Producción y Minimización de Costos

<u>*Tecnología de la Empresa*</u> La empresa tiene *L* posibles bienes que sirven como insumos y/o productos (observar que no está predeterminado a este nivel del análisis si algo es un producto o un insumo). Si se producen $y^p{}_j$ unidades como producto (de allí la *p*) usándose $y^i{}_l$ como insumo (de allí la *i*) del bien *j* luego el **producto neto** del bien *l* será $y_l = y^p{}_l - y^i{}_l$ que puede resultar positivo, nulo o negativo. A y_l se lo denomina el **netput** de *l*.

Un **plan de producción** es una lista de netputs que es tecnológicamente factible. Usaremos la notación ***y*** para representar al vector de netputs. La factibilidad tecnológica es una propiedad de todo vector ***y*** que es posible llevar a cabo. Esto lo indicamos introduciendo un conjunto de posibilidades de producción denotado como $\boldsymbol{Y \subset R^L}$. Es decir, *y será **factible tecnológicamente** si **y** $\boldsymbol{\in Y}$.*

El **corto plazo** es un período en el que algunos insumos están fijos y la producción debe ser compatible con este hecho. En el **largo plazo** estos insumos o factores productivos son variables, de manera que las posibilidades tecnológicas de la empresa pueden ser ajustadas. Esto implica que hasta es posible que la empresa deje de operar. Denotaremos mediante ***z*** a la lista de cantidades máximas de insumos y de productos que pueden ser producidos en el período del corto plazo. El conjunto de **posibilidades de producción de corto plazo** será *Y (z)*. Obsérvese: $\boldsymbol{Y(z) \subset Y}$.

Conjunto de requerimientos de insumos Sea una empresa **monoproductora**. Su canasta de producto neto es ***(y,-x)*** donde ***x*** es un vector de insumos que permite producir ***y*** unidades de producto. El conjunto de requerimientos de insumos es

$$\boldsymbol{V(y) = \{x \text{ en } R^n{}_+ : (y,-x) \in Y\}}.$$

Por lo tanto es el *conjunto de canastas de insumos que producen al menos y unidades de producto*.

Isocuanta Definimos como isocuanta al conjunto de canastas que satisfacen

$$Q(y) = \{x \in R^L{}_+ \text{ tales que } \boldsymbol{x \notin V(y') \text{ para } y' > y}\}.$$

Luego en todos los puntos de una isocuanta se producen exactamente ***y*** unidades de producto.

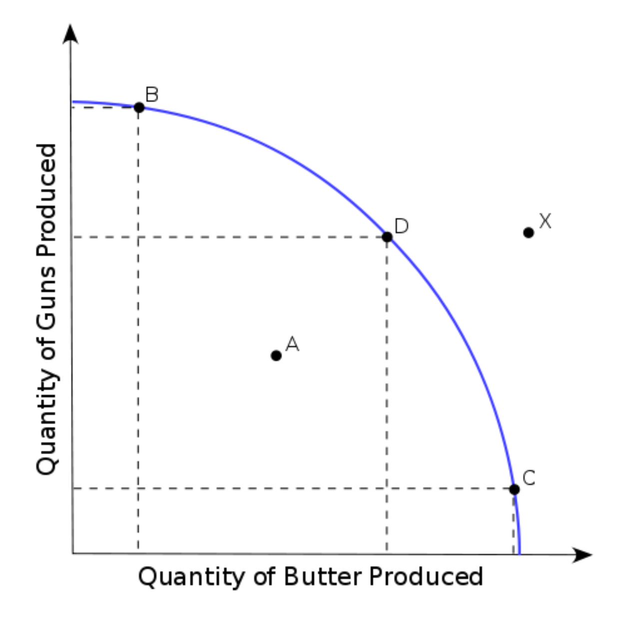
Conjunto de posibilidades de producción de corto plazo Supóngase que la firma es monoproductora, o sea produce algún bien a partir de trabajo y de los servicios de una máquina que llamaremos 'capital'. Los planes de producción pueden ser escritos como ***(y,-l,-k).*** Si podemos variar libremente la cantidad de trabajo empleado, pero el capital permanece fijo al nivel k^o en el corto plazo, $\boldsymbol{Y(k^o) = \{(y,-l,-k) \in Y \text{ tales que } k = k^o\}}$ es el **conjunto de posibilidades de producción de corto plazo.**

