Maximización de Beneficios. Aplicaciones. Términos del Intercambio y Crecimiento argentino

<u>Rendimientos a escala y Función de costos</u>

<u>Funciones de producción homogéneas</u> Una f.p. es **homogénea de grado k** si para un escalar positivo arbitrario λ, verifica la igualdad siguiente:

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}).$$

<u>Teorema</u> (Propiedades de las funciones homogéneas) Si f es homogénea de grado k y diferenciable, entonces

1) (*) $\sum_{j=1}^{L} x_j f_j(\mathbf{x}) = k f(\mathbf{x})$ (teorema de Euler)

También se puede probar la recíproca: Si la función $f(\mathbf{x})$ satisface la identidad (*), luego f es homogénea de grado k (Véase aquí.)

2) Cada derivada parcial de 1º orden resulta *homogénea de grado* $k - 1$.

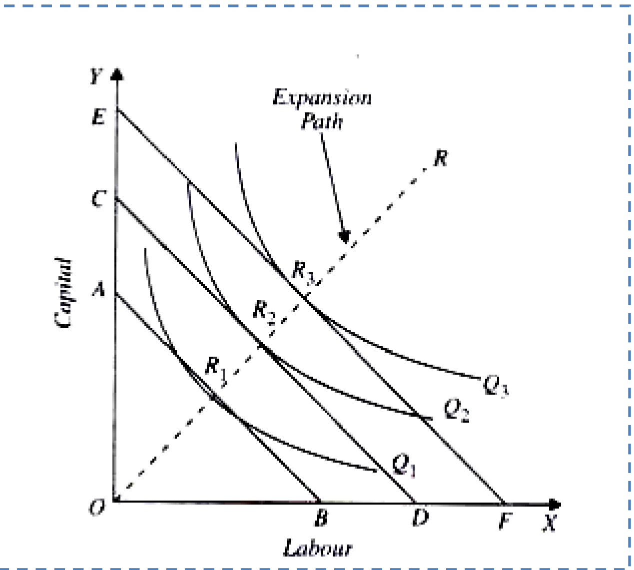
3) Si $\boldsymbol{H}$ es la matriz hessiana, $\mathbf{x}^T \boldsymbol{H} \mathbf{x} = k(k-1) f(\mathbf{x})$.

4) Si f_i y f_j son las derivadas parciales de $f(\ldots)$ con respecto a x_i y x_j, entonces

$$f_i(\lambda \mathbf{x})/f_j(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^{k-1} f_i(\mathbf{x})/\lambda^{k-1} f_j(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})/f_j(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \text{ y } \lambda > 0.$$

La cuarta propiedad implica que la RTS no depende de la escala de operaciones de la firma. Así, todos los senderos de expansión son *líneas rectas que pasan por el origen.* □

En el gráfico siguiente, en el plano de insumos se representan, por un lado, el mapa de isocuantas y, por el otro lado, dados los precios de los factores, se representan los isocostos por medio de las rectas AB, CD, EF, etc. Cada punto en el plano representa un nivel de costo y un nivel de producción; por ejemplo, R_2 representa el nivel de producción Q_2 que se obtiene con el costo representado por CD.



La función de producción Cobb-Douglas impone ciertas restricciones por construcción. Por ejemplo, en la figura, los precios p_x y p_y son *iguales;* la línea OR que va desde el origen atravesando todas las isocuantas (o sea, el sendero de expansión) forma un ángulo de 45º y es una línea recta. La Cobb-Douglas ejemplifica una f.p. con un sendero de expansión en línea recta que pasa por el origen, dado que el cociente entre trabajo y capital siempre es el mismo y los insumos pueden expandirse indefinidamente manteniendo la relación K/L constante.

Partimos de la función de costos determinada por el problema de minimización de la clase anterior: $c = c\ (y, \boldsymbol{w})$. Formulamos dos hipótesis:

a) se practica una expansión equiproporcional de todos los factores, y
b) la función de producción *f* es homogénea de grado *k* y diferenciable.

A continuación estipulamos cómo se calcula la elasticidad-producto del costo total:

$$\gamma = (dC/C)\ /\ (dy/y)$$

<u>Teorema</u> (Elasticidad de la función de costo total) $\gamma = 1/k$.

