

John Nash, el último padre fundador de la teoría de juegos, y la evolución del concepto de equilibrio desde Cournot¹

Jorge M. Streb (Universidad del CEMA)

Junio 2015

Nash recibió el premio Nobel de economía por dos aportes fundamentales. Primero, la distinción entre juegos cooperativos y no cooperativos. Segundo, el concepto de solución básico para juegos no cooperativos. Myerson agrega que, en tanto los juegos cooperativos se pueden reducir a un juego no cooperativo más amplio agregando la negociación previa, es el concepto de solución básico de teoría de juegos. Como fue originalmente formulado por Cournot en el contexto del duopolio, concuerdo con los que proponen llamarlo “equilibrio de Cournot-Nash”. El problema de Cournot fue que su análisis sobre cómo se llega al equilibrio no fue aceptado y llevó a polémicas interminables. Para mí, otro aporte fundamental de Nash fue resolver estas polémicas con sus dos interpretaciones revolucionarias del equilibrio. En la interpretación racionalista, los jugadores conocen la estructura del juego y usan la solución para predecir el equilibrio: estas son las expectativas racionales. En la interpretación adaptativa, los jugadores no conocen la estructura de juego pero ajustan sus estrategias para maximizar sus pagos. La teoría de juegos evolutiva desarrolla esta explicación, que Cournot anticipó al hablar de la curva de demanda. En suma, Nash no solo fue extraordinario como matemático sino como economista.

Unas breves palabras sobre la vida de John F. Nash, Jr., antes de discutir en contexto histórico el equilibrio de Nash, o equilibrio de Cournot-Nash, que aporta el concepto de solución fundamental de la teoría de juegos.

Nació un 13 de junio de 1928, murió el 23 de mayo de 2015 junto con su esposa Alicia. Volvía a su casa del aeropuerto de Newark, NJ, cuando chocó su taxi. Ambos salieron despedidos. Al escuchar la noticia, lo primero que pensé es que no estaban usando cinturones de seguridad. Poco antes había recibido de la Academia de Ciencias y Letras de Noruega el premio Abel, equiparable a un premio Nobel de matemáticas, por su trabajo científico sobresaliente en ese campo.

Llegué a conocer a Nash el año pasado, en la Universidad de San Pablo (USP). Entre el 24 y el 31 de julio de 2014, la USP organizó el International Workshop on Game Theory and Economic Applications de la Game Theory Society. El lunes 28 de julio lo vi a Nash justo antes de la cena de gala. Desgarbado y un poco encorvado por los años, llamaba la atención desde lejos. Me acerqué y hablé con él un poco. Entre el murmullo ambiente por la multitud reunida ahí y su voz baja y vacilante, lo único que le llegué a entender es que estaba muy contento con el trato que le estaban dando en Brasil.

Al día siguiente, antes de la conferencia plenaria de Nash, Robert Aumann lo presentó como uno de los padres fundadores del campo. Fue también difícil seguirlo en su exposición, porque no se acercaba demasiado al micrófono y tampoco ayudaba su hablar entrecortado y susurrante. Nash presentó un powerpoint sobre un paper que había escrito en colaboración. Me llamó la atención el uso de tecnología moderna. Rosemarie Nagel luego me aclaró que el powerpoint lo habían preparado ella y otro coautor.

Luego de esa conferencia, acompañando a Roberto Serrano al almuerzo, terminé sentado a la mesa con Robert Aumann, Rosemarie Nagel, John Nash y Alicia Lardé. Luego del almuerzo, aproveché para pedirle una foto a Nash para mostrársela a mis alumnos de historia del pensamiento económico y social. Su mujer Alicia pidió otra foto con ellos dos, quería una

¹ Agradezco las sugerencias de Germán Coloma, Celeste González y Fernando Tohmé. Los puntos de vista son personales y no representan a ninguna institución.

copia. Después del almuerzo quedé un rato a solas con Alicia, hablando en castellano por lo que recuerdo. Sabiendo todo lo que había atravesado, me llamó la atención que lo único que dijo lamentar era no haber seguido su carrera en física. En los cincuenta, la generación de mis padres, era común que las mujeres universitarias sacrificaran su carrera profesional por la vida familiar.

Nash dejó su posición como profesor en MIT en 1959, cuando su pensamiento empezó a, por así decirlo, desorganizarse. No volvió a conseguir empleo. Algunos observadores, como Sylvia Nasar (1994) en una nota del New York Times que sería el germen de su libro *A beautiful mind*, dicen que sin el apoyo de Alicia, aun después de su separación, Nash hubiera terminado en la calle, un *homeless* más, como otros enfermos mentales en Estados Unidos. Alicia se mudó cerca de Princeton, por lo que Nash pudo volver a frecuentar el campus. Marco Bonomo, un economista que estudió en Princeton, decía que era común verlo sentado solo en la cafetería, escribiendo algo con una mano y tapándolo de la vista de los demás con la otra.

El premio Nobel de economía

Recibió el premio Nobel de economía en 1994 “por su análisis pionero de los equilibrios en la teoría de los juegos no cooperativos” junto con Reinhard Selten y John Harsanyi. La Academia Real de Ciencias de Suecia menciona dos aportes fundamentales, ambos producto de su tesis doctoral en la Universidad de Princeton (Nash 1950c).

El primer aporte fundamental de su tesis, publicado en Nash (1951), es distinguir entre juegos cooperativos “basados en las interrelaciones de las varias coaliciones que pueden ser formadas por los jugadores del juego” y juegos no cooperativos “basados en la ausencia de coaliciones puesto que se asume que cada participante actúa independientemente, sin colaboración o comunicación con ninguno de los otros”. La clave aquí es si es posible o no sellar acuerdos vinculantes.

El segundo aporte fundamental es desarrollar un concepto de equilibrio para juegos no cooperativos. Esta solución relega el análisis de los juegos de suma cero con dos jugadores de von Neumann y Morgenstern (1944) a un caso particular de los juegos no cooperativos con n jugadores. Este otro aporte central de su tesis doctoral fue publicado anticipadamente en un artículo de una página de largo (Nash 1950b), su célebre “*An equilibrium point for n -person games*”. Como este punto de equilibrio generaliza la solución de Cournot, también se conoce como equilibrio de Cournot-Nash.

Como Nash (1951) agrega que los juegos cooperativos pueden reducirse a la forma no cooperativa “construyendo un modelo de las negociaciones previas al juego de modo que los pasos de la negociación se transforman en jugadas en un juego no cooperativo más grande, a los 21 años Nash está diciendo que los juegos cooperativos introducidos por von Neumann y Morgenstern (1944) como un paradigma de teoría de juegos son un caso especial de los juegos no cooperativos. Esto implica que su punto de equilibrio no es sólo el concepto de solución de teoría de juegos no cooperativa, sino de teoría de juegos a secas (Myerson 1999).

Para mí hay otro aporte fundamental más de sus tesis (Nash 1950c) que no fue publicado en Nash (1951). Consiste en proponer dos interpretaciones de equilibrio. La primera interpretación, que llama “racionalista”, en esencia introduce las expectativas racionales. La

segunda, que llama “acción de masa”, es una dinámica adaptativa que luego fue desarrollada por teoría de juegos evolutiva. Aunque esta parte de su tesis no fue publicada, la primera interpretación había aparecido en Nash (1950a), donde habla explícitamente de que la solución del juego provee la “expectativa racional”. Esta primera interpretación, donde los jugadores usan la estructura del juego para predecir la solución, fue incorporada en los libros de texto de teoría de juegos, por ejemplo Luce y Raiffa



John Forbes Nash y Jorge Streb

(1957). Una manera de medir la importancia de este aporte es que la primera interpretación permite resolver las objeciones a las explicaciones de Cournot (1838) en el capítulo 7 acerca de cómo se llegaba al punto equilibrio en un duopolio, que se basaban en el hecho de que se desaprovechaba la información disponible.

