales, pero ahora, tenemos que añadir, si sólo se dispone de datos agregados.*

Las cosas son aún más claras en términos de características cualitativas de equilibrio como la unicidad local, la estabilidad y la estática comparativa. El enfoque de variedad de equilibrio que emplea un conjunto finito de observaciones no nos permite refutar enunciados sobre estas características de equilibrio. Por lo tanto muchas de las consecuencias problemáticas de la teoría SMD se mantienen arraigadas. No sólo no hay resultados para las configuraciones generales de los datos en estas áreas (Nachbar 2002, 2004), sino además no podemos docimar si las relaciones de una economía registran mal comportamiento. Así que aún no hay ningún progreso en estos aspectos de la teoría. En esta importante área, entonces, la intuición de que la teoría del equilibrio general está desprovista de manera significativa de resultados generales sigue siendo cierta. Resulta que Arrow estaba en lo cierto al concluir que "si los agentes son diferentes en formas no especificables, luego. . . muy pocas inferencias, si las hay, se podrán hacer".

## Referencias

- Afriat, S. 1967. The Construction of a Utility Function from Demand Data. *International Economic Review* 8:67–77.
- Andreu, J. 1982. Rationalization of Market Demand on Finite Domains. *Journal of Economic Theory* 28:201–4.
- Arrow, K. J. 1986. Rationality of Self and Others in an Economic System. *Journal of Business* 59:S385–S399.
- Arrow, K., and F. Hahn. 1971. *General Competitive Analysis*. San Francisco: HoldenDay.
- Balasko, Y. 1975. The Graph of the Walras Correspondence. *Econometrica* 43:907–12.
- Bliss, C. 1993. Oil Trade and General Equilibrium: A Review Article. *Journal of International and Comparative Economics* 2:227–42.
- Brown, D. J., and R. L. Matzkin. 1996. Testable Restrictions on the Equilibrium Manifold. *Econometrica* 64:1249–62.
- Brown, D. J., and C. Shannon. 2000. Uniqueness, Stability, and Comparative Statics in Rationalizable Walrasian Markets. *Econometrica* 68:1529–39.
- Carvajal, A. 2002. Testable Restrictions of General Equilibrium Theory in Exchange Economies with Externalities. Working Paper, Brown University and Banco de la República de Colombia.
- . 2003. Testable Restrictions on the Equilibrium Manifold under Random Utility. Borradores de Economía no. 233, Banco de la República de Colombia.
- Carvajal, A., I. Ray, and S. Snyder. 2004. Equilibrium Behavior in Markets and Games: Testable Restrictions and Identification. *Journal of Mathematical Economics* 40:1–40.
- Chiappori, P. A., and I. Ekeland. 1999. Aggregation and Market Demand: An Exterior Differential Calculus Viewpoint. *Econometrica* 67:1435–57.
- Chiappori, P. A., I. Ekeland, F. Kubler, and H. M. Polemarchakis. 2004. Testable Implications of General Equilibrium Theory: A Differentiable Approach. *Journal of Mathematical Economics* 40:105–19.
- Chipman, J. S. 1974. Homothetic Preferences and Aggregation. *Journal of Economic Theory* 8:26–38.
- Chipman, J. S., and J.-S. Lenfant. 2002. Slutsky's 1915 Article: How It Came to Be Found and Interpreted. *HOPE* 34.3:553–97.
- Davis, J. B. 2003. *The Theory of the Individual in Economics: Identity and Value*. New York: Routledge.
- Debreu, G. 1974. Excess Demand Functions. *Journal of Mathematical Economics* 1:15–23.
- Diewert, W. E. 1977. Generalized Slutsky Conditions for Aggregate Consumer Demand Functions. *Journal of Economic Theory* 7:353–62.
- Geanakoplos, J., and H. Polemarchakis. 1980. On the Disaggregation of Excess Demand Functions. *Econometrica* 48:315–31.
- Giocoli, N. 2003. *Modeling Rational Agents: From Interwar Economics to Early Modern Game Theory*. Northampton, Mass.: Elgar.
- Gode, D. K., and S. Sunder. 1993. Allocative Efficiency of Markets with Zero Intelligence Traders: Market as a Partial Substitute for Individual Rationality. *Journal of Political Economy* 101:119–37.

