Preferencias y Utilidad

Usaremos en estas clases 1) los Capítulos I, III, IV y V de mi Tratado de Microeconomía, 2009; 2) Los Capítulos 1 y 2 de Robert S. Pindyck y Daniel L. Rubinfeld, Microeconomía, Séptima Edición, Madrid, 2009; y 3) Geoffrey A. Jehle and Philip J. Reny, Advanced Microeconomic Theory (3rd edition), 2011.

Esta presentación, como se verá, es una presentación más formal que la realizada en el capítulo anterior. Sugiero que no avancen con este capítulo si no manejan bien los conceptos del capítulo precedente. Seguiremos una estrategia similar al abordar la teoría de la oferta.

1. *Conceptos generales de teoría del Consumo*

Hay cuatro componentes básicos de cualquier modelo de elección del consumidor. Son el conjunto de consumo, el conjunto factible, la relación de preferencia, y el supuesto de de comportamiento. Cada uno es conceptualmente distinto de los demás, aunque es bastante común a veces perder de vista ese hecho. Aunque tendemos a concentrarnos aquí en formalizaciones específicas que han llegado a dominar los economistas en vista del comportamiento de un consumidor individual, es bueno tener en cuenta que "la teoría del consumidor” de por sí es, de hecho, una teoría muy rica y flexible de la elección.

La noción de un *conjunto de consumo* es sencilla. Sea el conjunto de consumo, X, que representa el conjunto de todas las alternativas, o planes de consumo completos, que el consumidor puede concebir - sean alcanzables en la práctica o no. Lo que pretendemos capturar aquí es el universo de opciones alternativas sobre las que la mente del consumidor es capaz de deambular, sin restricciones por la consideración de las realidades de su situación actual. El conjunto de consumo a veces también es llamado el conjunto de elección.

Supóngase que cada producto se mide en unidades infinitamente divisibles. Sea x el número de unidades del bien i. Suponemos que sólo las unidades no negativas de cada bien son significativas y que siempre es posible concebir que no hay unidades de algún producto en particular. Además, suponemos que hay un número finito n, fijo, pero arbitrario de diferentes mercancías. Sea $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots, x_n)$ sea un vector que contiene diferentes cantidades de cada uno de los n bienes y llamemos $\boldsymbol{x}$ a esta *cesta o canasta de consumo* o *plan de consumo*. De aquí en más, a las entidades que sean vectores las indicaremos en **negrita**. Una cesta de consumo se representa por tanto como un punto $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_{n+}$. Simplificando, en general se dirá que el conjunto de consumo es todo el ortante no negativo, X= $\boldsymbol{R}_{n+}$. En este caso, es fácil ver que se cumplen las propiedades siguientes:

Supuesto 1 Los requerimientos mínimos del conjunto de consumo X son:

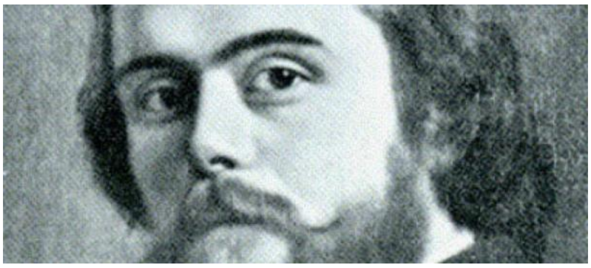
- X$\subseteq \boldsymbol{R}_{n+}$ *Esto implica que el conjunto de consumo está contenido o es idéntico al ortante no negativo*
- X es cerrado
- X es convexo
- $\mathbf{0} \in$ X.

La noción de un *conjunto factible* es también muy sencilla. Representamos mediante B a todos los planes de consumo alternativos imaginables y que son posibles dadas las circunstancias del consumidor. Aquí pretendemos capturar precisamente aquellas alternativas que se pueden lograr, dadas las realidades económicas que enfrenta el consumidor. Este conjunto factible es un subconjunto del conjunto X que queda una vez que se toman en cuenta las restricciones de acceso a los bienes que están determinadas por las realidades prácticas, institucionales o económicas del mundo. Por ahora, se supone $B \subset X$.

Una *relación de preferencia* normalmente especifica los límites, en su caso, en la capacidad del consumidor, en situaciones de elección, de percibir la consistencia o inconsistencia en su elección, y la información sobre los gustos de los consumidores de los diferentes objetos de elección. La relación de preferencia juega un papel crucial en cualquier teoría de la elección. Su forma especial en la teoría del comportamiento del consumidor es lo suficientemente sutil como para justificar un examen especial en la siguiente sección.

Llegados a este punto, vale la pena tomar en cuenta que adoptamos como definición de economía la siguiente. *La economía es el estudio de la elección bajo condiciones de escasez*, es decir el estudio de la elección con restricciones. Por consiguiente, consiste en el estudio de cómo los individuos y las sociedades deciden emplear sus recursos escasos que podrían tener usos alternativos, a fin de producir productos y servicios, y los distribuyen, ya sea en el presente o en el futuro, entre distintos individuos y grupos de la sociedad.

Definimos *escasez como la insuficiencia de los medios disponibles* para satisfacer distintos fines, siendo que *los medios tienen la capacidad de ser utilizados con fines alternativos*. Ello da origen al *problema económico*, que puede ser caracterizado como el *empleo racional de los medios*. Conduce a la actividad de *cálculo económico o planeamiento*. Tomaremos como sinónimos a las expresiones *ciencia económica, teoría económica y análisis económico*.



Léon Walras (1834-1910)
Fundador de la Escuela de Lausanne

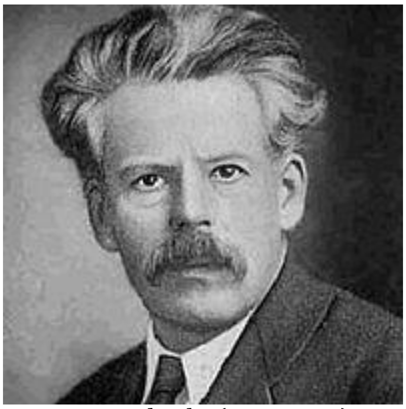
Por último, el modelo se 'cierra' especificando algún *supuesto de comportamiento*. Esto expresa el principio rector que utiliza el consumidor para tomar decisiones finales y así se identifican los objetivos finales de la elección. Se supone que *el consumidor busca identificar y seleccionar una alternativa disponible que sea la más preferida a la luz de sus gustos personales*.

2. *Preferencias y Utilidad*

En épocas anteriores, la llamada 'ley de la demanda' fue elaborada usando algunos supuestos muy fuertes. En la teoría clásica de Edgeworth, Mill y otros defensores de la escuela de filosofía utilitarista, se pensaba que la "utilidad" debía ser algo sustancial. "Placer" y "dolor" eran considerados como entidades bien definidas que podían ser medidas y comparadas entre los individuos. Además, el "principio de la utilidad marginal decreciente" era aceptado como "ley" psicológica, y los primeros enunciados de la ley de la demanda dependían de ello. Estos son supuestos terriblemente

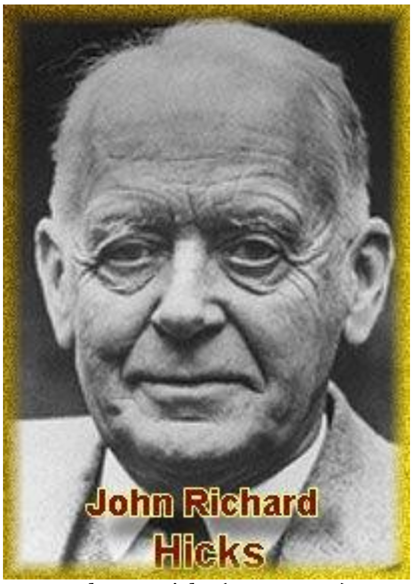
Vilfredo Pareto (1848-1923)
Sucesor de Walras en la cátedra de Economía Política en Lausanne

fuertes sobre el funcionamiento interno de los seres humanos.



Eugen Slutsky (1880-1948)

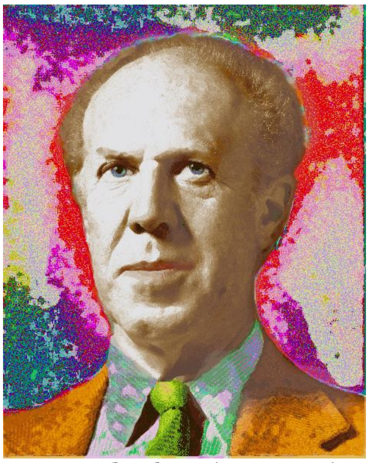
La historia más reciente de la teoría del consumidor ha estado marcada por una campaña para lograr que sus cimientos fueran lo más generales posibles. Los economistas han tratado de recortar muchos de los supuestos tradicionales, explícitos o implícitos, tantos como se pudiera, conservando aún una teoría coherente con poder predictivo. Pareto puede ser acreditado con la sospecha de que la idea de una "utilidad" medible no es esencial para la teoría de la demanda.[1] Slutsky llevó a cabo el primer examen sistemático de la teoría de la demanda sin el concepto de una sustancia medible llamada utilidad.[2] Hicks demostró que el principio de la utilidad marginal decreciente no era ni necesario ni suficiente para la vigencia de ley de la demanda.[3] Por último, Gerard Debreu completó la reducción de la teoría estándar del consumidor a los aspectos básicos esenciales que vamos a considerar aquí.[4] La teoría actual tiene relaciones estrechas e importantes con sus antecesoras, pero es más ligera, precisa y general.



John R. Hicks (1904-1989)

3. Relaciones de Preferencia

Las preferencias del consumidor se caracterizan axiomáticamente. En este método de modelación se exponen supuestos tan significativos y diferentes como sea posible a fin de caracterizar la estructura y propiedades de las preferencias. El resto de la teoría se construye entonces lógicamente a partir de estos axiomas, y las predicciones de comportamiento son desarrolladas a través de un proceso deductivo. Por supuesto, el trabajo no termina aquí, ya que habitualmente el economista (generalmente, alguien formado en estadística y econometría) debe proceder a *docimar* las predicciones realizadas, para descartar las hipótesis incompatibles con la realidad histórica o experimental.