La segunda explicación, donde los jugadores desconocen la estructura del juego pero ajustan las estrategias para maximizar los pagos, ya aparecía en Cournot (1838), pero la literatura no lo detectó porque está en el capítulo 4 donde se describe la curva de demanda, no en el capítulo 7 donde se discute el oligopolio. La dinámica adaptativa de Cournot (1838) en el capítulo 7 es en cambio una dinámica híbrida: los jugadores conocen el modelo, pero lo resuelven mal. De todos modos, esa dinámica también ha sido rescatada hoy en día por teoría de juegos evolutiva.

En lo que sigue vamos a concentrarnos en el concepto de solución de Nash (1950b) y en cómo esto generaliza el concepto de equilibrio introducido por Cournot (1838).

Padres fundadores de la teoría de los juegos: Cournot, Borel, von Neumann y Nash

Myerson (1999) hace una evaluación histórica de la contribución de Nash que vale la pena leer. Toma como precursores de Nash a Cournot, Borel y von Neumann (Myerson 1999: 1071-73). Myerson (1999) puntualiza que la primera aplicación de equilibrio de Nash en términos matemáticos precisos aparece en Cournot (1838). Menciona a Borel (1921) por la idea abstracta de estrategias puras, la introducción de las estrategias mixtas y, para el caso de un juego de suma cero con dos jugadores, la representación usando la forma normal.

Myerson (1999) enumera una larga serie de aportes de von Neumann. Primero, que von Neumann (1928) desarrolla a pleno las ideas introducidas por Borel sobre la representación de un juego usando la forma normal y el concepto de que cada jugador elige una estrategia en forma independiente. Segundo, que von Neumann (1928) usa un teorema de punto fijo para demostrar el teorema del minimax para juegos de suma cero con dos jugadores que, como ya menciona Nash (1950b), es un caso particular del equilibrio de Nash. Tercero, que von Neumann y Morgenstern (1947) fundamentan axiomáticamente la teoría de utilidad esperada que había sido propuesta por Bernoulli (1738) para decisiones bajo incertidumbre. Esta última innovación, introducida en el apéndice de la segunda edición, hubiera

posibilitado eliminar la restricción de que todos los pagos son monetarios usada en la primera edición de 1944 y mantenida en las ediciones posteriores.

Myerson (1999: 1073) señala que Nash reconstruye los elementos en von Neumann y Morgenstern (1947), ensamblándolos correctamente. Aquí planteamos algo ligeramente más amplio, que Nash recombina los elementos en von Neumann y Morgenstern (1947) con la intuición básica de equilibrio de Cournot (1838).

Un punto de equilibrio

Nash (1950b) toma un juego con n jugadores, donde cada uno dispone de un conjunto finito de estrategias puras. Cada jugador elige una estrategia mixta, definida como una distribución de probabilidad sobre su conjunto de estrategias puras.

Las estrategias de los n jugadores se pueden considerar como un perfil o colección de n estrategias. Los pagos esperados de cada jugador dependen de ese perfil de estrategias. Dado un perfil arbitrario de estrategias, Nash define lo que ahora llamamos “perfil de respuesta óptima”, que es todo perfil de n estrategias en el que la estrategia de cada jugador da el máximo pago frente a las estrategias de los otros $n - 1$ jugadores en el perfil arbitrario de estrategias inicialmente dado. Define como punto de equilibrio a todo perfil de respuesta óptima donde las n estrategias son una respuesta óptima a sí mismas. En palabras de Nash (1950b):

Any n -tuple of strategies, one for each player, may be regarded as a point in the product space obtained by multiplying the n strategy spaces of the players. One such n -tuple counters another if the strategy of each player in the countering n -tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the $n - 1$ strategies of the other players in the countered n -tuple. A self-countering n -tuple is called an equilibrium point.

Luego de esta definición concisa y elegante de punto de equilibrio, ahora conocido como equilibrio de Nash, sigue una prueba de existencia usando el teorema de punto fijo de Kakutani. La prueba de la tesis (Nash 1950c) usa en cambio el teorema de punto fijo de Brouwer, que lleva a una demostración más larga pero era la preferida por Nash ya que era una prueba constructiva del equilibrio, al estilo de la que ahora vamos a ver con Cournot (1838). Cierra con la observación de que el teorema de minimax para juegos de suma cero con dos jugadores de von Neumann y Morgenstern (1947) es un caso especial de este teorema.

La solución de Cournot

Ahora vemos cómo el concepto de equilibrio de Nash es una generalización del equilibrio de Cournot (1838). Cournot fue casi ignorado en vida. Esto empezó a cambiar con la revolución marginalista en economía. Walras lo reivindica en 1874, planteando su teoría de equilibrio general como una generalización de la teoría de equilibrio parcial de Cournot. Jevons y Marshall también elogian su obra.

Cournot (1838) trata al oligopolio en el capítulo 7 sobre competencia entre productores, después de definir la curva de demanda $D = F(p)$ en el capítulo 4 y derivar el precio óptimo de monopolio en el capítulo 5. Primero analiza el caso de dos productores de un bien

homogéneo, $n=2$. Usa como ejemplo dos fuentes de agua mineral y supone que los costos de producción son nulos (al considerar el caso general $n \geq 2$, toma en cuenta los costos de producción). En consecuencia, la maximización de beneficios se reduce a la maximización de los ingresos de cada propietario:

$$D_1 \cdot F(D_1 + D_2),$$

$$D_2 \cdot F(D_1 + D_2),$$

donde el precio de mercado $p = F(D_1 + D_2)$ depende de la oferta total D en ese mercado, $D = D_1 + D_2$. Como supone que la demanda es continua, los ingresos también lo son. Luego diferencia estas ecuaciones para derivar las condiciones de primer orden para un óptimo interior, donde cada propietario optimiza tomando como dada la producción del otro propietario:

$$f(D_1 + D_2) + D_1 \cdot f'(D_1 + D_2) = 0,$$

$$f(D_1 + D_2) + D_2 \cdot f'(D_1 + D_2) = 0,$$

Estas condiciones determinan conjuntamente el punto de equilibrio. Si suponemos que la función de demanda es lineal,

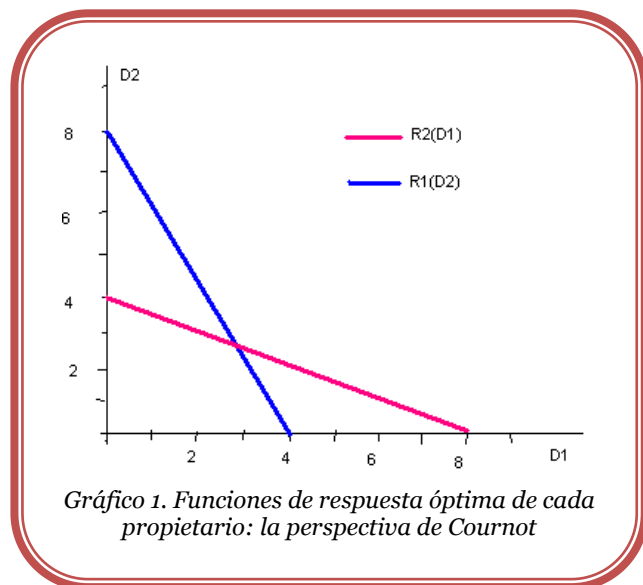
$$p = a - (D_1 + D_2),$$

entonces es muy simple representar cómo varía la respuesta óptima de cada propietario i al otro, $D_i^* = R_i(D_{-i})$, para $i = 1, 2$:

$$D_1^* = R_1(D_2) = (a - D_2)/2;$$

$$D_2^* = R_2(D_1) = (a - D_1)/2.$$

En el Gráfico 1 reproducimos esta versión lineal de las curvas de reacción de Cournot para el caso de $a=8$. Cada curva, que ahora llamamos *función de respuesta óptima*, plantea la respuesta óptima para cada nivel de producción del otro propietario.