O sea, la elasticidad de la función de costo total (γ) es igual a la inversa del grado de la función.

<u>Bienes producidos y factores de producción</u>

En buena medida, hemos estado hablando de bienes y factores como cosas diferenciadas dentro de la empresa. Sin embargo recordemos que dijimos que se podía hacer un tratamiento totalmente simétrico de ambos conceptos en teoría de la firma.

En buena medida, seguiré hablando de una empresa que produce 1 bien utilizando *L* factores productivos. Mas recordemos esto cuando diga que los beneficios de la empresa pueden ser escritos de esta manera:

$$\pi = máx._y\ (\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{y}) \qquad \text{tal que } \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$$

En esta expresión, el vector $\boldsymbol{p}$ representa precios de bienes y factores; e $\boldsymbol{y}$ fue definido como un vector de bienes que pueden ser *productos netos positivos* o *negativos*. Esto es, la expresión $\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{y}$ es una diferencia de valor de productos vendidos menos valor de factores usados en su producción.

Maximización de beneficios

Se tienen las restricciones impuestas por la tecnología, escritas bajo la forma general $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$, reflejadas en la función de costos que hemos obtenido previamente. Y en segundo lugar los precios de mercado, $\boldsymbol{p}$, que en un mercado polipolístico o **polipolio** están exógenamente dados. El problema de maximización es entonces:

$$\pi(\boldsymbol{p}) = \text{máx.}\ \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y} \qquad \text{tal que } \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$$

Los productos son medidos como números positivos, y los insumos como cantidades negativas. Esto implica que, efectivamente, $\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y}$ son los beneficios netos de la empresa, es decir ingresos menos costos. La función $\pi(\boldsymbol{p})$ proporciona el beneficio máximo como una función de los precios y es denominada *función de beneficios*. En forma similar a la función de costos, se define la *función de beneficios de corto plazo*:

$$\pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{z}) = \text{máx.}\ \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y} \qquad \text{tal que } \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{z}).$$

Para una firma monoproductora, la función de beneficios adopta la forma:

$$\pi(p, \boldsymbol{w}) = \underset{\boldsymbol{x}}{\text{máx.}}\ p\, f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}\,\boldsymbol{x}$$

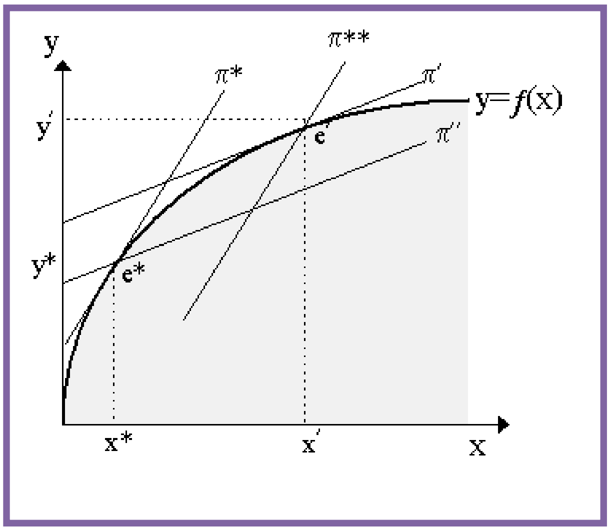
Una variante es utilizar la **función de costo** previamente obtenida:

$$c(\boldsymbol{w}, y) = \text{mín.}\ \boldsymbol{w}\,\boldsymbol{x} \qquad \text{tal que } (y, -\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{Y}(y)$$

($\boldsymbol{Y}(y)$ puede entenderse como los planes productivos que permiten producir y).

Luego:

$$\pi(p, \boldsymbol{w}) = \text{máx.}_y\ [p\,y - c(\boldsymbol{w}, y)]$$



El ejercicio de maximización de beneficios no se realiza con las isocuantas. Mejor ilustrado está en la figura adjunta, donde se grafica la función $y = f(x)$, que debería interpretarse como una función de producción de y que depende de la cantidad variable de un único factor de producción x (p.ej. trabajo). *Su concavidad representa al mismo tiempo la productividad marginal decreciente del factor y la existencia de rendimientos a escala decrecientes*. Obsérvese que en toda combinación producto-insumo y-x el beneficio se lee como $\pi = py - wx$, donde los precios del producto (p) y del insumo (w) están dados. Esta ecuación del beneficio define una función en el espacio y-x que tiene la forma lineal siguiente: $y = \pi/p + (w/p)\,x$, conocida como *la "curva" de isobeneficio*. Sus parámetros: p, w.