Gerard Debreu (1921-2004)

Estos *axiomas de elección* de los consumidores tienen la intención de proporcionar una expresión matemática formal a los aspectos fundamentales del comportamiento

[1] V. Pareto, *Cours d'économie politique* (1896), tomo I, distingue entre *utilité* y *ophélimité* (del griego ὠφέλιμος). "la ofelimidad, o su índice, para dos individuos son cantidades heterogéneas. No podemos, ni sumarlas ni compararlas; *no bridge*, como dicen los ingleses. No existe una suma de ofelimidad de la que disfrutan individuos diferentes; esa es una expresión que carece de sentido".

[2] E. Slutsky, (1915). *Sulla teoria del bilancio del consumatore*.

[3] J.R. Hicks (1939, 1946). *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*.

[4] G. Debreu, *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, 1959.

del consumidor y actitudes hacia los objetos de elección. Juntos, formalizan la opinión de que el consumidor puede elegir y que las elecciones son consistentes de un modo particular.

Formalmente, representamos las preferencias del consumidor por una relación binaria, $\succsim$ definida en el conjunto de consumo, X. Si $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$, decimos que la cesta $\boldsymbol{x}^1$ *es al menos tan buena como* $\boldsymbol{x}^2$, para este consumidor. Noten que cada cesta se compone de cantidades de bienes y servicios que escribiremos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$. Distinguiremos así entre el *supra índice* de la canasta y el *sub índice* del bien o servicio.

El hecho de que estemos usando una relación binaria para caracterizar a las preferencias es significativo. Trasmite el punto importante que, desde el principio, nuestra teoría requiere relativamente poco del consumidor que describe. Solamente requiere que los consumidores hagan comparaciones binarias, es decir, que sólo se examinen dos planes de consumo a la vez y tomen una decisión con respecto a esos dos. Los siguientes axiomas establecen criterios básicos que esas comparaciones binarias deben cumplir.

Asno de Buridán metafórico respecto a la decisión del canal interoceánico en 1900

<u>*Axioma 1 (Exhaustividad*</u>**)** *Para todos los* $\boldsymbol{x}^1$ *y* $\boldsymbol{x}^2$ *en X, o bien* $\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^2$ *o bien* $\boldsymbol{x}^2 \succsim \boldsymbol{x}^1$.

El Axioma 1 formaliza la noción de que el consumidor puede hacer comparaciones, es decir, que tiene la capacidad de discriminar y los conocimientos necesarios para evaluar las alternativas. *Para satirizar la posición de un escolástico del siglo XIV (Jean Buridan), algunos críticos imaginaron el caso absurdo de un asno que no sabe elegir entre dos montones de heno, y que a consecuencia de ello termina muriendo de inanición. En efecto, Buridán era defensor del libre albedrío y de la posibilidad de ponderar toda decisión a través de la razón.* Este axioma implica que en microeconomía no existe tal cosa como un asno de Buridán. El ejemplo del asno que muere de hambre por indecisión parece inverosímil, pero es posible imaginar casos menos extremos y más intuitivos de la misma paradoja: piénsese en una persona que ama a dos pretendientes ¿puede amarlos a ambos con la misma fuerza y perderlos a ambos por culpa de su indecisión?

<u>*Axioma 2 (Transitividad*</u>**)** *Para tres cestas cualesquiera en X,* $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3$ *si* $\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^2$, *y* $\boldsymbol{x}^2 \succsim \boldsymbol{x}^3$, *entonces* $\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^3$.

El Axioma 2 da una forma muy particular a la exigencia de que las opciones del consumidor sean coherentes. Aunque se requiere solamente que el consumidor sea capaz de comparar dos alternativas a la vez, el supuesto de transitividad requiere que esas comparaciones por pares se vinculen entre sí de una manera consistente. A primera vista, requerir que la evaluación de alternativas sea transitiva parece simple y natural. De hecho, si no fuera así, nuestros instintos nos dirían que hay algo extraño en ellas. Sin embargo, éste es un axioma controversial. Los experimentos han demostrado que en varios casos, las opciones de los seres humanos reales no siempre son transitivas. No obstante, vamos a mantenerlo en nuestra descripción de los consumidores, aunque no sin cierta inquietud.

Por caso, Tversky y Kahneman han sostenido que la lógica de la elección no facilita un fundamento adecuado para una teoría **descriptiva** de la toma de decisiones humanas.[5]

Estás a punto de comprar un equipo de música por $ 125 y una calculadora por $ 15.

Se sabe que venden una calculadora con un descuento de $ 5 en otra tienda, a 10 minutos de distancia. ¿Hacés el viaje?

Se sabe que hacen un descuento de $ 5 por el estéreo en otra tienda, a 10 minutos de distancia. ¿Hacés el viaje?

Como ambos elementos están agotados en el negocio, tenés que ir a la otra tienda, pero como compensación se obtendrá un descuento de $ 5. ¿Importa qué elemento se descuenta?

Muchas personas responden sí a la primera pregunta, pero no a la segunda. Sin embargo, parecería que sólo los bienes involucrados y su precio total deberían importar. Si suponemos que el conjunto de elección consiste solamente de los bienes y su costo total, luego, este ejemplo sugiere que la formulación **(**o *encuadre***)** de la elección también es importante, lo que contradice el marco de la elección racional.

Veamos ahora algunas definiciones:

<u>Relación de preferencia</u> Se dice que la relación binaria $\gtrsim$ sobre el conjunto X de consumo es una relación de preferencia si satisface los Axiomas 1 y 2.

<u>Relación de preferencia estricta</u> La relación binaria $\succ$ cumple:

$\boldsymbol{x^1 \succ x^2}$ *si y sólo si* $\boldsymbol{x^1 \gtrsim x^2}$ *y* $\boldsymbol{x^2 \not\gtrsim x^1}$ *. A la relación $\succ$ se denomina la relación de preferencia estricta inducida por $\gtrsim$. La frase* $\boldsymbol{x^1 \succ x^2}$ *se lee "*$\boldsymbol{x^1}$ *es estrictamente preferida a* $\boldsymbol{x^2}$***".***

<u>Relación de indiferencia</u> La relación binaria ~ sobre el conjunto de consumo X cumple:

$\boldsymbol{x^1 \sim x^2}$ *si y sólo si* $\boldsymbol{x^1 \gtrsim x^2}$ *y* $\boldsymbol{x^2 \gtrsim x^1}$*. A esta relación ~ se la denomina la relación de indiferencia inducida por $\gtrsim$. La frase* $\boldsymbol{x^1 \sim x^2}$ *se lee "*$\boldsymbol{x^1}$ *es indiferente a* $\boldsymbol{x^2}$***".***

Usando estas dos relaciones suplementarias, podemos establecer por ejemplo lo siguiente: Para cada par de alternativas $\boldsymbol{x^1, x^2}$ *exactamente una de las tres posibilidades excluyentes siguientes es válida:* $\boldsymbol{x^1 \succ x^2}$, *o* $\boldsymbol{x^2 \succ x^1}$, *o* $\boldsymbol{x^1 \sim x^2}$.

[5] Amos Tversky and Daniel Kahnemann, [Rational Choice and the Framing of Decisions](), 1986.

<u>Descripción gráfica de las preferencias</u>

Conjuntos en X derivados de la Relación de Preferencia

Sea $\mathbf{x^o}$ *algún punto del conjunto de consumo X. Con relación a ese punto, definimos los siguientes subconjuntos de X:*

1. $\succsim(\mathbf{x^o}) \equiv \{\, x \mid x \in X,\ x \succsim x^0 \}$ *denominado el conjunto "al menos tan bueno como"*

2. $\precsim(\mathbf{x^o}) \equiv \{\, x \mid x \in X,\ x \precsim x^0 \}$ *denominado el conjunto "no mejor que"*

3. $\prec(\mathbf{x^o}) \equiv \{\, x \mid x \in X,\ x^0 \succ x \}$ *denominado el conjunto "peor que"*

4. $\succ(\mathbf{x^o}) \equiv \{\, x \mid x \in X,\ x \succ x^0 \}$ *denominado el conjunto "preferido a"*

5. $\sim(\mathbf{x^o}) \equiv \{\, x \mid x \in X,\ x \sim x^0 \}$ *denominado el conjunto de "indiferencia".*

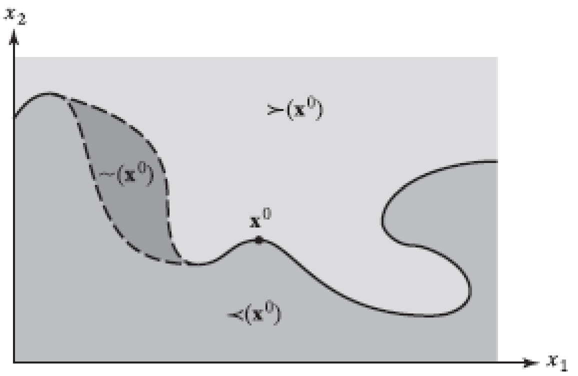


Figura 1.1

Con la hipótesis de que $X=R_{2+}$, la situación es la que corresponde a la figura 1.1. Todo punto, por ejemplo x0, representa el consumo de dos bienes, x1 (abscisas) y x2 (ordenadas). Bajo el Axioma 1, el consumidor puede comparar x0 con cualquier otro plan de consumo, y decidir si se encuentra al menos tan bien como en x0 (conjunto $\succ$(x0)) o si x0 es al menos tan bueno como los otros (conjunto $\prec$(x(0)). Dadas las definiciones con respecto a estos conjuntos, los Axiomas 1 y 2 nos dicen que el consumidor debe ubicar cada punto de X en alguno de los tres conjuntos indicados. Luego, para cada canasta x0, los tres conjuntos $\prec(\mathbf{x^o})$, $\sim(\mathbf{x^o})$ y $\succ(\mathbf{x^o})$ constituyen una *<u>partición</u>* del conjunto X.