Cournot a continuación pasa a discutir la cuestión de la estabilidad del equilibrio. Plantea que ningún punto fuera de la intersección de las dos curvas es estable. Si empiezan en algún punto fuera de la intersección, Cournot argumenta que van a terminar convergiendo a ese punto de intersección siguiendo un proceso de ajuste miope, donde un propietario reacciona en forma óptima a la producción dada del otro y así sucesivamente.

Hay una manera de representar gráficamente el equilibrio de este modelo que lo lleva a ver como un punto fijo, que es la perspectiva que adoptó Nash (1950b) cuando discutió este problema. Partiendo de un punto arbitrario D_1 , se puede computar la respuesta óptima D_2^* del propietario 2, para luego calcular la respuesta óptima D_1^{**} del propietario 1 a D_2^* :

$$D_1^{**} = R_1(D_2^*) = R_1(R_2(D_1)) = \frac{1}{2}(a - (a - D_1)/2) = (a/4) + (D_1/4).$$

Esto se representa en el gráfico 2. A diferencia de Nash (1950b) que toma un número discreto de estrategias puras, en este problema hay un continuo de estrategias. Las respuestas óptimas se computan únicamente en términos de estrategias puras, ya que aquí no hay un equilibrio en estrategias mixtas. En este contexto, el teorema del punto fijo de Brouwer usado por Nash (1950c) implica que una función continua definida en un intervalo cerrado que toma valores en ese mismo intervalo intersecta a la función identidad. Ese punto de intersección es el punto fijo o punto de equilibrio $D^{**} = D_1$.

Equilibrio de Cournot-Nash

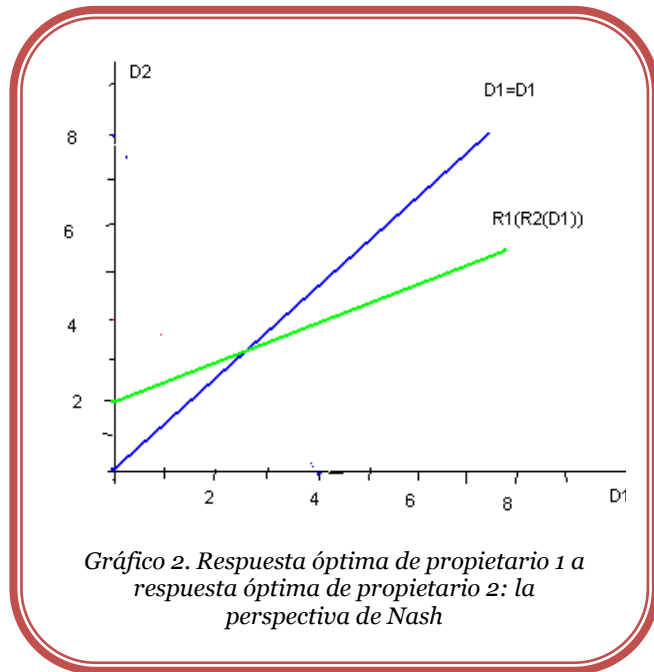
Aumann (1985: 43-4) plantea que “nacido hace más de un siglo en conexión con el estudio de Cournot (1838) sobre duopolio... el equilibrio de Nash es la corporización de la idea de que los agentes económicos son racionales, que simultáneamente actúan para maximizar su utilidad. Si hay alguna idea que puede ser considerada la fuerza motriz de la economía, es ésta.

Así, en un sentido, el equilibrio de Nash corporiza la más importante y fundamental idea en economía”. El análisis pionero de Cournot (1838) lleva a que a veces se llame “equilibrio de Cournot-Nash” al punto de equilibrio de los juegos no cooperativos.

Martin Shubik, compañero de Nash en Princeton, señala que desde el principio vio el resultado de Cournot como un subconjunto del equilibrio de Nash: “ni bien Nash produjo su equilibrio no cooperativo, le di una mirada y le dije a John: esto es Cournot. No quiero desmerecer la contribución de John: no es Cournot, Cournot es un subconjunto propio de Nash, ipero estaba ahí!”, dijo en una entrevista en 1991 (Leonard 1994: 507). Leonard cita este testimonio junto con otra referencia de Shubik (1989), donde éste dice que “la solución de Cournot puede ser vista como una aplicación de la teoría de equilibrio no cooperativo al oligopolio (ver Mayberry, Nash y Shubik 1953)”.

Pero a continuación Leonard (1994: 507-9) acusa a Shubik de reinterpretar en forma retrospectiva lo que caracteriza como la idea dinámica de Cournot para que cuadre con lo que caracteriza como la idea estática de Nash. Para que quede claro que no es una reinterpretación retrospectiva, agregamos un testimonio contemporáneo. Hurwicz (1953:402) dice textualmente: “Ha sido señalado por Arrow y por otros que la solución de Nash, cuando es aplicada al problema de oligopolio clásico (el caso del agua mineral, por ejemplo), esencialmente corresponde a la llamada *solución de Cournot*”.

Tal vez no haya habido ninguna influencia directa, ya que Nash lo menciona a Cournot una sola vez por otro tema en Nash (1950a), un estudio sobre negociación bilateral que escribió en un curso optativo sobre economía internacional que tomó mientras cursaba su carrera de



grado de matemáticas en el Carnegie Institute of Technology (hoy Carnegie Mellon University). Nash ya conocía la obra de von Neumann, porque en el taller de la Game Theory Society en San Pablo contaron que Nash le había mandado esta nota por correo a von Neumann, antes de ir a estudiar a Princeton en septiembre de 1948. Cuando llegó a Princeton y se encontró con él, le preguntó qué le había parecido. Von Neumann respondió que no lo había visto –parece que tiró el sobre a la basura, sin abrirlo, ya que venía de un estudiante de grado ignoto de un instituto tecnológico chico en Pittsburgh, Pensilvania– y le pidió que se lo mandara de vuelta. Cuando lo leyó, recomendó inmediatamente que lo publicaran en *Econometrica*.

Cuando ataca este problema de negociación bilateral, Nash lo relaciona con “el problema clásico de intercambio y, más específicamente, de monopolio bilateral tratado por Cournot, Bowley, Tintner y Fellner” (Nash 1950a: 155). Nash lo cita a Cournot por no haber resuelto el problema de negociación bilateral entre dos naciones. Kuhn (1996: 156), en un seminario que se organizó en 1994 con ocasión del premio Nobel a Nash, piensa que estas referencias fueron sugeridas casi con seguridad por Morgenstern, ya que creía que Nash no había leído a estos autores. Sin embargo, si uno mira el índice de *Theory of games and economic behavior*, Cournot no aparece citado ni una sola vez (de los otros autores, solo Tintner aparece en una nota al pie por otra cuestión sin relación con esto). Las referencias son indirectas, apareciendo como críticas a las teorías existentes de duopolio y oligopolio. ¿Por qué le va a sugerir Morgenstern a Nash que lo cite a Cournot en un artículo de 8 páginas, si él y von Neumann no se toman el trabajo de citarlo en un libro de más de 600 páginas?