La ordenada al origen de la "curva" de isobeneficio es *(π/p)* y su pendiente *(w/p)*. Ello da lugar a una línea recta de pendiente positiva. Todos los puntos de esa línea conducen al mismo beneficio *π*. Por lo tanto, un conjunto *dado* de precios *(p, w)* define una familia de curvas isobeneficio *paralelas*. Vemos en el diagrama que las curvas *π** y *π*** tienen la misma pendiente, con lo cual están generadas por los mismos precios *(w/p)**. Pero como *π** está al N.O. de *π***, tiene una ordenada al origen con mayor beneficio que *π***. También vemos que con un conjunto distinto de precios tendríamos otro conjunto de curvas isobeneficio paralelas, p.ej. *π'* representando más beneficios que *π"*. La combinación que maximiza beneficios es *e**, donde se produce la tangencia entre el contorno de isobeneficio y la función de producción.

Ahora bien, $dy/dx= \nabla_x f$, lo cual enuncia que $p\,\nabla_x f=w$, que es precisamente la **condición de primer orden o necesaria** para el problema de maximización. El punto *e** es el que maximiza beneficios a estos precios. En cambio, en *e'* la pendiente de la curva de isobeneficio *π*** es mayor que la de la función de producción, implicando que $w>p\,\nabla_x f$, es decir, el costo marginal del factor es superior al valor de su producto marginal, violando así las condiciones de primer orden. (Recuérdese que $\nabla_x f$ indica la *derivada parcial de f con respecto a x.)*

¿Qué sucede ahora si el precio del factor cambia y nos trasladamos a las curvas *π' o π"*? Las curvas ahora son más planas que antes – es decir *(w/p)'<(w/p)** - lo que implica que el precio del factor cayó o que aumentó el precio del producto. Ahora el punto *e** ya no maximiza el beneficio. A los nuevos precios, la combinación que maximiza el beneficio es *e'*. También se observa que *y'>y** y que *x'>x**, es decir pasamos a producir a mayor escala que con los viejos precios.

Conclusiones: 1) la concavidad estricta de la función de producción nos permite definir una única combinación insumo-producto óptima a los precios dados; 2) la combinación óptima siempre será un punto de tangencia de la curva de isobeneficio y la función de producción; 3) un aumento del precio del producto o un descenso del precio del factor inducirán a aumentar el nivel de producción que maximiza el beneficio.

Harold Hotelling (1895-1973)

En nuestro ejercicio de minimización de costos, derivamos una función de costos *c* ***(w**, y)*. El análogo aquí es la **función de beneficios**, definida como *π (p,* ***w****)* = *máx. [pf(**x**)] –* ***wx***. Hay que ver que los únicos parámetros que intervienen en esta función son los precios (***w****, p)*.

La función de beneficios fue estudiada en gran medida en un trabajo pionero de Harold Hotelling (1932). Algunas propiedades estándar de esta función son las siguientes:

1) No se aceptan pérdidas: *π (p)* ≥ *0.*

2) Es no decreciente en p.

3) Es no creciente en *w*.

4) Es convexa en *p* y *w*.

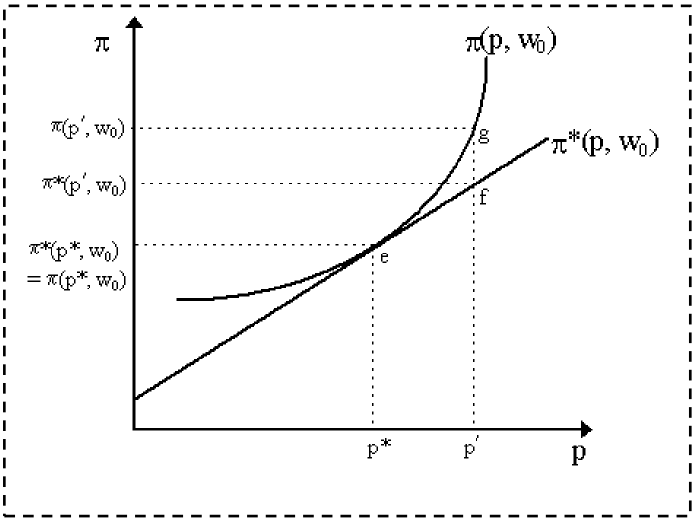
5) Es continua en p y w.