Función de producción Con un solo producto, se define:

$$\boldsymbol{F(x) = \{y \in R;\ y \text{ es el máximo asociado con } -x \in Y\}}.$$

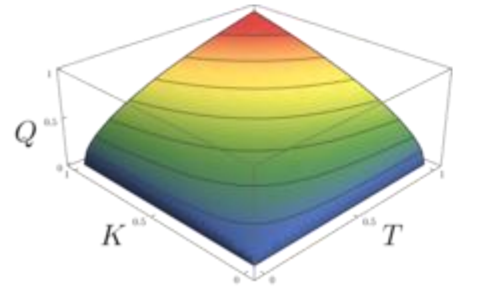
Sea ahora una firma **multiproductora**. En tal caso conviene despejar la cantidad producida de un producto en términos de la cantidad producida de los otros y de los insumos utilizados. Ejemplo: con 2 productos (por caso, una empresa que produce automóviles de lujo y utilitarios), si y_1 es la cantidad producida del primer producto (autos de lujo) e y_2 la del otro (utilitarios), luego:

$f\ (y_2,\ x)= \{y_1 \in R$ *tal que* y_1 *es el máximo asociado con* $y_2 \in R, -x \in Y\}$.



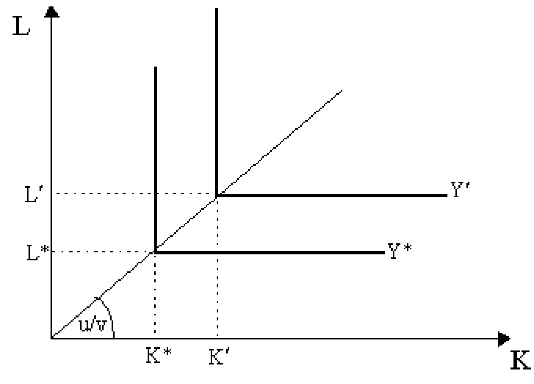
Observen que y_1 será una función *decreciente* de y_2 cuya derivada (en términos absolutos) mide el **costo de oportunidad** de producir el primer bien (autos de lujo) con $\boldsymbol{\partial F/\partial y_2 \leq 0}$ (El término fue acuñado por Friedrich von Wieser en su *Theorie der gesellschaftlichen Wirtschaft* [Teoría de la economía social, 1914]). La curva obtenida fijando $x= x_0$ es la **curva de transformación**, definida para una aplicación dada de factores productivos x. La función $\boldsymbol{F\ (y, x^o)= 0}$ es llamada **función de transformación** de la empresa (la figura adjunta representa una FT de una empresa que permite fabricar cañones y mantequilla).

Eficiencia técnica Se dice que un plan de producción $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{Y}$ es *eficiente desde el punto de vista tecnológico* si no existe otro $\boldsymbol{y' \in Y}$ con $\boldsymbol{y' \geq y}$ e $\boldsymbol{y' \neq y}$. O sea, en el caso de una firma monoproductora un plan es eficiente, si no hay forma de producir más producto con los mismos insumos, o bien que no requiera menos insumos para producir el mismo producto. Los planes eficientes pueden ser descriptos muchas veces por una función de transformación $\boldsymbol{T: R^L \rightarrow R}$ donde $\boldsymbol{T\ (y)=0}$ si y solamente si $\boldsymbol{y}$ es eficiente. De la misma manera que una función de producción selecciona el máximo producto escalar como una función de los insumos (y eventualmente de las cantidades de los productos restantes), una función de transformación selecciona vectores de netputs maximales.