Las preferencias en la Fig. 1.1 pueden parecer bastante extrañas. Poseen sólo la estructura más limitada, sin embargo, son totalmente coherentes con los dos primeros axiomas. Nada de lo supuesto hasta ahora prohíbe ninguna de las 'irregularidades' allí representadas, tales como las zonas 'gruesas' de indiferencia, o las 'lagunas' y 'curvas' dentro de la zona de indiferencia $\sim(\mathbf{x^o})$. Este tipo de cosas se pueden descartar únicamente imponiendo requisitos adicionales sobre las preferencias.

Consideraremos varios nuevos supuestos sobre las preferencias. Uno tiene muy poco significado de comportamiento y habla casi exclusivamente sobre los aspectos puramente matemáticos de representación de las preferencias; los otros hablan directamente de los gustos de los consumidores sobre los objetos en el conjunto de consumo. El primero es un axioma cuyo único efecto es imponer una suerte de regularidad topológica sobre las preferencias, y cuya principal contribución resultará claro un poco más tarde. A partir de ahora fijamos explícitamente $X= R_n^+$.

<u>Axioma 3 (Continuidad)</u> Para todos los $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R_n^+}$, el conjunto “al menos tan bueno como”, $\boldsymbol{\succsim(x^o)}$, y el conjunto “no mejor que”, $\precsim\boldsymbol{(x^o)}$, *son cerrados en* $\boldsymbol{R_n^+}$.[6]

El axioma de continuidad garantiza que las reversiones de preferencias repentinas no se produzcan. De hecho, el axioma de continuidad puede expresarse de manera equivalente diciendo que si cada elemento y_n de una secuencia de canastas es al menos tan buena como (no mejor que) x, e y_n converge a y, luego, y es al menos tan buena como (no mejor que) x. Téngase en cuenta que, como $\boldsymbol{\succsim(x^o)}$ y $\boldsymbol{\precsim(x^o)}$ son cerrados, también lo es $\boldsymbol{\sim(x^o)}$, ya que es la intersección de los dos primeros. En consecuencia, el Axioma 3 excluye la zona abierta en el conjunto de indiferencia $\sim(\boldsymbol{x^o})$ representado al noroeste de la Fig. 1.1.

Los supuestos adicionales sobre gustos confieren mayor estructura y regularidad a las preferencias que ustedes ya han estudiado en anteriores cursos de microeconomía. Supuestos de este tipo deben ser seleccionados por su adecuación al problema de elección particular que se analiza. Tendremos en cuenta a su vez unos supuestos clave sobre los gustos que se imponen habitualmente en la teoría del consumidor "estándar", y tratar de entender las contribuciones individuales y colectivas que hacen a la estructura de las preferencias. Dentro de cada clase de estos supuestos, se procederá desde el menos restrictivo al más restrictivo. Por lo general, emplearemos las versiones más restrictivas consideradas. En consecuencia, haremos que los axiomas con los números imprimados indiquen alternativas a la norma, que son conceptualmente similares pero ligeramente menos restrictivos que sus pares no imprimados.

Al representar las preferencias sobre los bienes de consumo ordinarios, vamos a querer expresar el punto de vista fundamental de que las "necesidades" son esencialmente *<u>ilimitadas</u>*. En un sentido muy débil, podemos expresar esto diciendo que siempre existirá algún ajuste en la composición del plan de consumo del consumidor que puede imaginar que dé lugar a un plan de consumo que prefiera. Este ajuste puede implicar la adquisición de más de algunos productos y menos de los demás, o más de todos los productos, o incluso menos de todos los productos. Mediante este supuesto, excluimos la posibilidad de que el consumidor hasta pueda imaginar tener todos sus deseos y necesidades de productos completamente satisfechos. Formalmente, enunciamos este supuesto de la siguiente manera, donde $\boldsymbol{B_\varepsilon(x^o)}$ denota la bola abierta de radio $\boldsymbol{\varepsilon}$ centrada en $\boldsymbol{x^o}$:

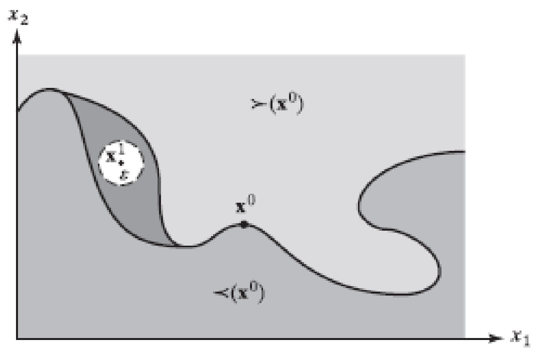


Figura 1.2 Preferencias hipotéticas que Satisfacen los Axiomas 1-2-3

*<u>Axioma 4´ (No saciedad local</u>***)**

Para todo $\boldsymbol{x^o} \in \boldsymbol{R_n^+}$ *y todo* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$*, existe algún* $\boldsymbol{x \in B_\varepsilon(x^o)} \cap \boldsymbol{R_n^+}$ *tal que* $\boldsymbol{x \succ x^o}$**.**

[6] Recuérdese que un conjunto en R_n^+ es cerrado, si su complemento es abierto en ese dominio. Luego, si $\boldsymbol{\succsim(x^o)}$ es cerrado, su complemento $\boldsymbol{\prec(x^o)}$ es abierto en R_n^+.

El Axioma 4´ nos dice que dentro de cualquier entorno de un punto x0 dado, no importa cuán pequeño que sea su radio, siempre hay al menos un punto distinto x que el consumidor prefiere a x0. Su efecto sobre la estructura de los conjuntos de indiferencia es significativo. Se descarta la posibilidad de tener "regiones de indiferencia", como la que rodea a x1 en la Fig. 1.2.

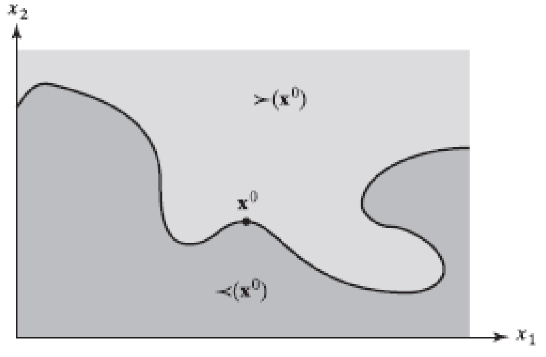


Fig. 1.3 Preferencias hipotéticas que satisfacen los Axiomas 1-2-3-4'

Para ver esto, tengan en cuenta que siempre se pueden encontrar algunos $\varepsilon>0$ y $B_\varepsilon(x_1)$, que contengan nada más que puntos indiferentes a x_1. Claro que esto viola el axioma 4'que requiere que siempre exista al menos un punto estrictamente preferido a x_1, independientemente del $\varepsilon>0$ elegido. Las preferencias representadas en la Fig. 1.3 satisfacen el Axioma 4' así como los Axiomas 1 a 3.

Es usual una visión diferente y más exigente de las necesidades y deseos. De acuerdo con este punto de vista, más es siempre mejor que menos. Mientras que la no saciedad local requiere que siempre exista una alternativa preferida cercana, no descarta la posibilidad de que la alternativa preferida pueda implicar menos de algunos o incluso de todos los productos. En concreto, no implica que dar al consumidor más de todo necesariamente haga que el consumidor esté mejor. El punto de vista alternativo toma la posición de que el consumidor siempre preferirá un plan de consumo que implique tener de más, a uno que implica tener de menos. Esto es capturado por el axioma de <u>*monotonicidad estricta*</u>. Como cuestión de notación, si la canasta $\boldsymbol{x^0}$ contiene al menos tanto de todo bien como $\boldsymbol{x^1}$, escribimos $\boldsymbol{x^0 \geq x^1}$, mientras que si $\boldsymbol{x^0}$ contiene estrictamente más de todo bien que $\boldsymbol{x^1}$ escribimos $\boldsymbol{x^0 \gg x^1}$.

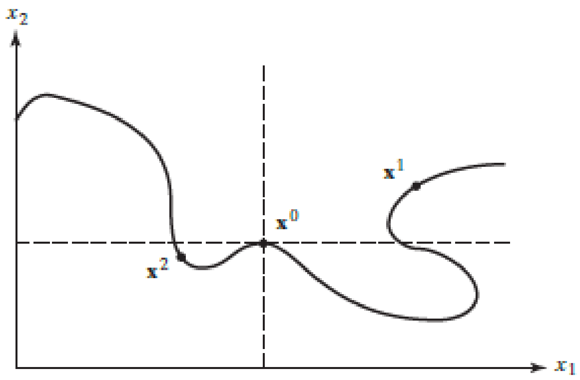


Figura 1.4 Preferencias hipotéticas que satisfacen los Axiomas 1-2-3-4'

<u>Axioma 4 (Monotonicidad estricta)</u> Para todo $\boldsymbol{x^0, x^1} \in \boldsymbol{R}_{n+}$, *si* $\boldsymbol{x^0 \geq x^1}$ *entonces* $\boldsymbol{x^0 \succsim x^1}$, *en tanto que, si* $\boldsymbol{x^0 \gg x^1}$, *entonces* $\boldsymbol{x^0 \succ x^1}$.

El Axioma 4 dice que si una canasta contiene al menos mayor cantidad de cada mercancía que otra, entonces la primera es al menos tan buena como la otra. Por otra parte, es estrictamente mejor si contiene estrictamente más de todo bien. El impacto sobre la estructura de los conjuntos de indiferencia y relacionados es más que significativo. En primer lugar, debe quedar claro que el Axioma 4 implica el Axioma 4', por lo que si las preferencias satisfacen el Axioma 4, satisfacen automáticamente el Axioma 4'. Por lo tanto, exigir que se cumpla el Axioma 4 tiene los mismos efectos sobre la estructura de los conjuntos de indiferencia y otros relacionados que implica el Axioma 4´, además de algunos otros más. En particular, el

Axioma 4 elimina la posibilidad de que los conjuntos de indiferencia se curven en forma ascendente en $\boldsymbol{R}_{2+}$, o contengan segmentos con pendiente positiva.