6) Homogeneidad de grado 1 en p y $\mathbf{w}$: $\pi(\lambda p, \lambda \mathbf{w}) = \lambda \pi(p, \mathbf{w})$.

Es decir, es homogénea de primer grado con respecto a todos los precios. Escalando a todos los precios mediante un factor t no se altera la elección de productos e insumos de la empresa y por lo tanto los beneficios se escalarán en el mismo factor. Nótese que las derivadas parciales de $\pi(p, w)$ deben ser homogéneas de grado cero.

7) Lema de Hotelling: $\partial\pi(p, \mathbf{w})/\partial p = y$, $\partial\pi(p, \mathbf{w})/\partial w_j = -x_j$.

Estas propiedades en general no requieren demostraciones demasiado difíciles. Vamos a dar una percepción de lo que está detrás de la propiedad 4). En el gráfico adjunto, están representados los beneficios y el precio de un único producto, manteniendo el precio del único factor constante en w_o. A los precios (p^*, w_o) el plan de producción maximizador de beneficios (y^*, x_o) brinda beneficios $\pi^*(p^*, w_o)$ en e.



Supóngase que p aumenta, pero que la firma continúa utilizando el mismo plan de producción. Denominemos los beneficios obtenidos por este comportamiento pasivo la "función de beneficios pasiva" y denotémoslo como $\pi^*(p, w_o) = p\, y^* - w_o x_o$.

En el plano (p, π) ésta es la ecuación de una línea recta. El beneficio de seguir una política óptima debe ser al menos tan grande como el de seguir la política pasiva, luego el gráfico de $\pi(p, w_o)$ debe estar por encima del gráfico de $\pi^*(p, w_o)$. Si el precio del producto aumentó de p* a p' el productor realizará otra elección maximizadora del beneficio (y', x'). Luego, la canasta (y', x') elegida al precio más elevado p' no puede implicar un menor beneficio que la anterior canasta (y^*, x^*), o $\pi(p',w_o)=p'y'-w_o x' \geq p'y^*-w_o x^*=\pi^*(p',w_o)$, lo que indica que el punto g de la función de beneficios $\pi(p, w_o)$ está arriba del punto f de la función lineal $\pi^*(p, w_o)$.

Como el mismo argumento puede ser repetido para cualquier precio p, la función de beneficios debe ubicarse por encima de sus líneas tangentes en cada punto. Pero esto significa que $\pi(p,w_o)$ debe ser una función convexa en p. Si el argumento se hiciera con w se obtendría el resultado de que $\pi(p_o, w)$ debe ser una función cóncava en w.

Ahora consideremos el **lema de Hotelling** (propiedad 7). Sea $y_j(\mathbf{p})$ la función de oferta neta de la firma por el bien j. Luego $y_j(\mathbf{p})=\partial\pi(\mathbf{p})/\partial p_j$ $(j=1,\ldots,L)$ si existe la derivada y $p_j>0$.

<u>*Dem*</u>. Supóngase que $(\mathbf{y}^*)$ es un netput maximizador de beneficios a precios $(\mathbf{p}^*)$. Definimos la función:

$$g(\mathbf{p})=\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\,\mathbf{y}^*.$$

El plan de producción a precios $\boldsymbol{p}$ nunca será menos rentable que el plan $\boldsymbol{y}^*$. Empero, $\boldsymbol{y}^*$ es el netput maximizador de beneficios a precios $\boldsymbol{p}^*$ (por hipótesis). Por lo tanto, la función $g(p)$ alcanzará un *mínimo* valor igual a 0 cuando los precios sean iguales a $\boldsymbol{p}^*$. Por hipótesis del teorema, éste es un óptimo interior ($\boldsymbol{p}>>\boldsymbol{0}$). Las condiciones de primer orden para un mínimo implican que:

$$\partial g(\boldsymbol{p}^*)/\partial p_j = \partial \pi(\boldsymbol{p}^*)/\partial p_j - y_j^* = 0 \ (j=1, \ldots, L)$$

Como la demostración es válida para cualquier elección de $\boldsymbol{p}^*$**,** el teorema está demostrado. Este importante resultado indica que *podemos recuperar la función de oferta de la firma a partir de su función de beneficio*.