Función de Producción Cobb-Douglas

Ejemplos. 1) Función de producción Cobb-Douglas. Esta tecnología requiere la especificación de un parámetro $0>a>1$: Isocuanta $Q(y)=\{(x_1,x_2) \in R^2_+:\ y=x_1^{a}\ x_2^{1-a}\}$. Fue propuesta por Knut Wicksell (1851-1926) e investigada con respecto a la evidencia estadística concreta, por Charles Cobb y Paul Douglas en 1928. (C.W. Cobb, y P.H. Douglas (1928): *A Theory of Production*).



Isocuantas de la f. de p. de Leontief

2) Tecnología de Leontief. Requiere la especificación de dos parámetros $a>0,\ b>0$ donde $v=1/a$, $u=1/b$ son interpretados como las **inversas de la productividad de cada insumo.**

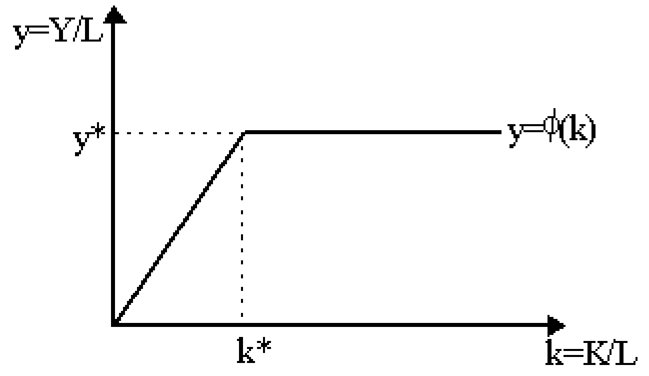
Para producir 1 única cantidad de producto, se requieren v unidades de capital y u unidades de trabajo. Por lo tanto, en este caso no hay flexibilidad de la técnica. Los coeficientes v y u son los requerimientos de insumos para producir una unidad de producto. Luego, si deseamos producir Y unidades, necesitamos vY unidades de capital, y uY unidades de trabajo. El resultado es que hay una relación fija de producción $L/K = u/v$. Un aumento de uno de los factores sin aumentar proporcionalmente el restante conducirá a que no haya aumento de la producción. A esta tecnología se la denomina de "Proporciones Fijas" o "Sin sustitución", y también como la tecnología "Marx-Leontief", "Walras-Cassel" o de "Insumo-Producto".

Para todo nivel de producción Y^* existen los niveles necesarios de K^* y L^* que no pueden ser sustituidos, de modo puramente tecnológico. Aumentar, por ejemplo, el trabajo desde L^* a L' no conduce a ningún aumento de la producción; es decir, si no se invierte en capital adicional, el trabajo adicional se desperdicia por completo. De tal manera, una tecnología de proporciones fijas es "un rechazo formal de la teoría de la productividad marginal. La productividad marginal de todos los factores... es cero."[1]

La función de producción sin sustitución factorial puede ser escrita como:

$$Y = \min (K/v, L/u)$$

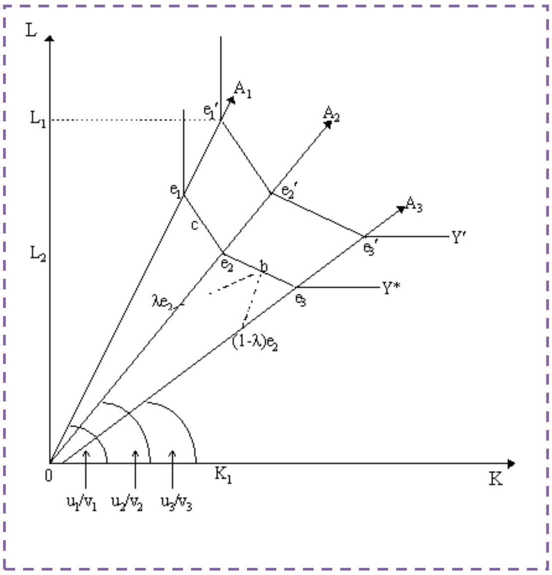
a la que también se llama la *función de producción de **Leontief***. Notar que, si $K= K^*$ y $L= L'$, entonces se tendrá $K^*/v < L'/u$ con lo cual $Y = K^*/v$. Esto significa que el nivel técnicamente eficiente de trabajo será, por definición, igual a $K^*/v = L/u$ o $L = (u/v)\, K^*$, que, como es obvio por la figura anterior, es L^*. Esto significa que, a través de un rayo que pasa por el origen, $Y/L = (1/v)\, K/L$. Luego, la función de producción *intensiva* es $y = f(k)$ donde $y = Y/L$ y $k = K/L$, es una línea recta con pendiente $1/v$ hasta llegar a la relación capital-trabajo dada por $k^*= K^*/L^*$ y, a partir de allí, es horizontal (gráfico adjunto). Parte del programa será dedicado al análisis económico utilizando el modelo tecnológico de Leontief.