De todos modos, tal como dice Kuhn, estoy seguro de que Nash efectivamente nunca leyó a Cournot. La mayoría de los economistas tampoco lo leyeron. En economía, Cournot es sinónimo de su modelo de duopolio. Incluso entre los contados economistas que lo leyeron, pocos se fijaron en el comentario perdido de Cournot (1838) en su capítulo 10 sobre comercio internacional, donde dice que para estudiar el impacto de la apertura comercial se concentra en el caso de competencia ilimitada, dejando de lado el estudio del monopolio bilateral que es complicado y de poco interés. Esta referencia sólo la pudo haber sacado de un comentario de su profesor en el curso de economía internacional que tomó en el Carnegie Institute of Technology. Cournot se mencionaba en ese entonces en los cursos de comercio internacional por sus críticas a las posiciones de Adam Smith sobre libre cambio, que pensaba eran incorrectas bajo ciertas condiciones (ver referencias en Fisher 1898).

Pudo haber escuchado en ese curso algo sobre los capítulos de Cournot (1838) sobre poder de mercado de las empresas, ya que puede aplicarse al comercio internacional. O pudo haber escuchado después algo sobre los modelos de oligopolio criticados por von Neumann y Morgenstern (1944). Nash era famoso tanto por no leer casi nada como por cazar ideas en el aire.

Aplicación versus formulación general de la metodología

Hablar de equilibrio de Cournot-Nash es un tema controvertido, por lo que discutimos las objeciones de Leonard (1994) y Myerson (1999) que los llevan a estar en desacuerdo con llamar así al equilibrio de Nash.

Myerson (1999) plantea dos objeciones de peso por las que no se le debe dar el crédito a Cournot (1838) por la idea de equilibrio de un juego no cooperativo. La primera crítica de

Myerson (1999) es que eso confundiría una aplicación de la metodología con su formulación general.

Myerson (1999) agrega que la aplicación específica de Cournot trajo muchas confusiones ya que se le hizo más difícil a los lectores distinguir la metodología de los modelos específicos, algo que es completamente cierto. La aplicación específica de Cournot llevó a mezclar la discusión de la metodología con cuestiones específicas del modelo de duopolio. Esto arranca con la crítica de Bertrand (1883), que llevó a distinguir entre el equilibrio de Cournot y el equilibrio de Bertrand, a lo que luego se sumaron otros como el equilibrio de Stackelberg. No se hacía una distinción entre la solución específica de cada modelo y el concepto general de equilibrio. La práctica actual, en cambio, es reconocer que un mismo concepto de equilibrio se aplica a distintos modelos, como los de Cournot, Bertrand o Stackelberg. Nash (1950b) ayudó a clarificar estas confusiones.

La crítica de Bertrand (1883), sin embargo, no apuntaba a que el concepto de equilibrio fuera inválido, como sostendría Fellner (1949), sino a que la variable de elección estratégica era incorrecta: para Bertrand lo apropiado era tomar como dado el precio del otro productor, no la cantidad producida. Concluía que el precio caería al nivel competitivo con dos productores o más de un bien homogéneo.

Se ha escrito mucho respecto a esta cuestión. Png (1998), por ejemplo, interpreta a Bertrand como un modelo de una licitación a sobre cerrado donde no se puede cambiar el precio y el postor con el precio más bajo se lleva todo; en cambio, en el modelo de Cournot las empresas pueden ajustar el precio en función de lo que hacen los competidores, evitando así ser eliminados del mercado. Esta parece ser una interpretación apropiada. Cournot (1838) además menciona que la variable de decisión es el nivel de producción en tanto la capacidad productiva no actúe como limitante.

A pesar de las ambigüedades, el análisis estratégico se fue extendiendo. El ejemplo paradigmático es el modelo de Hotelling (1929) de competencia monopolística. Aludiendo a una observación de Sraffa sobre la división del mercado en regiones, critica la conclusión de Bertrand de que si un competidor baja el precio se queda con todo el mercado, ya que aún bienes de calidad homogénea pueden diferir en otras características, como su ubicación física, por lo que la demanda va a variar en forma continua con el precio. Sigue el método de Cournot de considerar la maximización de beneficios de cada competidor monopolístico, primero tomando como dada la ubicación de ambos competidores, luego considerándola como endógena.

Este modelo saltó a otras ciencias sociales. En un párrafo, Hotelling (1929) menciona que el modelo se puede aplicar a la competencia entre republicanos y demócratas, donde los partidos van a tener un incentivo a parecerse. Esto abrió la puerta a su aplicación a la ciencia política, ya que Downs (1957) toma el modelo espacial como una pieza central en su teoría económica de la democracia, donde los votantes tiene preferencias espaciales que se pueden representar por una función de utilidad y el punto de equilibrio es que ambos partidos converjan al votante mediano. Este es el único equilibrio de Nash. Sin embargo, Nash no es citado ni una vez por Downs (1957). Arrow, el director de tesis de Downs en Stanford, lo conocía a Nash, pero había sido alumno de Hotelling en Columbia (Düppe y Weintraub 2014). La inspiración venía de otro lado.

Respecto a si había una metodología general, Myerson (1999) reconoce que Cournot era consciente de que estaba desarrollando un método de razonamiento, ya que aplica este método no solo a n productores de un bien homogéneo en los capítulos 7 y 8, sino que dice expresamente que aplica el mismo método a un duopolio con bienes diferenciados en el capítulo 9.

La generalidad del aporte de Cournot (1838) se puede apreciar de otra manera más. El logro de Cournot es la introducción de la optimización matemática en la economía. Lo hace con las herramientas del cálculo, analizando los máximos y mínimos de funciones continuas y diferenciables. Lo hace sin anunciar que está creando algo que no tiene equivalente en la física, la teoría de los juegos.

La introducción por parte de Cournot (1838) de las funciones y el cálculo diferencial para estudiar problemas de optimización tuvo amplias consecuencias en economía, ya que se transformó en la herramienta matemática básica en los siguientes cien años. El análisis que Cournot aplica en el marco de las empresas, donde traduce la idea de perseguir el interés propio de Adam Smith como la hipótesis de maximizar beneficios, va a ser extendido a partir de la revolución marginalista como el objetivo de maximizar la utilidad. Samuelson (1947: 21), por ejemplo, plantea en el capítulo 3 que la teoría de comportamiento maximizador es un método general. Dice:

El método general involucrado puede ser enunciado muy simplemente. En los casos donde los valores de equilibrio de nuestras variables pueden considerarse como la solución de un problema de extremo (máximo o mínimo), es a menudo posible determinar sin ambigüedad el comportamiento cualitativo de los valores de la solución con respecto a cambios de los parámetros, sin importar el número de variables involucradas.

Introduce este método general con el ejemplo de cómo afecta a un mercado competitivo un impuesto unitario sobre la cantidad producida, que se puede establecer a partir de la idea de que el beneficio debe ser máximo en equilibrio. Este mismo ejemplo fue analizado por Cournot (1838) en su capítulo 8 sobre competencia indefinida (lo que ahora llamamos “competencia perfecta”), donde usa las curvas de oferta y demanda para hacer el análisis de estática comparativa. Samuelson (1947: 22) luego agrega que la economía no sólo trata de problemas de maximización, aplicados al estudio de los beneficios de las empresas o la utilidad de los consumidores, sino que también se ocupa de cuestiones de estabilidad. Este tema también fue introducido en economía por Cournot (1838).