- Grandmont, J. M. 1992. Transformations of the Commodity Space, Behavioral Heterogeneity, and the Aggregation Problem. *Journal of Economic Theory* 57:1–35.
- Grodal, B. 1996. Profit Maximization and Imperfect Competition. In *Economics in a Changing World*. Vol. 2 of *Microeconomics*, edited by B. Allen. New York: St. Martin's.
- Hands, D. W. 1993. Testing, Rationality, and Progress: Essays on the Popperian Tradition in Economic Methodology. Lanham, Md.: Rowman and Littlefield.
- Hansen, L. P., and J. Heckman. 1996. The Empirical Foundations of Calibration. *Journal of Economic Perspectives* 10:87–104.
- Hildenbrand, W. 1994. *Market Demand*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- Ingrao, B., and G. Israel. 1990. *The Invisible Hand: Economic Equilibrium in the History of Science*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Kehoe, T. 1985. Multiplicity of Equilibria and Comparative Statics. *Quarterly Journal of Economics* 100:119–48.
- . 1991. Computation and Multiplicity of Equilibria. In vol. 4 of *Handbook of Mathematical Economics*, edited by W. Hildenbrand and H. Sonnenschein. Amsterdam: North-Holland.
- Kemp, M. C., and K. Shimomura. 2002. The Sonnenschein-Debreu-Mantel Proposition and the Theory of International Trade. *Review of International Economics* 10:671–79.
- Kirman, A. 1989. The Intrinsic Limits of Modern Economic Theory: The Emperor Has No Clothes. *Economic Journal* 99:126–39.
- . 1992. Whom or What Does the Representative Individual Represent? *Journal of Economic Perspectives* 6:117–36.
- . 2004. Economics and Complexity. *Advances in Complex Systems* 7:139–55.
- Kirman, A., and K. J. Koch. 1986. Market Excess Demand in Exchange Economies with Collinear Endowments. *Review of Economic Studies* 174:457–63.
- Kubler, F. 2003. Observable Restrictions of General Equilibrium Models with Financial Markets. *Journal of Economic Theory* 110:137–53.
- Mantel, R. 1974. On the Characterization of Aggregate Excess Demand. *Journal of Economic Theory* 7:348–53.
- . 1976. Homothetic Preferences and Community Excess Demand Functions. *Journal of Economic Theory* 12:197–201.
- . 1977. Implications of Microeconomic Theory for Community Excess Demand Functions. In vol. 3 of *Frontiers of Quantitative Economics*, edited by M. Intriligator. Amsterdam: North-Holland.
- Mas-Colell, A. 1977. On the Equilibrium Price Set of an Exchange Economy. *Journal of Mathematical Economics* 4:117–26.
- . 1991. On the Uniqueness of Equilibrium Once Again. In *Equilibrium Theory and Its Applications*, edited by W. Barnett, B. Cornet, C. D'Aspremont, J. Gabszewicz, and A. Mas-Colell. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mas-Colell, A., M. Whinston, and J. Green. 1995. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.

- Mirowski, P. 1993. The Goalkeeper's Anxiety at the Penalty Kick. In *Non-Natural Social Science: Reflecting on the Enterprise of "More Heat Than Light,"* edited by N. De Marchi. HOPE 25 (supplement): 305–49.
- Mirowski, P., and D. W. Hands. 1998. A Paradox of Budgets: The Postwar Stabilization of American Neoclassical Demand Theory. In *From Interwar Pluralism to Postwar Neoclassicism*, edited by M. S. Morgan and M. Rutherford. HOPE 30 (supplement): 260–92.
- Nachbar, J. H. 2002. General Equilibrium Comparative Statics. *Econometrica* 79:2065–74.
- . 2004. General Equilibrium Comparative Statics: The Discrete Case with Production. *Journal of Mathematical Economics* 40:153–63.
- Polemarchakis, H. 2004. Review of John Sutton Marshall's *Tendencies: What Can Economists Know?* *Economic Journal* 111:F139–F142.
- Quah, J. 2000. The Monotonicity of Individual and Market Demand. *Econometrica* 68:911–30.
- Rizvi, S. A. T. 1990. *Essays on Supply-and-Demand Theory: Mathematical Determinateness and Economic Relevance*. PhD diss., New School for Social Research.
- . 1994a. Game Theory to the Rescue? *Contributions to Political Economy* 13:1–28.
- . 1994b. The Microfoundations Project in General Equilibrium Theory. *Cambridge Journal of Economics* 18:357–77.
- . 1997. Responses to Arbitrariness in Contemporary Economics. In *New Economics and Its History*, edited by John B. Davis. HOPE 29 (supplement): 273–88.
- . 1999. The Evolution of Game Theory. Paper presented to the Erasmus Institute of Philosophy and Economics, December, Erasmus University, Rotterdam.
- . 2003. Postwar Neoclassical Microeconomics. In *A Companion to the History of Economic Thought*, edited by Warren J. Samuels, Jeff E. Biddle, and John B. Davis. Malden, Mass.: Blackwell.
- . 2005a. Experimentation, General Equilibrium, and Games. In *The Experiment in the History of Economics*, edited by Philippe Fontaine and Robert Leonard. New York: Routledge.
- . 2005b. Pluralism in Economics. Paper presented at the American Economic Association meeting, Philadelphia, January.
- Roberts, J., and H. Sonnenschein. 1977. On the Foundations of the Theory of Monopolistic Competition. *Econometrica* 45:101–13.
- Saari, D. 1995. Mathematical Complexity of Simple Economics. *Notices of the American Mathematical Society* 42:222–30.
- Samuelson, P. A. 1947. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Sent, E.-M. 2004. Behavioral Economics: How Psychology Made Its (Limited) Way Back into Economics. HOPE 36.4:735–60.
- . 2005. Pluralisms in Economics. In *Scientific Pluralism*, edited by S. Kellert, H. Longino, and K. Waters. *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Shafer, W., and H. Sonnenschein. 1982. Market Demand and Excess Demand Functions. In vol. 2 of *Handbook of Mathematical Economics*, edited by K. Arrow and M. Intriligator. Amsterdam: North-Holland.

Snyder, S. 1999. Testable Restrictions of Pareto Optimal Public Good Provision. *Journal of Public Economics* 71:97–119.

Sonnenschein, H. 1973. Do Walras' Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions? *Journal of Economic Theory* 6:345–54.

Stoker, T. M. 1984a. Completeness Distribution Restrictions and the Form of Aggregate Functions. *Econometrica* 52:887–907.

———. 1984b. Exact Aggregation and Generalized Slutsky Conditions. *Journal of Economic Theory* 33:368–77.

Townsend, R. 1994. Risk and Insurance in Village India. *Econometrica* 62:539–91.

Van Den Dries, L. 1988. Alfred Tarski's Elimination Theory for Real Closed Fields. *Journal of Symbolic Logic* 53:7–19.

Varian, Hal. 1982. The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica* 50:945–72.