Para ayudar a ver esto, consideren la Figura 1.4. Con el Axioma 4, ningún punto al noreste o suroeste de $\boldsymbol{x^o}$ puede estar en el mismo conjunto de indiferencia configurado en $\boldsymbol{x^o}$. Cualquier punto al noreste, como $\boldsymbol{x^1}$, involucra a más de ambos bienes que $\boldsymbol{x^o}$. Todos estos puntos en el cuadrante noreste, por tanto, deben ser estrictamente preferidos a $\boldsymbol{x^o}$. Del mismo modo, cualquier punto en el cuadrante sur-oeste, como $\boldsymbol{x^2}$, implica menos de ambos bienes. Con el Axioma 4, $\boldsymbol{x^o}$ debe ser estrictamente preferido a $\boldsymbol{x^2}$ y a todos los demás puntos del cuadrante suroeste, por lo que ninguno de ellos puede estar en el mismo conjunto de indiferencia configurado en $\boldsymbol{x^o}$. Dado cualquier $\boldsymbol{x^o}$, puntos al noreste del conjunto de indiferencia estarán contenidos en $\boldsymbol{\succ(x^o)}$, y todos los ubicados al sur-oeste del conjunto de indiferencia estarán contenidos en $\boldsymbol{\prec(x^o)}$. En la Figura 1.5 se representan preferencias que satisfacen los Axiomas 1, 2, 3 y 4.

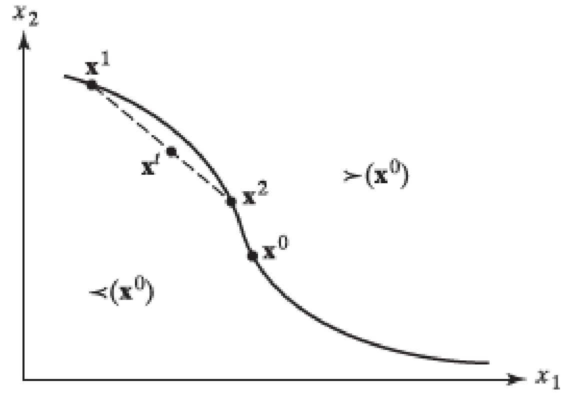


Figura 1.5 Preferencias hipotéticas que satisfacen los Axiomas 1-2-3-4

Las preferencias de la Fig. 1.5 son lo más cercano a lo que ustedes han visto en sus clases de Microeconomía I. Aún difieren, sin embargo, en un aspecto muy importante: por lo general, la región no convexa en la parte noroeste de ~ ($\boldsymbol{x^o}$) es explícitamente descartada. Esto se logra invocando un supuesto final sobre los gustos. Vamos a exponer dos versiones diferentes del axioma y luego considerar su significado y propósito.

Axioma 5' (Convexidad) Si $\boldsymbol{x^1} \succsim \boldsymbol{x^o}$ entonces $t\boldsymbol{x^1} + (1-t)\,\boldsymbol{x^o} \succsim \boldsymbol{x^o}$ *para todo* $t \in [0,1]$.

Una versión algo más fuerte de esto es la siguiente:

Axioma 5 (Convexidad estricta) Si $\boldsymbol{x^1} \neq \boldsymbol{x^o}$ *y* $\boldsymbol{x^1} \succsim \boldsymbol{x^o}$ *entonces* $t\boldsymbol{x^1} + (1-t)\,\boldsymbol{xo} \succ \boldsymbol{x^o}$ *para todo* $t \in (0,1)$.

Fíjense primero que cualquiera de los axiomas 5' o 5 - en conjunto con los axiomas 1, 2, 3 y 4 - descartará segmentos cóncavos-al-origen en los conjuntos de indiferencia, como los que están en la parte noroeste de la Fig. 1.5. Para ver esto, elegimos dos puntos distintos en el conjunto de indiferencia representado allí. Como $\boldsymbol{x^1}$ y $\boldsymbol{x^2}$ son a la vez indiferentes a $\boldsymbol{x^o}$, claramente tenemos $\boldsymbol{x^1} \gtrsim \boldsymbol{x^2}$. Las combinaciones convexas de estos dos puntos, como $\boldsymbol{x^t}$, yacerán en $\boldsymbol{\prec(x^o)}$, violando lo requerido por los Axiomas 5 o 5'.

A los efectos de la teoría del consumidor que desarrollaremos, resulta que el Axioma 5' *¡puede ser impuesto sin ninguna pérdida de generalidad!* El contenido predictivo de la teoría sería el mismo con o sin él. Aunque no vale lo mismo para el algo más fuerte Axioma 5, con éste podemos simplificar en gran medida el análisis.

Hay al menos dos formas en que podemos entender intuitivamente las implicaciones de la convexidad de los gustos del consumidor. Las preferencias representadas en la Fig. 1.6 son compatibles tanto con el Axioma 5' como con el Axioma 5. Una vez más, supongamos que elegimos $\boldsymbol{x^1} \sim \boldsymbol{x^2}$. El punto $\boldsymbol{x^1}$ representa una canasta que contiene una proporción del bien x_2 que es relativamente "extrema", en comparación con la proporción de x_2 en la otra canasta $\boldsymbol{x^2}$. La canasta $\boldsymbol{x^2}$, por el contrario, contiene una proporción del otro bien, x_1, que es relativamente extrema en comparación con la que hay en $\boldsymbol{x^1}$. Aunque cada una contiene una proporción relativamente alta de un bien comparado con el otro, el consumidor está indiferente entre las dos canastas. Ahora, cualquier combinación convexa de $\boldsymbol{x^1}$ y $\boldsymbol{x^2}$, tal como $\boldsymbol{x^t}$, será una canasta que contiene una combinación más "equilibrada" de x_1 y x_2 que cualquier canasta "extrema", ya sea $\boldsymbol{x^1}$ o $\boldsymbol{x^2}$. La idea central del Axioma 5' o del Axioma 5 es prohibir que el consumidor prefiera extremos tales en el consumo. El Axioma 5´ requiere que cualquier canasta relativamente equilibrada tal como $\boldsymbol{x^t}$ no sea peor que cualquiera de los dos extremos entre los que el consumidor es indiferente. El Axioma 5 va un poco más allá y requiere que el consumidor prefiera estrictamente dicha canasta de consumo relativamente equilibrada a ambos extremos entre los que está indiferente. En cualquier caso, se plantea un cierto "sesgo" de los gustos de los consumidores a favor de equilibrar el consumo.

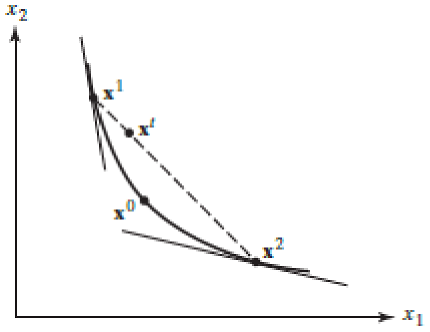


Figura 1.6 Preferencias hipotéticas que satisfacen los Axiomas 1-2-3-4-5 o 5'

Otra forma de describir las implicaciones de la convexidad de los gustos de los consumidores concentra la atención en la "curvatura" de los conjuntos de indiferencia en sí. Cuando $X=\boldsymbol{R}_{2+}$, el (valor absoluto de la) pendiente de una curva de indiferencia se llama ***tasa marginal de sustitución del bien dos por el bien uno***. Esta pendiente mide, en cualquier punto, la velocidad a la que al consumidor se encuentra dispuesto a renunciar al bien dos por unidad recibida del bien uno. Así, el consumidor resulta indiferente tras el intercambio.

Si las preferencias son estrictamente monótonas, cualquier forma de convexidad requiere que las curvas de indiferencia sean al menos débilmente convexas con respecto al origen. Esto es equivalente a exigir que la tasa marginal de sustitución no aumente al pasar de canastas como $\boldsymbol{x^1}$ hacia otras como $\boldsymbol{x^2}$. Dicho en forma aproximada, esto significa que el consumidor no está más dispuesto a renunciar a x_2 a cambio de x_1 cuando tiene relativamente poco x_2 y mucho x_1, de lo que lo está cuando tiene relativamente mucho x_2 y poco x_1.

El Axioma 5' requiere que la tasa a que al consumidor cambiaría x_2 por x_1 permaneciendo indiferente, sea constante o decreciente a medida que avanzamos desde el noroeste al sureste a lo largo de una curva de indiferencia. El Axioma 5 va un poco más allá y exige que la tasa sea estrictamente decreciente. Las preferencias en la Fig. 1.6 despliegan esta propiedad, a veces llamada ***principio de la tasa marginal de sustitución decreciente en el consumo***.

Hemos tenido cuidado en desarrollar con cierto detalle el tratamiento de Jehle y Reny. Nuestro objetivo ha sido ganar una apreciación de las consecuencias individuales y colectivas para la estructura y la representación de las preferencias del consumidor. Podemos resumir esta discusión bastante brevemente. Los axiomas sobre las preferencias del consumidor pueden ser clasificados aproximadamente de la siguiente manera. Los axiomas de exhaustividad y de transitividad describen un consumidor que puede hacer comparaciones consistentes entre alternativas. El axioma de continuidad tiene por objeto garantizar la existencia de conjuntos 'al menos tan buenos como" y “no es mejor que”, topológicamente agradables, y su propósito es principalmente matemático. Todos los otros axiomas sirven para caracterizar los gustos de los consumidores sobre los objetos de la elección. Por lo general, se requiere que los gustos muestren alguna forma de no saciedad, ya sea débil o fuerte, y algún sesgo a favor del equilibrio en el consumo, ya sea débil o fuerte.

El próximo paso es analizar a fondo el concepto de función de utilidad, luego de lo cual se planteará en su generalidad el problema del consumidor.