Función de producción intensiva de Leontief

3) Análisis de actividades. Este tipo de análisis fue introducido por John von Neumann en 1937 y posteriormente desarrollado por la escuela neo-walrasiana (T.C. Koopmans en 1951, R. Dorfman, P. Samuelson y R. Solow en 1958 y David Gale en 1960). Usaremos este modelo cuando analicemos programación lineal.

[1] Wassily W. Leontief, *The Structure of American Economy, 1919-1929: An Empirical Application of Equilibrium Analysis*, Harvard Univ. Press, 1941.



Con esta tecnología, el productor puede elegir entre un número pequeño y finito de actividades o procesos de producción. En la figura adjunta la firma dispone de tres actividades posibles: A_1, A_2 y A_3. Cada actividad está representada por una semirrecta a partir del origen con una pendiente distinta; denotamos a estas pendientes como u_i/v_i. Los coeficientes u_i y v_i son los coeficientes unitarios de insumo de la actividad *i*. Para producir una unidad de producto utilizando la técnica A_i se requieren v_i unidades de capital (*K*) y u_i unidades de trabajo (*L*). Luego, para producir Y^* se requieren $v_iY^*=K_i^*$ unidades de capital y $u_iY^*=L_i^*$ unidades de trabajo. Luego, la pendiente representada por la actividad A_i^* será $L_i^*/K_i^* =u_i/v_i$. En la figura, $u_1/v_1>u_2/v_2>u_3/v_3$ lo que implica que A_1 es la actividad más trabajo-intensiva (y A_3 la más capital-intensiva). Es posible alcanzar un nivel particular de producto, Y^*, llevando a cabo los procesos A_1, A_2 o A_3. Si, por ejemplo, se elige el proceso A_2, la relación trabajo-capital deberá ser u_2/v_2 forzada por la pendiente de esa actividad. En el punto e_2 los insumos serán $K_2=v_2Y^*$ y $L_2=u_2Y^*$. Si se desea producir más sin cambiar de técnica, esto exige un movimiento radial desde e_2 hacia e_2'. Esto significa mantener la misma relación trabajo-capital en ambos puntos.

La ventaja del modelo de análisis de actividades con respecto al modelo de Leontief es que no se está obligado a utilizar sólo una técnica o proceso. Supóngase que el modelo satisface el supuesto de **tecnología convexa**. Esto significa que se puede producir el producto Y^* utilizando una combinación de las actividades A_2 *y* A_3. La combinación genera un punto *b* en la isocuanta de la figura. El punto *b* está ubicado en un segmento lineal entre e_2 *y* e_3 y se puede decir, por consiguiente, que constituye una combinación lineal convexa de ambas actividades, es decir $b=\lambda e_2 + (1\text{-}\lambda)\, e_3$, con $\lambda \in (0,1)$. Por lo tanto, el uso de la actividad A_2 se reduce desde e_2 hasta λe_2 en tanto que el de la actividad A_3 se reduce desde e_3 hasta $(1\text{-}\lambda)\, e_3$. Todo esto implica que el conjunto de requerimientos de insumos sea *convexo*. En *b* el uso de capital será $K_b=\lambda v_2Y^*+ (1\text{-}\lambda)\, v_3\, Y^*$ donde v_2 es igual a la relación capital-producto de la actividad A_2 y v_3 es la relación correspondiente a A_3. Una proposición semejante se verifica para el uso de trabajo. Luego, el capital y el trabajo serán parcialmente asignados a un proceso y parcialmente al otro. A medida que λ se aproxima a la unidad, el productor se desplazará desde el proceso A_3 hacia el A_2 a fin de producir el nivel deseado de producto, Y^*.