Samuelson (1947) rescata en su libro de fundamentos del análisis económico, por así decirlo, la mitad del legado de Cournot, a quien menciona al pasar sólo una vez en su libro. Deja de lado la otra mitad, el análisis estratégico. Von Neumann y Morgenstern (1944) tampoco rescatan esta otra mitad, tal vez porque rechazan las herramientas del análisis con el cálculo diferencial. Leonard (1994: 494) hace notar que en la segunda edición de 1947, von Neumann y Morgenstern critican explícitamente el exceso de énfasis en el uso del cálculo y las ecuaciones diferenciales como las principales herramientas de economía matemática, que es justamente lo que reivindica Samuelson (1947). Von Neumann se había volcado en cambio a desarrollar un nuevo método matemático para poder analizar un número discreto de estrategias puras.

Una observación final para que quede claro que se había percibido la generalidad del enfoque estratégico de Cournot. Una crítica de Hurwicz (1947) aísla perfectamente la cuestión estratégica del problema específico de duopolio, en su reseña del libro de von Neumann y Morgenstern. Empieza por criticar a Cournot (1838) porque dice que no hay una respuesta adecuada al problema de definir qué es comportamiento económico racional cuando la racionalidad de las acciones de un individuo depende del comportamiento probable de los otros individuos. Dice que Cournot ha tratado de evadir este problema al suponer que cada individuo sabe lo que los otros van a hacer: “Así, el comportamiento racional está determinado si se supone que el patrón de comportamiento de los otros se puede asumir como conocido a priori. Pero el conocimiento de los otros no puede ser conocido a priori si los otros también se van a comportar racionalmente! Por tanto se llega a un impasse lógico”. El impasse lógico del que habla Hurwicz (1947) es justamente la circularidad característica de lo que se conoce ahora como equilibrio de Nash: las respuestas óptimas de cada jugador dependen de lo que están haciendo los otros jugadores (Gibbons 1992: 183).

Independencia estratégica de las decisiones

La segunda objeción de Myerson (1999: 1072) para darle el crédito a Cournot (1838) por la idea de equilibrio de un juego no cooperativo es porque el supuesto de Cournot (1838) de que los competidores toman su decisión en forma independiente solo se hizo aceptable una vez que von Neumann (1928) desarrolló su visión sobre la independencia de las decisiones estratégicas en la forma normal, donde cada jugador elige sus estrategias con independencia de los otros jugadores.

Sin embargo, el mismo Myerson (1999) resalta que von Neumann (1928) no aplicó este principio consistentemente, ya que en juegos de más de dos jugadores supuso que los jugadores formarían coaliciones, lo que se mantiene en von Neumann y Morgenstern (1944). Lo que hizo en realidad von Neumann (1928) es otra cosa, introducir la teoría de juegos cooperativa, que luego desarrolló en el libro con Morgenstern. Por ejemplo, este análisis cooperativo lleva a esperar, en el duopolio de Cournot, que los dos propietarios se combinen para explotar al mercado, como muestran Mayberry, Nash y Shubik (1953) al comparar la solución no cooperativa de Cournot con diversas soluciones cooperativas que llevan ora a resultados colusivos, ora a resultados más eficientes. Recién Nash (1950c) distingue tajantemente entre los juegos cooperativos y no cooperativos.

Además, von Neumann y Morgenstern (1944: 13-15) critican explícitamente las teorías de duopolio y oligopolio existentes, y la idea de que a medida que aumenta el número de participantes el resultado se aproxima a la competencia perfecta, porque esto ignora la posibilidad de colusión vía la formación de carteles. Estos comentarios aluden en particular al capítulo 7 de Cournot (1838), que empieza con $n = 2$ y luego considera un n arbitrario donde cada productor toma sus decisiones independientemente, y al capítulo 8 sobre competencia indefinida donde el precio iguala en equilibrio al costo marginal.

Pero la refutación principal de que es un mero supuesto aparece en el mismo texto de Cournot (1838). No sólo supone explícitamente en la parte sobre duopolio de su capítulo 7 que “los propietarios... cada uno por su lado buscará el ingreso más grande posible” (“*des propriétaires ... chacun de son côté cherchera à rendre ce revenu le plus grand possible*”), algo resaltado en el original poniendo en cursivas el supuesto de independencia que

menciona Myerson (1999). En ese mismo pasaje, Cournot (1838) contrapone la solución cuando las decisiones son independientes a la solución colusiva, que es la que elegiría un monopolista. Por tanto, aquí hay ya una distinción entre lo que se llamarían luego soluciones no cooperativas y cooperativas.

El punto crucial es que Cournot no supone una solución en ignorancia de la otra, sino que da una fundamentación estratégica para su planteo no cooperativo. Se basa en la cuestión de lo que hoy llamaríamos “que es individualmente racional”, más allá de la conveniencia colectiva. Aunque a ambos propietarios les convenga coludir para producir menos, tienen un “beneficio momentáneo” de desviarse, lo que hace insostenible el nivel colusivo que elegiría un monopolista (Cournot 1838: 92).

Este problema se puede representar muy sencillamente como un dilema del prisionero usando la forma normal de Borel y von Neumann. Si hay dos estrategias disponibles para cada propietario, el nivel de producción colusivo y el de duopolio, la forma normal está dada por el cuadro 1. Los pagos salen de computar los beneficios para cada nivel de producción de ambos productores. Queda claro que ambos tienen el incentivo a desviarse del nivel de producción colusivo que maximiza las ganancias conjuntas.

	Colusión ($D_2=2$)	Duopolio ($D_2=2.67$)
Colusión ($D_1=2$)	8, 8	6.7, <u>8.9</u>
Duopolio ($D_1=2.67$)	<u>8.9</u> , 6.7	7.1, 7.1

Cuadro 1. Forma normal de duopolio: beneficios con dos estrategias alternativas

Cournot (1838: 92-93) menciona que si hay un entendimiento entre los productores, podrán ponerse de acuerdo en el nivel de producción monopólico, pero para eso hace falta un vínculo formal (“*lien formel*”). Por tanto, la independencia estratégica no fue un mero supuesto de Cournot. Los incentivos individuales de los jugadores los empujan a eso. Para poder actuar en forma cooperativa, la formación de un cartel debe ser legal, ya que en caso contrario no hay forma de demandar a la otra parte por un incumplimiento del contrato.

Este análisis de Cournot no es obvio incluso después de Nash (1950b) y Nash (1951). Por ejemplo, Giocoli (2003: 364-5), hablando de la recepción inicial del equilibrio de Nash, comenta que Shubik (1952) lo considera poco razonable con información completa, porque entonces los jugadores podrían jugarlo cooperativamente para maximizar los pagos conjuntos. Esto es incorrecto en este caso porque la colusión de los duopolistas requiere de acuerdos vinculantes, dado que no es algo individualmente racional. La fuerte influencia del libro de von Neumann y Morgenstern (1944) dificultó inicialmente entender a Nash. Posteriormente el mismo Shubik, por ejemplo en Shubik (1959) donde aplica teoría de juegos al estudio del oligopolio, ayuda a entender eso.