4. *Función de utilidad*

Representación de la Relación de Preferencia ≿ por una Función de Utilidad

Una función con valor real u: $\boldsymbol{R}_{n+} \mapsto \boldsymbol{R}$ se dice que es una *función de utilidad que representa la relación de preferencia,* si para todo $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 \in \boldsymbol{R}_{n+}$, $u(\boldsymbol{x}^0) \geq u(\boldsymbol{x}^1) \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}^0 \succsim \boldsymbol{x}^1$. Por lo tanto una función de utilidad representa una relación de preferencia de un consumidor si asigna números más altos a las canastas más preferidas.

Una pregunta que anteriormente atrajo una gran atención por parte de los teóricos se refería a las propiedades que una relación de preferencia debe tener para garantizar que se pueda representar por una función de valor real continua. La pregunta es importante porque el análisis de muchos problemas de la teoría del consumidor se simplifica enormemente si podemos trabajar con una función de utilidad, en lugar de la propia relación de preferencia.

Matemáticamente, la pregunta es sobre la existencia de una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia. Resulta que un subconjunto de los axiomas que hemos considerado hasta ahora es, precisamente, el necesario para garantizar la existencia. Se puede demostrar que cualquier relación binaria completa, transitiva, y continua se puede representar por una función de utilidad a valor real continua (*En los ejercicios, se pedirá demostrar que estos tres axiomas son necesarios para una representación*.) Estos son simplemente los axiomas que, en conjunto, requieren que el consumidor sea capaz de tomar decisiones binarias básicamente consistentes y que la relación de preferencia posea cierto grado de 'regularidad' topológica. En particular, la *representabilidad* no depende de ninguna hipótesis sobre los gustos del consumidor, como la convexidad o aún la monotonía. Por tanto, podemos resumir las preferencias por una función de utilidad continua en una muy amplia gama de problemas.[7]

Aquí vamos a echar un vistazo detallado a un resultado ligeramente menos general. Además de los tres axiomas más básicos mencionados antes, vamos a imponer el requisito adicional de que las preferencias sean estrictamente monótonas. Aunque esto no es esencial para la *representabilidad*, requerirlo simplifica de forma simultánea los aspectos puramente matemáticos del problema y aumenta el contenido intuitivo de la prueba. Nótese, sin embargo, que no se exigirá ningún tipo de convexidad.

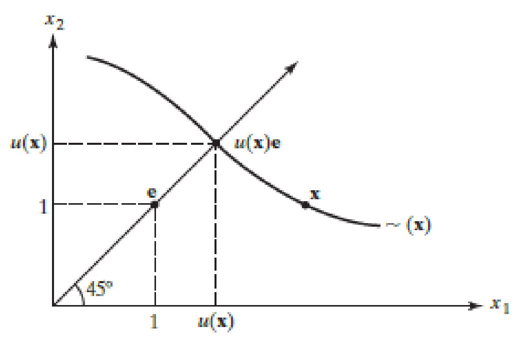


Figura 1.7 *Construcción del mapa $u(R_{n+}) \mapsto R_+$*

Teorema 1.1 (Existencia de una Función a Valor Real Representando la Relación de Preferencias) Si la relación binaria es completa, transitiva, continua, y estrictamente monótona, existe una función a valor real, u: $\boldsymbol{R}_{n+} \mapsto R$, que representa ≿.

---

[7] Gerard Debreu, *Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function*, 1954, es el paper clásico.

Fíjense cuidadosamente que éste sólo es un teorema de existencia. Simplemente afirma que bajo las condiciones establecidas, está garantizado que existe al menos una función real continua que representa la relación de preferencia. Puede haber, y de hecho siempre habrá, más de una función. El teorema en sí mismo, sin embargo, no hace ninguna declaración sobre cuántas hay, ni indica de ninguna manera la forma que cualquiera de ellas debe tomar. Por lo tanto, si podemos imaginar ***una*** función continua que represente las preferencias dadas, habremos demostrado el teorema. Ésta es la estrategia que adoptaremos a continuación.

Demostración: Supongamos que la relación es completa, transitiva, continua y estrictamente monótona. Sea $\boldsymbol{e} \equiv (1, 1, \ldots, 1) \in \boldsymbol{R}_{n+}$ un vector de unos, y consideremos el mapa $u: \boldsymbol{R}_{n+} \mapsto R$ definido de tal forma que se satisface:[8]

(P.1) $\qquad u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{x}$

¿Qué nos dice *(P.1)*? ¿Cómo funciona?

En palabras, *(P.1)* dice: tómese cualquier $\boldsymbol{x}$ en el dominio $\boldsymbol{R}_{n+}$ y asígnesele el número $u(\boldsymbol{x})$ tal que el paquete, $u(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}$, con $u(\boldsymbol{x})$ unidades de cada bien, sea rankeado como indiferente a $\boldsymbol{x}$.

Ahora bien. Pregunta 1: ¿existe siempre un número $u(\boldsymbol{x})$ que satisface *(P.1)*? Pregunta 2: ¿Puede determinarse unívocamente $u(\boldsymbol{x})$ de manera que sea una función bien definida?

Para responder a la *primera pregunta*, fijemos $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_{n+}$ y consideremos los dos subconjuntos siguientes de números reales:

$$A \equiv \{t \geq 0 \mid \boldsymbol{te} \gtrsim \boldsymbol{x}\}$$
$$B \equiv \{t \geq 0 \mid \boldsymbol{te} \lesssim \boldsymbol{x}\}$$

Fíjense que si $t^* \in A \cap B$, en tal caso $t^*\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{x}$, de modo que si hacemos $u(\boldsymbol{x}) = t^*$ se satisfaría (*P.1*). Luego, para responder afirmativamente a la primera pregunta sería suficiente asegurar que la intersección $A \cap B$ es no vacía. A esta cuestión nos vamos a dedicar ahora. Pero antes formulemos algunos ejercicios para el hogar.

---

[8] Para $t \geq 0$ el vector $\boldsymbol{te}$ será cierto punto en $\boldsymbol{R}_{n+}$ cada una de cuyas coordenadas es igual al número t, porque $t\boldsymbol{e} = t(1, .., 1) = (t, ..., t)$. Si $t = 0$, entonces $\boldsymbol{te} = (0, ..., 0)$ coincide con el origen. Si $t = 1$, entonces $\boldsymbol{te} = (1, .., 1)$ coincide con e. Si $t > 1$, el punto $\boldsymbol{te}$ se encuentra más lejos del origen que $\boldsymbol{e}$. Para $0<t<1$, el punto te se encuentra entre el origen y $\boldsymbol{e}$. Debe quedar claro que para cualquier elección de $t \geq 0$, $\boldsymbol{te}$ será un punto en $\boldsymbol{R}_{n+}$ en algún lugar del rayo desde el origen a través de $\boldsymbol{e}$, es decir, un cierto punto en la línea de 45° en la Fig. 1.7.

Ejercicios

1. Demostrar que, si se cumple el Axioma 5, el conjunto $\boldsymbol{\succsim(x^o)}$ es convexo para todo $\boldsymbol{x^o} \in X$.

2. Demostrar que si $\succsim$ es continua, los conjuntos A y B definidos en la demostración del Teorema 1.1 son subconjuntos cerrados de R.

3. Proporcionar un ejemplo (creíble) en el que las preferencias de un "consumidor ordinario" podrían fallar en satisfacer el Axioma de Convexidad.

4. Esbozar un mapa de conjuntos de indiferencia todos paralelos, mediante líneas rectas con pendiente negativa, y la dirección de preferencia en sentido noreste. Se sabe que este tipo de preferencias satisfacen los Axiomas 1, 2, 3 y 4. Demostrar que también satisfacen el Axioma 5'. Demostrar que no satisfacen el Axioma 5.

5. Esbozar un conjunto de preferencias que satisfagan los Axiomas 1, 2, 3, y 4, que tengan conjuntos de indiferencia convexos hacia el origen en algunos lugares y contengan 'segmentos lineales' en otros. Demostrar que estas preferencias son consistentes con el Axioma 5' – pero que violan el Axioma 5.

6. Demostrar que si $\succsim$ es una relación de preferencia, en tal caso la relación $\succ$ es transitiva y la relación $\sim$ también lo es. Demostrar también que, si $\boldsymbol{x^1} \sim \boldsymbol{x^2} \succsim \boldsymbol{x^3}$, en tal caso $\boldsymbol{x^1} \succsim \boldsymbol{x^3}$.

<u>*Volviendo a la demostración del Teorema 1.1*</u>

De acuerdo con el ejercicio 2 (página 14), la continuidad de $\succsim$ implica que tanto A como B sean cerrados en R_+. También, por estricta monotonía, $t \in A$ implica $t' \in A$ para todo $t' \geq t$. En consecuencia, A debe ser un intervalo cerrado de la forma $[t_-, \infty)$. Del mismo modo, la estricta monotonía y el carácter cerrado de B en R_+ implican que B debe ser un intervalo cerrado de la forma $[0, t^-]$. Ahora bien; para cualquier $t \geq 0$, la exhaustividad de $\succsim$ implica que, o bien $t\mathbf{e} \succsim \mathbf{x}$, o bien $t\mathbf{e} \precsim \mathbf{x}$, esto es $t \in A \cup B$. Pero esto significa que $R_+ = A \cup B = [0, t^-] \cup [t_-, \infty]$. Se concluye que $t_- \leq t^-$, por lo cual $A \cap B \neq \emptyset$.

Pasamos ahora a la <u>*segunda cuestión*</u>: ¿Puede determinarse unívocamente $u(\mathbf{x})$ de manera que sea una función bien definida? Debemos mostrar que *sólo hay un único número* $t \geq 0$ tal que $t\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$. Esto surge en forma sencilla de que si $t_1\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$ y $t_2\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$, por la transitividad de $\sim$ (véase el Ejercicio **6.**), $t_1\mathbf{e} \sim t_2\mathbf{e}$. Por consiguiente, por monotonicidad estricta, se concluye que $t_1 = t_2$.