Como se mencionó previamente, este lema es consecuencia del resultado más general del teorema de la envolvente.

Generalización

Con varios insumos productivos, la condición de segundo orden es que la matriz de derivadas segundas de la función de producción sea semidefinida negativa en el óptimo: en otros términos, la matriz Hessiana

$$D^2 f(x^*) = [\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_i \partial x_j]$$

debe satisfacer $\boldsymbol{h}D^2 f(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h}^T \leq 0$ para todo vector $\boldsymbol{h}$. En el caso de un único insumo variable, la condición de primer orden implica

$$df(x^*)/dx = w/p$$

y la de 2º orden

$$d^2 f(x^*)/dx^2 \leq 0.$$

Por consiguiente, para asegurar su cumplimiento, la función de producción en el óptimo debe ser **localmente cóncava**.

Comentarios Para cada vector de precios $(p, \boldsymbol{w})$ existirá en general una elección óptima factorial $\boldsymbol{x}^*$. La función que proporciona la elección óptima de insumos como función de los precios es denominada **función de demanda de factores** de la empresa. Pregunto ¿por qué ahora no decimos demanda ***condicional*** del factor?

La función $y\ (p, w)= f(x(p, w))$ es la **función de oferta** de la firma. ¿Qué dificultades podemos encontrar al buscarla?

1.- Si la tecnología no es diferenciable (como la tecnología de Leontief) las derivadas planteadas no existen.

2.- Las soluciones planteadas tienen sentido sólo para caracterizar los óptimos interiores en los que cada factor es utilizado en cantidades positivas. En el caso general, debemos replantear el problema para exigir que la solución sea no negativa, de la siguiente forma:

$$p\ \partial f(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_i - w_i \leq 0 \text{ si } x_i=0$$
$$p\ \partial(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_i - w_i = 0 \text{ si } x_i >0.$$

Estas condiciones son llamadas de Karush-Kuhn-Tucker.

3.- También puede que el problema sea que no exista un plan maximizador de los beneficios (ejemplo: con una tecnología $f(x)=x$). Cualquier tecnología con rendimientos constantes a escala tiene el mismo problema. Si halláramos una combinación factorial para la cual los beneficios son positivos, éstos podrían hacerse arbitrariamente grandes – lo que significa que no existe una combinación que maximice los beneficios, excepto la trivial de un nivel de producto igual a cero.

4.- La función de beneficios, al ser convexa en **todos** los precios $\boldsymbol{p}$, tiene una matriz Hessiana de derivadas segundas de π con respecto a $\boldsymbol{p}$ semidefinida positiva y simétrica. *La matriz de derivadas segundas de la función de beneficios no es más que la matriz de las derivadas primeras de las funciones de oferta neta*. Para dos bienes, por ejemplo, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \partial^2\pi/\partial p_1^2 & \partial^2\pi/\partial p_1\partial p_2 \\ \partial^2\pi/\partial p_2\partial p_1 & \partial^2\pi/\partial p_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial y_1/\partial p_1 & \partial y_1/\partial p_2 \\ \partial y_2/\partial p_1 & \partial y_2/\partial p_2 \end{bmatrix}$$

5.- Otra dificultad que trae aparejada la tecnología con rendimientos constantes a escala es que, si $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ produce el beneficio máximo igual a cero, entonces $(t\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x})$ también lo maximizará (no unicidad).

Ejercicio Utilizando la función de producción $f(x)=x^\alpha$ $(\alpha>0)$ ¿para qué valores del parámetro α tiene solución el problema de maximización de los beneficios competitivos? Obtener en este caso la función de demanda del factor, la función de oferta del producto y la función de beneficio. Graficar.