Las objeciones a Cournot: distinguiendo entre punto de equilibrio y estabilidad

El principal problema con el análisis de Cournot (1838) es que faltaba en ese momento una explicación convincente de cómo se llega al equilibrio. Leonard (1994) justamente resalta que el punto clave que hacía que el enfoque estratégico de Cournot fuera tan controvertido en economía era su análisis fuera de equilibrio.

Para Leonard (1994: 509), hablar de equilibrio Cournot-Nash involucra “correrse de ver el análisis de Cournot como dinámico, contradictorio y poco realista a verlo como estático, coherente y útil, así proveyendo el fundamento histórico para el equilibrio de Nash”. Se apoya principalmente en las críticas de Fellner (1949), para quien el comportamiento de los duopolistas a lo largo de sus curvas de respuesta óptima eran implausibles: tomar como dada la producción del otro para elegir su nivel de producción óptimo, sin anticipar que el otro a su vez va a reaccionar a eso, no es racional fuera del punto de equilibrio (Leonard 1994: 504-505). Como ese comportamiento sobre las curvas de reacción era implausiblemente miope, para Fellner el equilibrio tampoco tenía sentido, un punto de vista del que se hace eco Leonard (1994:509).

Estoy en desacuerdo con esta crítica de Fellner (1949). Confunde dos preguntas bastante distintas. Una pregunta es cuál es el punto de equilibrio. Otra pregunta, bastante más difícil, es cómo se llega al punto de equilibrio. Desde un punto de vista lógico, que sea incorrecta la respuesta a una pregunta no invalida la respuesta a la otra. Sería como bochar a un alumno porque se equivocó en una de las preguntas de un examen, sin importar si todas las demás están bien contestadas o no. Parece maniqueo.

Respecto a la pregunta de cuál es el punto de equilibrio, Cournot (1838) responde que está dado por la intersección de las funciones de respuesta óptima de cada propietario, es decir, respuestas óptimas mutuas. Lo mismo sucede para $n > 2$ en equilibrio, todos los propietarios tienen que estar en su punto óptimo.

Respecto a cómo se llega al punto de equilibrio, esta pregunta es bastante más difícil. Es algo que aún no sabemos responder del todo bien. No sólo Cournot (1838) arriesgó una explicación sobre esto. En su tesis de doctorado, Nash (1950c: 21-24) da dos explicaciones revolucionarias sobre cómo se motiva e interpreta el punto de equilibrio, una interpretación adaptativa y otra racionalista. Ninguna de estas dos interpretaciones apareció en Nash (1951), la versión publicada de sus tesis. Haya sido por decisión propia o por sugerencia de los editores, esa omisión tal vez se debió a que era la parte más polémica de su tesis. Ahora pasamos a estas interpretaciones, que pueden verse como el último aporte fundamental de Nash.

Resolviendo las objeciones a Cournot: la interpretación racionalista de Nash sobre cómo se llega al punto de equilibrio

Había un problema básico sin resolver, qué interpretación darle al punto de equilibrio. Esto también explica lo que Giocoli (2003) describe como la fría recepción inicial a la idea de equilibrio de Nash. Giocoli (2003: 364) comenta que Hurwicz (1953) rechaza al equilibrio de Nash tanto desde un punto de vista descriptivo acerca de lo que la gente efectivamente hace como desde uno prescriptivo sobre lo que debería hacer.

Para Hurwicz (1953), bajo una situación de incertidumbre sobre lo que el otro va a hacer, hay que seguir una estrategia como la de minimizar las pérdidas de von Neumann y Morgenstern (1944), o alguna otra variante parecida, aunque no sea un equilibrio. Hurwicz (1953: 402) considera que jugar la estrategia prescrita por un equilibrio Nash puede ser demasiado peligroso si el otro jugador hace otra cosa.

Es llamativo que Hurwicz (1953:403) rescata el uso del equilibrio de Nash para un caso especial, el de una economía competitiva, ya que ahí considera que es válido tomar como dado lo que hacen los otros agentes. Tal vez eso explique por qué el primer impacto importante que tuvo Nash fue por su uso de teoremas de punto fijo para demostrar la existencia de un punto de equilibrio. En sus artículos publicados en 1954, esta idea fue tomada tanto por Arrow y Debreu como por McKenzie para demostrar la existencia de equilibrio en una economía competitiva (ver Dütte y Weintraub 2014). Desde ya, los equilibrios competitivos son equilibrios de Nash.

Sin embargo, Nash (1950c) encontró dos fundamentaciones consistentes de cómo se llega al equilibrio, algo que Cournot no había ofrecido por lo que llevó a interminables debates. Como no fueron publicadas en Nash (1951), se difundieron más lentamente y Hurwicz (1953) probablemente no las conocía en ese momento.

La segunda de las dos interpretaciones que Nash (1950c) ofrece de su punto de equilibrio, la explicación racionalista, es totalmente original. Plantea que es aplicable a juegos que se juegan una sola vez. Se va a preguntar qué es una predicción racional respecto al comportamiento de jugadores racionales. Dice que una predicción racional debe ser única, que los jugadores deben poder deducirla y que tal conocimiento sobre qué esperar de lo que los otros van a hacer lo deben llevar a no actuar en disconformidad con la predicción.

En esta interpretación se necesita asumir que los jugadores conocen la estructura completa del juego para poder deducir la predicción. Por eso, Nash (1950c) llamó a su segunda interpretación “racionalista y altamente idealizante”. Como en la segunda interpretación de Nash (1950c) los jugadores usan la estructura del juego para hacer la predicción, se trata de expectativas racionales. De hecho, en su primer artículo publicado sobre negociación bilateral plantea, en el contexto de un juego cooperativo, que sus supuestos llevan a una solución única que determina la “expectativa racional de ganancias de los dos negociadores” (Nash 1950a: 158). Esta segunda interpretación de Nash (1950c) va a facilitar eventualmente la aceptación del concepto de equilibrio.

Si bien no fue publicada en Nash (1951), esta interpretación era conocida en el medio matemático, además de que un argumento similar había aparecido en Nash (1950a). Leonard (1994: 503) menciona que, a pesar de muchas otras críticas, en el clásico libro de teoría de juegos de Luce y Raiffa (1957) ellos rescatan la propiedad de que “el conocimiento de la teoría no nos lleva a hacer una elección diferente que la que dicta la teoría”, considerando que éste es un argumento muy fuerte para un punto de equilibrio.

Una de las objeciones iniciales más fuertes al equilibrio de Nash es que puede no haber un equilibrio único, por lo que no queda claro qué hacer para un jugador racional. Ryan (2002) resalta cómo Luce y Raiffa (1957: 104) consideran que el equilibrio de Nash no es suficiente para una teoría unificada de los juegos no cooperativos que no son de suma cero, en contra de la percepción actual de que es el concepto de solución básico para resolver juegos. La explicación para Ryan (2002: 129) es que muchos juegos de suma no nula tienen múltiples equilibrios donde las estrategias típicamente no son intercambiables, por lo que no hay una manera clara de recomendar cómo jugar el juego. Por tanto, Luce y Raiffa (1957) rechazan el equilibrio de Nash como un criterio normativo de cómo jugar un juego.

Pero si hay equilibrios múltiples, Nash (1950c) ya sugiere que razones heurísticas pueden llevar a alguno de ellos. Esto anticipa la idea de puntos focales desarrollada por Schelling

(1960) para seleccionar entre equilibrios de Nash, donde los mismos jugadores se coordinan en forma tácita basados en lo que perciben como puntos focales. Además de la idea de selección de equilibrios desarrollada a partir de Schelling (1960), el problema de multiplicidad de equilibrios llevó a los refinamientos del equilibrio de Nash desarrollados a partir de Selten (1975), donde se imponen requerimientos adicionales a los puntos de equilibrio. Estas investigaciones son un proceso en curso.