Llegamos a la conclusión de que para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{n+}$, hay exactamente un número, $u(\mathbf{x})$, tal que *(P.1)* es satisfecho. Habiendo construido una función de utilidad asignando a cada paquete en X un número, se muestra a continuación que esta función de utilidad representa las preferencias.

Sean dos canastas $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$, y sus niveles asociados de utilidad $u(\mathbf{x}^1)$ y $u(\mathbf{x}^2)$, que satisfacen por definición $u(\mathbf{x}^1)\,\mathbf{e} \sim \mathbf{x}^1$ y $u(\mathbf{x}^2) \sim \mathbf{x}^2$. Se tiene entonces lo siguiente:

(P.2) $\quad \mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$

(P.3) $\quad \Longleftrightarrow u(\mathbf{x}^1)\,\mathbf{e} \sim \mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \sim u(\mathbf{x}^2)\,\mathbf{e}$

(P.4) $\quad \Longleftrightarrow u(\mathbf{x}^1)\,\mathbf{e} \succsim u(\mathbf{x}^2)\,\mathbf{e}$

(P.5) $\quad \Longleftrightarrow u(\mathbf{x}^1) \geq u(\mathbf{x}^2)$.

La propiedad *(P.2)* $\Longleftrightarrow$ *(P.3)* sigue por definición de u; la propiedad *(P.3)* $\Longleftrightarrow$ *(P.4)* surge por transitividad de $\succsim$, transitividad de $\sim$, y definición de u; y *(P.4)* $\Longleftrightarrow$ *(P.5)* sigue por la estricta monotonía de $\succsim$. En forma conjunta, *(P.2)* hasta *(P.5)* implican que *(P.2)* $\Longleftrightarrow$ *(P.5)*, con lo cual $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ si y solamente si $u(\mathbf{x}^1) \geq u(\mathbf{x}^2)$, que era lo que se buscaba probar.

Sólo queda por mostrar que la función de utilidad $u: \mathbf{R}_{n+} \mapsto R$ que representa $\succsim$ es continua. Por un conocido teorema de la topología elemental, es suficiente demostrar que la imagen inversa según u de toda bola abierta en R es abierta en $\mathbf{R}_{n+}$.[9] Como las bolas abiertas en R son meramente intervalos abiertos, es equivalente a demostrar que $u^{-1}((a, b))$ es abierto en $\mathbf{R}_{n+}$ para todo $a<b$. Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
u^{-1}((a, b)) &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{n+} \mid a < u(\mathbf{x}) < b\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{n+} \mid a\mathbf{e} \prec u(\mathbf{x})\,\mathbf{e} \prec b\mathbf{e}\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{n+} \mid a\mathbf{e} \prec \mathbf{x} \prec b\mathbf{e}\}.
\end{aligned}
$$

La primera igualdad se deduce de la definición de imagen inversa; la segunda de la monotonía de $\succsim$; y la tercera de $u(\mathbf{x})\,\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$ y del ejercicio 6. Reescribiendo el último conjunto del segundo miembro,

---

9 Una bola abierta es el conjunto de puntos que distan de otro punto (el centro), a una distancia menor a la determinada (el radio). Equivale al conjunto de puntos contenidos dentro de una superficie esférica, excluida dicha superficie. Véase <u>*wikipedia*</u>.

(P.6) $u^{-1}((a, b)) = \succ(a\,\mathbf{e}) \cap \prec(b\,\mathbf{e})$.

Por la continuidad de $\succsim$, los conjuntos $\precsim(a\,\mathbf{e})$ y $\succsim(b\,\mathbf{e})$ son cerrados en $X = \mathbf{R}^n_+$. Por consiguiente, los dos conjuntos del segundo miembro de (*P.6),* al ser los complementos de estos conjuntos cerrados, son abiertos en $\mathbf{R}^n_+$. Luego, $u^{-1}((a, b))$, por ser la intersección de dos conjuntos abiertos, es abierto en $\mathbf{R}^n_+$. ▌

El Teorema 1.1 es muy importante. Nos libera de representar las preferencias, ya sea en términos de la primitiva relación de preferencia de teoría de conjuntos o en términos de una representación numérica, una función de utilidad continua. Pero esta representación de utilidad no es única. Si alguna función u representa las preferencias de un consumidor, a continuación, también lo hará la función $v = u + 5$, o la función $v = u^3$, porque cada una de estas funciones clasifica paquetes de la misma forma que lo hace u. (Técnicamente, toda transformación monótona creciente de u también será una función de utilidad que representa esas preferencias.) ***Este es un punto importante acerca de las funciones de utilidad que debe ser comprendido****. Si todo lo que requerimos de la relación de preferencia es que disponga los paquetes en el conjunto del consumo, y si todo lo que requerimos de una función de utilidad que representa a esas preferencias es que refleje ese orden de paquetes por el orden de los números que tienen asignadas, luego cualquier otra función que asigne números a los paquetes en el mismo orden que u también representará esa relación de preferencia y será en sí tan buena como la función de utilidad u.*

Ver el tema de la representación en la perspectiva correcta de este modo, nos libera y nos frena al mismo tiempo. Si tenemos una función *u* que representa las preferencias de algunos consumidores, nos libera de transformar *u* en otras formas, tal vez más convenientes o fácilmente manipulables, siempre y cuando la transformación que elijamos preserve el orden. Al mismo tiempo, estamos restringidos por la advertencia explícita de que no tiene significado alguno adjudicar significado a los números reales asignados por una función de utilidad dada a paquetes particulares - sólo para el ordenamiento de esos números. Esta conclusión, fácil de demostrar, sin embargo, es lo suficientemente importante como para justificar lo que se demostró formalmente. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 1.2

(Invariancia de la función de utilidad ante transformaciones monótonas crecientes)

Sea $\gtrsim$ una relación de preferencia en $\boldsymbol{R}_{n+}$ y supongamos que $u(\boldsymbol{x})$ es una función de utilidad que la representa. Luego $v(\boldsymbol{x})$ también la representa si y sólo si $v(\boldsymbol{x})= f(u(\boldsymbol{x}))$ para todo $\boldsymbol{x}$, en donde f: $R \mapsto R$ es estrictamente creciente sobre el conjunto de valores tomados por u.

Por lo general, vamos a querer hacer algunas hipótesis sobre gustos para completar la descripción de las preferencias del consumidor. Naturalmente, ninguna estructura adicional que impongamos a preferencias se reflejará como una estructura adicional en la función de utilidad que los representen. De la misma manera, cada vez que se suponga que la función de utilidad tiene propiedades más allá de la continuidad, vamos a invocar, en efecto, un conjunto de supuestos adicionales sobre la relación de preferencia subyacente. Hay, pues, una equivalencia entre axiomas sobre los gustos y propiedades matemáticas específicas de la función de utilidad. Concluiremos señalando brevemente algunos de ellos. El siguiente teorema es sumamente sencillo de demostrar porque sigue fácilmente de las definiciones anteriores. Vale la pena estar convencido, sin embargo, por lo que su demostración se deja como ejercicio.

Teorema 1.3 (Propiedades de las Preferencias y Funciones de Utilidad)

Representemos a $\gtrsim$ mediante u: $\boldsymbol{R}_{n+} \mapsto R$. *Luego*

1. $u(\boldsymbol{x})$ es estrictamente creciente si y sólo si es estrictamente monótona.

2. $u(\boldsymbol{x})$ es cuasicóncava si y sólo si es convexa.

3. $u(\boldsymbol{x})$ es estrictamente cuasicóncava si y sólo si es estrictamente convexa.

Más adelante vamos a querer analizar problemas utilizando herramientas de cálculo. Hasta ahora, nos hemos concentrado en la continuidad de la función de utilidad y propiedades de la relación de preferencia que la aseguran. La diferenciabilidad, por supuesto, es un requisito más exigente que la continuidad. Intuitivamente, la continuidad requiere que no haya reversiones de preferencias repentinas. No descarta 'torceduras' u otros tipos de conducta continua, pero de mala educación. La diferenciabilidad excluye específicamente ese tipo de cosas y asegura curvas de indiferencia 'suaves', así como continuas. La diferenciabilidad de la función de utilidad por lo tanto requiere una restricción más fuerte que la continuidad de las preferencias. Al igual que el axioma de continuidad, lo que se necesita es sólo la condición matemática apropiada. No vamos a desarrollar esta condición aquí, ya que el lector puede consultar a Debreu para los detalles.[10] Para nuestros propósitos, nos contentamos simplemente suponiendo que la representación de la utilidad es diferenciable siempre que sea necesario.

Hay cierto vocabulario que se usa cuando la función de utilidad es diferenciable, por lo cual debemos aprender a hacerlo. La derivada parcial de 1º orden de $u(\boldsymbol{x})$ con respecto a x_i es llamada **la utilidad marginal del bien** *i*. En caso de dos bienes, se definió la tasa marginal de sustitución del bien 2 por el bien 1 como el valor absoluto de la pendiente de una curva de

[10] Gerard Debreu, *Smooth Preferences* (1972).

indiferencia. Se puede derivar una expresión en términos de las utilidades marginales de ambos bienes. Para eso, sea la canasta $\boldsymbol{x^1}=(x_1^1, x_2^1)$. Como la curva de indiferencia por $\boldsymbol{x^1}$ es solo una función en el plano (x_1, x_2), sea $x_2=f(x_1)$ la función que la describe. Luego, a medida que cambia x_1 la canasta $(x_1, x_2) = (x_1, f(x_1))$ traza la curva de indiferencia que pasa por el punto (x_1, x_2). Luego, para todo x_1 se tiene,

(1.1) $$u(x_1, f(x_1)) = \text{constante}$$

Ahora bien, la tasa marginal de sustitución del bien 2 por el bien 1 en la canasta $\boldsymbol{x^1}= (x_1^1, x_2^1)$ que denotaremos como $MRS_{12}(x_1^1, x_2^1)$, es el valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia que pasa por (x_1^1, x_2^1), es decir

(1.2) $$MRS_{12}(x_1^1, x_2^1) = |f'(x_1^1)| = -f'(x_1^1) \text{ (dado que } f'<0).$$