<u>Estática comparativa utilizando las condiciones de primer orden</u>. Sea el problema

$$max_x \; p\, f(x) - w\, x$$

Supondremos que *f(x)* es diferenciable. En tal caso, en el caso de un solo producto con un único factor obtenemos las condiciones de 1º y 2º orden siguientes:

$$p\, f'(x\,(p, w)) - w \equiv 0$$
$$p\, f''(x\,(p, w)) \leq 0.$$

Diferenciando la primera identidad con respecto a *w*:

$$p\, f''(x\,(p, w))\,(dx\,(p, w)/dw) - 1 \equiv 0$$

Si el máximo es **regular** $f''(x) \neq 0$, por lo tanto:

$$dx\,(p, w)/dw \equiv 1/[p\, f''(x\,(p, w))].$$

Luego, si $f''(x\,(p, w))$ tiene una magnitud amplia (lo que sucede en el caso de funciones de producción con curvatura angulosa en un entorno del óptimo), el cambio de la cantidad factorial demandada será despreciable. Asimismo, la condición de segundo orden implica que $f''<0$, y por consiguiente $dx\,(p, w)/dw<0$. *Las curvas de demanda factorial tienen pendiente **negativa**.*

Ejercicios 1) Practicar la diferenciación de las condiciones de primer orden cuando la función de producción depende de 2 insumos.

2) **Teorema** Demostrar que $\Delta p\, \Delta y \geq 0$ Es decir, el producto vectorial interno del vector de cambios de los precios por el vector de los cambios asociados en los netputs debe ser no negativo.

Principio de le Châtelier

Henri Louis Le Châtelier fue un famoso químico francés. Paul Samuelson introdujo en 1947 en su libro *Foundations of Economic Analysis* un principio generalizado que denominó Principio de Le Châtelier, que se verifica bajo una condición de máximo para un equilibrio, del cual se deriva que *las elasticidades de corto plazo de las variables del sistema son más reducidas en el corto plazo que en el largo, debido a la incidencia de los factores fijos en el corto*.

Henri Louis Le Châtelier (1850-1936)

Supóngase que la firma produce un único producto y que los precios de los factores están fijos. Denótese a la función de beneficios de corto plazo como $\pi_S\ (p, z)$ donde p es el precio del producto y z es un factor fijo en el corto plazo (una construcción, maquinaria, etc.). La demanda maximizadora de beneficios de este factor a largo plazo será una función $z\ (p)$ con lo cual la función de beneficios de largo plazo puede ser escrita como $\boldsymbol{\pi_L(p)=\pi_S\ (p, z(p))}$**.**

Ahora sea p^* un precio particular del producto, y $z^*=z\ (p^*)$ la demanda óptima de largo plazo del factor z a ese precio. Como los beneficios de largo plazo son siempre al menos mayores que los de corto – porque hay factores productivos que no se pueden ajustar en el corto, pero sí en el largo – se deduce que: $\boldsymbol{h\ (p)\equiv\pi_L(p) - \pi_S(p, z^*)=\pi_S(p, z(p)) - \pi_S\ (p, z^*)\geq 0}$**.**

para todo precio p. Pero $h\ (p)$ alcanza su mínimo en $p=p^*$; luego, su primera derivada debe anularse en p^*. Por el lema de Hotelling, las ofertas de corto y de largo plazo de cada bien deben igualarse en p^*.

Como p^* constituye un mínimo de $h\ (p)$, su segunda derivada es no negativa, o sea:

$$\partial^2\pi_L\ (p^*)/\partial p^2 - \partial^2\pi_S\ (p^*, z^*)/\partial p^2 \geq 0.$$

Nuevamente por el lema de Hotelling, deducimos que:

$$dy\ (p^*)/dp - \partial y(p^*,z^*)/\partial p = \partial^2\pi_L(p^*)/\partial p^2 - \partial^2\pi_S(p^*, z^*)/\partial p^2 \geq 0.$$

Por consiguiente, la reacción de la oferta a largo plazo como respuesta a un cambio del precio es mayor o igual que la reacción de la oferta a corto plazo en el punto $z^*=z\ (p^*)$.

Un documento a leer:

Daniel Artana, Enrique A. Bour, Juan Luis Bour, y Nuria Susmel, Parte 2, Capítulo 9 de los *Ensayos: (2010), Los Términos del Intercambio y el Crecimiento Económico de Argentina*.

Inicialmente veremos una presentación de este documento (en inglés) en powerpoint. XLVI Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política, noviembre 2011, Universidad de Mar del Plata.