La interpretación adaptativa de Nash sobre cómo se llega al punto de equilibrio y los mecanismos de Cournot

La primera interpretación de Nash (1950c) se basa en la acción de masa (*mass action interpretation*) en juegos repetidos, donde el punto de equilibrio surge de la acción de participantes que no conocen la estructura del juego ni tienen la habilidad o inclinación para dedicarse a un proceso de razonamiento complejo. Lo que hacen es acumular información empírica de las ventajas relativas de cada estrategia. Agrega que esta interpretación puede darse incluso con un pequeño número de participantes, en tanto no sean conscientes de su interdependencia.

Esta interpretación capta la esencia de las dinámicas de ajuste con agentes acotadamente racionales de la teoría de juegos evolutiva. Weibull (1996) formaliza ésta. Nakayama (2006) agrega que la misma prueba de existencia de equilibrio usando el teorema de Brouwer en Nash (1950c) es reminiscente de la dinámica de réplica (*replicator dynamics*) de la teoría de juegos evolutiva, ya que aumenta la probabilidad de las estrategias puras que dan un pago mayor que la estrategia mixta en uso por el jugador. Las dinámicas de réplica se estudian en biología desde la década del 70 para determinar qué estrategias son evolutivamente estables. Como las estrategias evolutivamente estables son puntos fijos, son equilibrios de Nash.

Esta primera interpretación fue ignorada por completo en la década del 50. Giocoli (2003: 364-5), hablando de la recepción inicial del equilibrio de Nash, comenta que Shubik (1952) lo considera lógico pero no muy relevante, agregando que es imposible con información incompleta sobre la estructura del juego (ya vimos antes, al discutir la independencia estratégica, que con información completa lo consideró poco razonable). Si bien eso es correcto para el caso de la interpretación racionalista de Nash, no se aplica a la interpretación adaptativa basada en la acción en masa (tampoco se aplica a la dinámica de mejor respuesta de Cournot). Aunque no salió publicada en Nash (1951), Giocoli (2003) comenta que Shubik naturalmente tendría que haber conocido esa interpretación por ser compañero de Nash en Princeton. La teoría de juegos evolutiva tendría que esperar unos años más en desarrollarse.

Estas dos interpretaciones de Nash permiten resolver la perplejidad y las críticas generadas por la dinámica de ajuste de Cournot (1838) en su análisis de estabilidad del duopolio en el capítulo 7. Cuando su obra se traduce al inglés en 1897, Fisher (1898) hace una reseña muy positiva, pero señala que la solución de oligopolio de Cournot simplifica demasiado la compleja cuestión dinámica de cómo se forman las expectativas de los rivales por lo que han generado numerosas críticas. Estas críticas siguieron siendo un tema recurrente en los siguientes cincuenta años. La dinámica original que usó Cournot se puede representar como sigue, donde cada productor reacciona a la producción óptima del otro productor en el período anterior:

$$D_{i,t} = R_i(D_{-i,t-1})$$

Más allá de lo discutible que sea su mecanismo para este caso específico, la dinámica de Cournot (1838) para alcanzar el punto de equilibrio anticipa la dinámica de respuesta óptima (*best-response dynamics*) que apareció durante la década del 90 en la teoría de juegos evolutiva (Gardner 1995: 225-229). Si bien supone una conducta miope, dado que cada jugador juega la mejor respuesta a lo que hicieron los otros en el período previo, es una estrategia de aprendizaje más rápida que las dinámicas de réplica.

El problema es que Cournot supone que los jugadores conocen la estructura del juego, es decir, conocen la curva de reacción del otro jugador. La pregunta natural que surgió entre los lectores es por qué entonces los agentes económicos no eran más sofisticados en sus reacciones. La respuesta racionalista que Nash (1950c) propone permite una respuesta contundente: si los agentes son racionales, pueden resolver el modelo y saltar directamente al punto de equilibrio, que determina la expectativa o predicción racional. Esta interpretación racionalista tuvo inmenso impacto en la economía en estos últimos cincuenta años, se lo haya mencionado a Nash o no.

Por otro lado, Cournot (1838) presenta otro mecanismo de ajuste en el capítulo 4, cuando introduce la curva de demanda que supone que los agentes económicos no conocen la estructura del juego, que ha sido ignorado en la literatura. Cournot plantea que la curva de demanda es imposible de conocer empíricamente, por lo que no se puede calcular explícitamente el punto óptimo donde se maximizan los ingresos, que es el punto que elige un monopolista que no enfrenta costos de producción en la ecuación (1) en el capítulo 5. Cournot agrega que es posible descubrir el óptimo de otra manera, por un proceso de prueba y error, subiendo el precio si la demanda es inelástica y bajándolo si es elástica, ya que el máximo está en el punto en que la elasticidad es unitaria. Este es justamente la primera interpretación del equilibrio de Nash (1950c), donde los jugadores no conocen la estructura del juego.

Si no se conoce la curva de demanda, lo lógico es que tampoco se puedan calcular las funciones de respuesta óptima de los duopolistas, ya que éstas requieren conocer no sólo la curva de demanda de mercado sino los costos de todos los productores. Una lógica de prueba y error similar al capítulo 4 puede sin embargo llevar al equilibrio. Cournot (1838) muestra en el capítulo 7, ecuaciones (1) y (2), que el óptimo para $n=2$ está en el punto donde la elasticidad de demanda que percibe cada propietario es uno, y la misma regla vale para $n \geq 3$. Por tanto, se puede aplicar directamente el mecanismo adaptativo del capítulo 4 para llegar al equilibrio de mercado (a diferencia de la elasticidad de demanda de cada propietario, en equilibrio la elasticidad de demanda de mercado es de $1/n$, para $n \geq 1$).

En resumen, aunque tanto Cournot (1838), capítulo 4, como Nash (1950c) discuten dinámicas adaptativas como parte del problema de llegar al equilibrio, Cournot (1838) usó un caso híbrido en el capítulo 7 donde los duopolistas conocen el modelo pero lo resuelven incorrectamente. Al separar tajantemente entre las explicaciones racionalistas y adaptativas, Nash (1950c) ofreció dos explicaciones consistentes de cómo llegar al punto de equilibrio. La explicación adaptativa trascendió recién mucho después. La explicación racionalista, por su parte, facilitó enormemente la aceptación del punto de equilibrio por la profesión.

Palabras finales

Al principio la perspectiva de Nash sobre juegos no cooperativos no tuvo mucha repercusión. La perspectiva actual es muy diferente. Myerson (1999) señala que la teoría de juegos no cooperativos de Nash dio el marco general para analizar, desde el enfoque de decisores racionales, los problemas sociales más allá de la esfera de los mercados.

Myerson (1999) detalla tres extensiones cruciales que Nash (1950c) hace al análisis de Cournot (1838). Primero, en vez de mirar un juego concreto, analiza la forma normal de un juego donde sólo se detallan las estrategias alternativas de cada jugador, lo que posibilitó evitar las discusiones bizantinas sobre si el modelo específico propuesto era el apropiado para el caso concreto en discusión. Segundo, Nash considera tanto estrategias puras como mixtas. Tercero, en vez de pagos monetarios como en Cournot (1838), o von Neumann y Morgenstern (1944) y ediciones posteriores, Nash usa la utilidad esperada. Aunque este último punto es lo que posibilita que la teoría de juegos pueda ser la base del análisis de todas las ciencias sociales, esto de hecho ya había asomado con la aplicación espacial de Hotelling (1929) desarrollado por Downs (1957), algo hecho con independencia del análisis de Nash.