Pero tomando en cuenta *(1.1)*,

(1.3) $$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} f'(x_1) = 0$$

Ahora bien: las relaciones *(1.2)* y *(1.3)* implican:

$$MRS_{12}(\boldsymbol{x^1}) = \frac{\partial u(\boldsymbol{x^1})/\partial x_1}{\partial u(\boldsymbol{x^1})/\partial x_2}$$

Cuando $u(\boldsymbol{x})$ es continuamente diferenciable en $\boldsymbol{R}_{n++}$ y las preferencias son estrictamente monótonas, la utilidad marginal de todo bien es "casi siempre" estrictamente positiva. Es decir $\partial u(\boldsymbol{x}) / \partial x_i > 0$ para "casi todos" los paquetes $\boldsymbol{x}$, y todo $i = 1,\dots, n$.[11] Cuando las preferencias son estrictamente convexas, la tasa marginal de sustitución entre dos bienes siempre está disminuyendo estrictamente lo largo de cualquier superficie plana de la función de utilidad. Más en general, para cualquier función de utilidad cuasi cóncava, su matriz Hessiana $\mathbf{H(x)}$ de derivadas parciales de segundo orden satisfará $\mathbf{y}^T \mathbf{H(x)}\, \mathbf{y} \le 0$ para todos los vectores $\mathbf{y}$ tales que $\nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{y} = 0$. Si la desigualdad es estricta, esto nos dice que moverse de $\boldsymbol{x}$ en una dirección $\mathbf{y}$ que es tangente a la superficie de indiferencia a través de $\boldsymbol{x}$ [es decir, $\nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{y} = 0$] reduce la utilidad (es decir, $\mathbf{y}^T \mathbf{H(x)}\, \mathbf{y}<0$).[12]

[11] Explico lo de "casi siempre". Consideremos el caso de un solo bien, x, y la función de utilidad u (x) = x + sen (x). Debido a que u es estrictamente creciente, representa preferencias estrictamente monótonas. Sin embargo, aunque u´(x) sea estrictamente positiva para la mayoría de los valores de x, es cero siempre que $x = \pi + 2\pi k$, k = 0, 1, 2, ...
[12] Véase el capítulo III del Tratado de Microeconomía.

3. *Problema del consumidor*

Nos hemos detenido en cómo estructurar y representar a las preferencias, pero estos son sólo uno de los cuatro principales bloques de construcción en nuestra teoría de la elección del consumidor. En este apartado, vamos a considerar los restantes y combinarlos juntos para elaborar una descripción formal del actor central en gran parte de la teoría económica - el humilde consumidor atomista.

A nivel más abstracto, consideramos que el consumidor tiene un conjunto de consumo, $X = \mathbf{R}_{n+}$, que contiene todas las opciones imaginables de consumo. Sus inclinaciones y actitudes hacia ellas son descritas por una relación de preferencia definida en $\mathbf{R}_{n+}$. Las circunstancias del consumidor limitan las alternativas que puede alcanzar, y las recogeremos todas juntas en un conjunto factible $B \subset \mathbf{R}_{n+}$. Por último, se supone que el consumidor está motivado a elegir la alternativa viable más preferida de acuerdo con su relación de preferencia. Formalmente, el consumidor busca

(1.4) $\mathbf{x}^* \in B$, de tal forma que $\mathbf{x}^* \succsim \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in B$

Hacemos la hipótesis siguiente:

La relación de preferencia del consumidor es completa, transitiva, estrictamente monótona, continua y estrictamente convexa en $\mathbf{R}_{n+}$. *Por los teoremas 1 y 3, por tanto, puede representarse mediante una función de utilidad a valor real u, continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi-cóncava en* $\mathbf{R}_{n+}$.

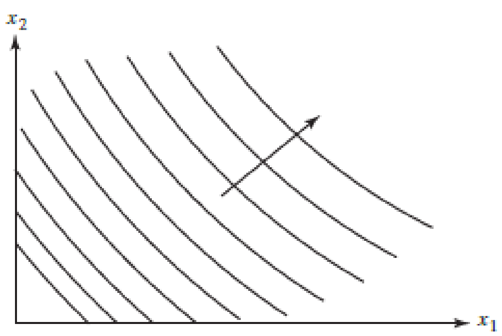


Figura 1.8

En el caso de dos bienes, preferencias como éstas pueden ser representadas con un mapa de indiferencia cuyos conjuntos de nivel no se intersecan, y son estrictamente convexos partiendo desde el origen, creciendo en dirección noreste, como se muestra en la Fig. 1.8.

A continuación, tenemos en cuenta las circunstancias de los consumidores y estructuramos el conjunto factible. Nos ocupamos de un consumidor individual que opera dentro de una economía de mercado. Por una **economía de mercado**, nos referimos a un sistema económico en el que las transacciones entre agentes se realizan mediante mercados. Hay un mercado para cada producto, y en estos mercados, un precio p_i prevalece para cada mercancía i. Se supone que los precios son estrictamente positivos, por lo que $p_i > 0$, $i = 1,..., n$. Por otra parte, se supone que el consumidor individual es una fuerza insignificante en todos los mercados. Con esto queremos decir, concretamente, que el tamaño de cada mercado en relación con las posibles compras del consumidor individual es tan grande que no importa lo mucho o lo poco que el consumidor pueda comprar, no habrá ningún efecto perceptible en

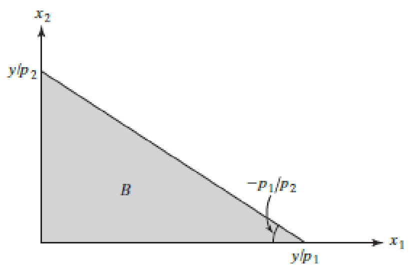


Figura 1.9 Conjunto presupuestario Walrasiano, con 2 bienes

ningún precio de mercado. Formalmente, esto significa que tomamos al vector de precios de mercado, $p \gg 0$, como fijo para el consumidor.

El consumidor está dotado de un ingreso monetario fijo $y \geq 0$. Debido a que la compra de x_i unidades del producto i al precio por unidad p_i requiere un gasto de $p_i x_i$ pesos, el requisito de que los gastos no excedan los ingresos se puede enunciar así: $\Sigma_{i=1}^{n} p_i x_i \leq y$, o, en forma más compacta, como $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \leq y$. Resumimos estos supuestos sobre el entorno económico del consumidor mediante la especificación de la siguiente estructura del conjunto factible, B, llamado *conjunto presupuestario walrasiano*:

$$B = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_{n+}, \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \leq y\}$$

que en el caso $n=2$ consiste de todas las canastas ubicadas dentro o en la frontera de la zona triangular de la Fig. 1.9.

Ahora replanteamos el problema del consumidor en términos familiares. Bajo el axioma 1.2, las preferencias pueden ser representadas por una función de utilidad estrictamente cuasicóncava y estrictamente creciente $u(x)$ sobre el conjunto de consumo $\boldsymbol{R}_{n+}$. Bajo los supuestos sobre el conjunto factible, el gasto total no debe superar los ingresos. El problema del consumo (1.4) por lo tanto se puede convertir de manera equivalente en el problema de maximizar la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria. Formalmente, el *problema de maximización de la utilidad* del consumidor se escribe

$$(1.5) \qquad \underset{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_{n+}}{\text{Máx.}}\ u(\boldsymbol{x}) \qquad \text{sujeto a } \boldsymbol{p} . \boldsymbol{x} \leq y$$

La función de utilidad $u(\boldsymbol{x})$, por los supuestos realizados sobre las preferencias, es continua. El conjunto presupuestario B es no vacío (ya que contiene a $\mathbf{0} \in \boldsymbol{R}_{n+}$), cerrado, acotado (todos los precios son estrictamente positivos), con lo cual es un conjunto compacto de $\boldsymbol{R}_{n+}$. Por el teorema del valor extremo de Weierstrass, por lo tanto, se nos asegura que existe un máximo de $u(\boldsymbol{x})$ sobre B. Además, dado que B es convexo y la función objetivo es estrictamente cuasicóncava , el maximizador de $u(\boldsymbol{x})$ sobre B es único. Debido a que las preferencias son estrictamente monótonas, la solución $\boldsymbol{x}^*$ satisface la restricción presupuestaria con igualdad, yaciendo sobre, en lugar de dentro de, la frontera del conjunto presupuestario. Luego, si $y>0$ y como $\boldsymbol{x}^* \geq 0$, pero $\boldsymbol{x} \neq 0$, sabemos que $x^*_i > 0$ para, por lo menos un bien i. Una solución típica para este problema en el caso de dos bienes se ilustra en la Fig. 1.10.

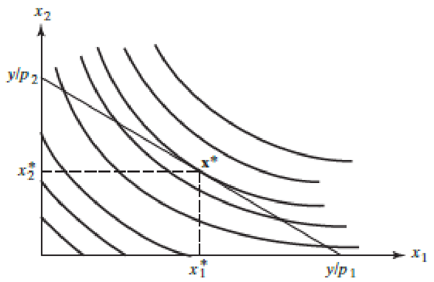


Figura 1.10 Solución del problema de maximización

El vector solución $\boldsymbol{x}^*$ depende de los parámetros del problema del consumidor. Debido a que será único para valores dados de $\boldsymbol{p}$ e y, podemos ver correctamente la solución de *(1.5)* en función del conjunto de precios e ingresos para el conjunto de cantidades, $X = \boldsymbol{R}_{n+}$. Por lo tanto, a menudo se escribe $\boldsymbol{x}^*_i = \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}, y)$, $i = 1, \ldots, n$, o, en notación vectorial, $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, y)$. Cuando se ven como funciones de $\boldsymbol{p}$ e y, las soluciones al problema de maximización de la utilidad se conocen como *funciones de demanda ordinarias*, o *marshallianas*. Cuando los ingresos y todos los precios distintos del precio del propio bien se mantienen fijos, la gráfica de la relación entre la cantidad demandada de x_i y su propio precio p_i es la curva de *demanda* estándar para el bien *i*.

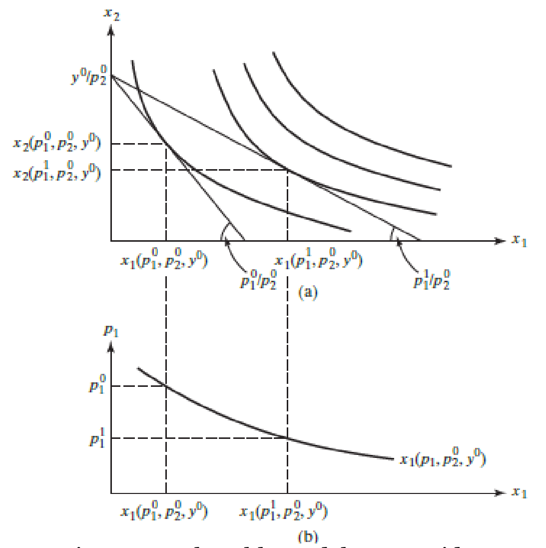


Figura 1.11 El Problema del Consumidor y la conducta de consumo

En la figura 1.11 se ilustra la relación entre el problema del consumidor y el comportamiento de la demanda del consumidor. La cantidad x_1 resuelve el problema del consumidor frente a precios p_1, p_2 e ingreso y. Esta cantidad (y una cantidad similar de x_2) resuelve el problema de maximizar la utilidad ante esos precios e ingreso. Al mismo ingreso y precio del bien 2, ante un precio $p < p_1$ más bajo, las cantidades x_1 (p, p_2, y) y x_2 (p, p_2, y) resuelven el problema del consumidor y maximizan la utilidad. Si graficamos p_1 contra la cantidad de 1 demandada a ese precio, se obtiene otro punto de la curva de demanda marshalliana por ese bien 1, en la parte inferior. Considerando todos los valores posibles de p_1 resultará trazada toda la curva de demanda del bien 1. Como puede verificarse, diferentes niveles de ingreso y distintos precios del bien 2 darán lugar a cambios en la posición y la forma de la curva de demanda del bien 1. Tales posición y forma, empero, siempre quedarán determinadas por las propiedades de la relación de preferencia subyacente del consumidor.

El caso diferenciable

Si fortalecemos los requisitos de $u\,(\mathbf{x})$ para incluir su diferenciabilidad, podemos utilizar los métodos del cálculo para seguir estudiando el comportamiento de la demanda. Recordemos que el problema del consumidor está dado por *(1.5)*. Se trata de un problema de programación no lineal con una restricción de desigualdad. Como se ha dicho, existirá una única solución. Si rescribimos $\mathbf{p}.\ \mathbf{x} - y \le 0$ y construimos la función de Lagrange[13]

(1.6) $$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) - \lambda\,[\mathbf{p}\ \mathbf{x} - y].$$

Suponiendo que la solución $\mathbf{x}^* \gg 0$, podemos aplicar los métodos de Karush-Kuhn-Tucker para *caracterizarla*. Si $\mathbf{x}^* \gg 0$ resuelve *(1.5)*, luego por el teorema de KKT existe un $\lambda^* \ge 0$ tal que $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ satisface las condiciones siguientes:

(1.7) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0 \ (i = 1,\dots, n)$$

(1.8) $$\mathbf{p}\ \mathbf{x} - y \le 0,$$

(1.9) $$\lambda^*\,[\mathbf{p}\ \mathbf{x}^* - y] = 0$$

Por la monotonía estricta de $u\,(.)$ *(1.8)* debe satisfacerse como igualdad estricta. Esto implica que (1.9) es redundante. Luego, estas condiciones se reducen a las siguientes:

[13] Véase *Tratado de Microeconomía*, Capítulo III, página 75 y siguientes.

(1.10)
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial u(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} - \lambda^* p_1 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = \frac{\partial u(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n} - \lambda^* p_n = 0$$
$$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} - y = 0.$$

¿Qué nos dicen estas condiciones sobre la solución de (1.6)? Hay dos posibilidades: o bien $\nabla u(\boldsymbol{x}^*) = 0$, o bien $\nabla u(\boldsymbol{x}^*) \neq 0$. Con monotonía estricta, si bien el primer caso es posible, es muy improbable. Luego, vamos a suponer $\nabla u(\boldsymbol{x}^*) \neq 0$. Por la monotonía estricta, tendremos que $\partial u(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_i > 0$ para algún i. Como $p_i > 0$ para todos los i, resulta claro por (1.7) que el multiplicador de Lagrange o precio sombra λ^* será estrictamente positivo en la solución, ya que $\lambda^* = u_i(\boldsymbol{x}^*)/p_i > 0$. Por lo tanto, para todo j, $\partial u(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_j = \lambda^* p_j > 0$, con lo cual la utilidad marginal será proporcional al precio de todos los bienes en el óptimo. En forma alternativa, para cualquier par de bienes j, k podemos combinar ambas condiciones y concluir que:

(1.11)
$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_j}{\partial u(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_k} = \frac{p_j}{p_k}$$

Esto nos dice que en el óptimo, la tasa marginal de sustitución entre dos productos debe ser igual a la relación de los precios de los bienes. En el caso de dos bienes, las condiciones (1.10), por lo tanto requieren que la pendiente de la curva de indiferencia a través de $\boldsymbol{x}^*$ sea igual a la pendiente de la restricción presupuestaria, y que $\boldsymbol{x}^*$ se encuentre en el borde del, no en el interior del, conjunto presupuestario, como en las Fig. 1.10 y 1.11. Una interpretación útil de la condición (1.11) está basada en llamar al cociente del 2º miembro la **tasa económica de sustitución** (TES) – igual al cociente de precios relativos. Si multiplicamos m. a m. por (-1), nos dice que un individuo racional nunca dejaría de igualar la tasa marginal de sustitución del primer miembro, con la tasa económica de sustitución del segundo miembro. Imaginemos una situación en que no fuera así, por ejemplo con la MRS=1 y la TES=2. Que la primera sea igual a 1 significa que el consumidor puede, por ejemplo, sustituir una unidad de un bien por otra del segundo bien y no experimentar ningún cambio de su utilidad. Si la TES es 2, significa que si reduce el consumo del bien en una unidad y aumenta el consumo del segundo bien en una unidad, podría mejorar su nivel de gasto total en $2. En términos netos, el consumidor habría redistribuido sus gastos sin cambiar su utilidad total, pero quedando con un ahorro neto en sus manos. Esto es contradictorio con la idea de que el consumidor se encontraba maximizando su utilidad o, equivalentemente, minimizando el costo de compras bajo la restricción de alcanzar un nivel de utilidad determinado.

<u>Teorema 1.4 (Suficiencia de las Condiciones de Primer Orden)</u> Supongamos que u ($\boldsymbol{x}$) *es continua y cuasi cóncava en* $\mathbf{R}_{n+}$, *y que* ($\boldsymbol{p}$, *y*) $\gg 0$. *Si u es diferenciable en* $\boldsymbol{x}^*$, *y* ($\boldsymbol{x}^*, \lambda^*$) $\gg 0$ *resuelve (1.10), entonces* $\boldsymbol{x}^*$ *soluciona el problema de maximización de los consumidores a precios* $\boldsymbol{p}$ *e ingreso y.*

Dem. Como para todo $\mathbf{x}, \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$ con u cuasi cóncava, $\nabla u(\mathbf{x})(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}) \geq 0$ siempre que $u(\mathbf{x}^1) \geq u(\mathbf{x})$ y u sea diferenciable en $\mathbf{x}$,

Ahora, supóngase que existe $\nabla u(\mathbf{x}^*)$ y que $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ resuelve *(1.10)*. En tal caso,

(P.1) $\quad \nabla u(\mathbf{x}^*) = \lambda^* \mathbf{p},$
(P.2) $\quad \mathbf{p}\,\mathbf{x}^* = y.$

Si $\mathbf{x}^*$ no maximiza la utilidad, debe existir algún $\mathbf{x}^o > \mathbf{0}$ tal, que

$$u(\mathbf{x}^o) > u(\mathbf{x}^*),$$
$$\mathbf{p}\,\mathbf{x}^o \leq y.$$

Como u es continua y, además, $y > 0$, estas desigualdades implican que

(P.3) $\quad u(t\,\mathbf{x}^o) > u(\mathbf{x}^*),$
(P.4) $\quad \mathbf{p}\,t\,\mathbf{x}^o < y,$

para algún $t \in [0, 1]$ suficientemente próximo a 1. Poniendo $\mathbf{x}^1 = t\mathbf{x}^o$, se tiene

(P.5) $\quad \nabla u(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*) = \lambda^*(\mathbf{p}\,\mathbf{x}^1 - \mathbf{p}\,\mathbf{x}^*) < \lambda^*(y - y) = 0.$

Empero, como por *(P.3)* $u(\mathbf{x}^1) > u(\mathbf{x}^*)$, *(P.5)* contradice el hecho planteado al comienzo de la demostración. ▌

En base a este teorema, es suficiente hallar una solución $(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \gg \mathbf{0}$ al sistema *(1.10)*. Fíjense que (1.10) es un sistema de $n+1$ ecuaciones en $n+1$ incógnitas, a saber $x^*_1,\ldots, x^*_n, \lambda^*$, que pueden usarse para calcular las funciones de demanda $x_i(\mathbf{p}, y)$ $(i=1,\ldots, n)$.

Ejercicios

Función de utilidad Cobb Douglas

Hallar las funciones de demanda marshallianas que resuelven el problema $Max_{x_1, x_2}\ x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ *sujeto a* $p_1 x_1 + p_2 x_2 - y \leq 0$.

Función de utilidad con elasticidad de sustitución constante o CES

Hallar la canasta de consumo no negativa que resuelve el problema $Max_{x_1, x_2}\ (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho}$ *sujeto a* $p_1 x_1 + p_2 x_2 - y \leq 0$.

◇ **Sugerencia** *Buscar en internet ejercicios de microeconomía con distintos supuestos sobre las preferencias.*