Para mí el concepto de equilibrio ya está esencialmente en Cournot. Cournot (1838) plantea claramente las condiciones para un equilibrio, a saber, que sea un punto estable del que ningún jugador se quiere desviar. Esa es la quintaesencia del punto de equilibrio de Nash y es lo que justifica, a mi entender, que se lo llame “equilibrio de Cournot-Nash”. El análisis estratégico de Cournot es parte de un método general de aplicar el cálculo de máximos y mínimos a la economía para estudiar la optimización, que abarca desde un decisor único (el monopolista) hasta un decisor sin peso que no tiene que tomar en cuenta las reacciones de los demás jugadores (en un mercado de competencia perfecta), pasando por los casos intermedios de interacción estratégica entre pocos jugadores.

Para mí, un aporte fundamental de Nash (1950c) que no ha sido resaltado claramente es que finalmente consigue resolver las objeciones a la dinámica de juego adaptativo del duopolio de Cournot (1838), que llevaron a interminables discusiones aún en vísperas de la contribución de Nash (ver Leonard 1995). Recién Nash (1950c), con su original interpretación racionalista donde los jugadores usan la estructura del juego para predecir el equilibrio, logró fundamentar el equilibrio de una manera convincente. Introdujo, en suma, la idea de expectativas racionales en ciencias sociales.

Nash (1950c) además ofreció una interpretación adaptativa, que tiene antecedentes en Cournot (1838). Este fue el camino que luego siguió la teoría de juegos evolutiva, empezando por el campo de la biología, por lo que ha tenido ramificaciones amplísimas.

Después de trabajar en escribir esta nota, me convencí de que Nash no fue sólo un gran matemático. Sus intuiciones económicas son de tal profundidad que permitieron resolver disputas que daban vuelta en la profesión hacía cien años. Es sin duda uno de los economistas excepcionales del siglo XX.

Nash se había transformado en un mito viviente, mitad fantasma, mitad presencia real. Con él se fue el último de los padres fundadores de la teoría de juegos, es decir, de la matemática de las ciencias sociales. Su mujer Alicia, a su modo, fue también extraordinaria. Va mi tributo y sentida despedida a ambos.

Referencias

- Aumann, Robert (1985). [What is game theory trying to accomplish?](#) En Arrow y Honkapohja, editors, *Frontiers in economics*. Oxford, Basil Blackwell.
- Bertrand, Joseph (1883). [Théorie mathématique de la richesse sociale](#). *Journal des Savants* 67: 499-508.
- Borel, Emile (1921). La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences* 173: 1304-8
- Carlsson, H., & van Damme, E. E. C. (1991) [Equilibrium selection in stag hunt games](#). (Center Discussion Paper; Vol. 1991-70).
- Cournot, Augustin (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Paris, Hachette. Traducida en 1897 al inglés como [Researches into the mathematical principles of the theory of wealth](#) por Nathaniel T. Bacon. New York, Macmillan.
- Düppe, Till, y E. Roy Weintraub (2014), *Finding equilibrium: Arrow, Debreu, McKenzie and the problem of scientific credit*, Princeton, NJ, Princeton University Press.
- Fellner, Wiliam (1949), *Competition among the few*. New York, A. Knopf.
- Gardner, Roy (1995), *Games for business and economics*. New York, John Wiley & Sons.
- Giocoli, Nicola (2003). *Modeling rational agents. From interwar economics to early modern game theory*. Cheltenham, Edgar Elgar.
- Gibbons, Robert (1992) [Game theory for applied economists](#). Princeton, NJ, Princeton University Press.
- Hotelling, Harold (1929). [Stability in competition](#). *Economic Journal* 39: 41-57
- Hurwicz, Leonid (1945). [The theory of economic behavior](#). *American Economic Review* 35: 909-25.
- Hurwicz, Leonid (1953). What has happened to the theory of games. *American Economic Review* 43: 398-405.
- Kuhn, Harold (1996). En: [The work of John Nash in game theory](#). Nobel seminar, December 8, 1994. *Journal of Economic Theory* 69: 153-185.
- Leonard, Robert J. (1994). Reading Cournot, reading Nash: The creation and stabilisation of the Nash equilibrium. *Economic Journal* 104: 492-511.
- Leonard, Robert J. (1995), [From Parlor Games to Social Science: Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory 1928-1944](#), *Journal of Economic Literature*, Vol. 33, No. 2 (Jun., 1995), pp. 730-761.
- Luce, R. Duncan, y Howard Raiffa (1957). *Games and decisions: introduction and critical survey*. Wiley, New York.
- Mayberry, John P., John F. Nash y Martin Shubik (1953). A comparison of treatments of a duopoly situation. *Econometrica* 21:141-154.

- Myerson, Roger B. (1999). [Nash equilibrium and the history of economic theory](#), Journal of Economic Literature 37: 1067-1082.
- Nakayama, Mikio (2006). The dawn of modern theory of games, Advances in mathematical economics 9: 73-97.
- Nasar, Sylvia (1994). [The lost years of a Nobel laureate](#), New York Times, 13 de noviembre.
- Nash, John F. (1950). [The bargaining problem](#) Econometrica 18: 155–162.
- Nash, John F. (1950b). [Equilibrium points in n-person games](#). Proceedings of the National Academy of Sciences 36: 48–49.
- Nash, John F. (1950c), [Non-cooperative games. Tesis de doctorado](#). Departamento de Matemáticas, Princeton University.
- Nash, John F. (1951), [Non-cooperative games](#). Annals of Mathematics 54: 286 - 295.
- Nash, John F. (1953) [Two-person cooperative games](#). Econometrica 21: 128 - 140.
- Png, Ivan (1998) Managerial economics, Malden, MA: Blackwell.
- Von Neumann, John (1928) Zur theorie der gesellschaftsspiele. Mathematische Annalen 100: 295–300.
- Von Neumann, John, y Oskar Morgenstern (1944) [Theory of games and economic behavior](#). Third edition, Princeton, NJ, Princeton University Press.
- Ryan, Matthew J. (2002) [Mathematicians as Great Economists: John Forbes Nash, Jr](#), Agenda, Volume 9, Number 2, 2002, pages 121-134.
- Samuelson, Paul A. (1947) Foundations of economic analysis Cambridge, Harvard University Press.
- Schelling, Thomas (1960) [The strategy of conflict](#). Cambridge, MA, Harvard University Press.
- Selten, Reinhard (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. International Journal of Game Theory 4: 25-55.
- Shubik, Martin (1952) Information, theories of competition, and the theory of games, Journal of Political Economy 60: 145-150.
- Shubik, Martin (1959) Strategy and market structure: Competition, oligopoly, and the theory of games. New York, John Wiley & Sons.
- Shubik, Martin (1989). Cournot, Antoine Augustin. En J. Eatwell, M. Milgate y P. Newman, editores, The New Palgrave: A dictionary of economics. London, Macmillan.
- Weibull, Jörgen (1996) [The mass action interpretation](#). En: The work of John Nash in game theory. Nobel seminar, December 8, 1994. Journal of Economic Theory 69: 153-185.
- Weibull, Jörgen (1996) [Evolutionary Game Theory](#), The MIT Press.