Como se aprecia, las isocuantas del análisis de actividades permiten elegir no solamente entre distintas actividades sino también cualquier combinación de procesos productivos. Comparadas con la función de producción de Leontief, el análisis de actividades permite una sustitución moderada entre los distintos factores productivos, al permitir elegir combinaciones de distintas actividades. Las combinaciones de las actividades A_1 y A_2 como *c* y de las actividades A_2 y A_3 como *b* están permitidas. Pero no se contemplan combinaciones de los procesos A_1 y A_3 para producir el producto Y^* no porque no haya posibilidad de hacerlo sino porque se trata de una combinación técnicamente *ineficiente*. Una combinación convexa de e_1 y e_3 quedaría arriba de la isocuanta $e_1e_2e_3$ e implicaría un mayor uso de los factores que los indicados por los puntos de la isocuanta. El análisis de actividades y la teoría de la programación lineal guardan una relación muy estrecha. Más adelante nos dedicaremos al análisis de esta interdependencia.

La función de producción CES La función de producción CES $y = [a_1 x_1^{\rho} + a_2\, x_2^{(1-\rho)}]^{1/\rho}$ tiene una elasticidad de sustitución constante, según los valores de ρ. Para ello, vamos a fijar los parámetros $a_1= a_2= 1$. Es inmediato que para $\rho= 1$ tenemos una función de producción lineal, con isocuantas lineales. Si $\boldsymbol{\rho= 0}$ se tiene que la f.p. no está definida. Pero ahora veremos que el *límite de esta f.p. cuando este parámetro tiende a cero es una f.p. Cobb-Douglas*. Lo haremos trabajando con la *Relación Técnica de Sustitución* de esta función. La RTS se define en general diferenciando en forma total una función de producción, por ejemplo $y=f(x_1, x_2)$ haciendo que no cambie el nivel del producto, es decir $dy=f_1dx_1+f_2dx_2=0$. Despejando la variación de un insumo en términos de la variación del restante, $dx_2/dx_1= -f_1/f_2$. Este cociente es denominado la RTS del insumo 2 en términos del insumo 1.

Como se aprecia, la RTS es un cociente de derivadas parciales de la función de producción. El signo de este cociente debe ser, naturalmente, negativo. Las derivadas parciales de una función de producción $f\,(x_1, x_2,\ldots x_L)$, que denotamos f_j son las *productividades marginales (físicas)* de dichos insumos.

Recordemos ahora la expresión de una Cobb-Douglas, $y=x_1^{\alpha}\, x_2^{1-\alpha}$. Sacando las derivadas: $f_1= \alpha\; x_1^{(\alpha-1)}\, x_2^{(1-\alpha)}= \alpha\; [x_2/x_1]^{(1-\alpha)}$, $f_2= (1-\alpha)\; [x_1/x_2]^{\alpha}$. De modo que en el caso **Cobb-Douglas**, $RTS= \alpha/\, (1- \alpha).\, (x_2/x_1)$.

En el caso **CES**, $RTS= -\, (x_1/x_2)^{\,\rho-1}$. Si $\rho \rightarrow 0$ la RTS=1. Pero ésta es, precisamente, la *RTS* de una Cobb-Douglas. *Luego, la función CES es una generalización de la Cobb-Douglas*.

Para $\boldsymbol{\rho=1}$ comenzamos recordando que la RTS de la CES es $-\, (x_1/x_2)^{\,\rho-1}$. Cuando $\rho \rightarrow -\infty$ esta expresión se acerca a $-\, (x_2/x_1)^{\,\infty}$. Si $x_2>x_1$ la RTS es infinito (negativo); si $x_1>x_2$ la RTS es cero. Tomando límites, éstos son los valores de una isocuanta de **Leontief**.

Elasticidad de sustitución Hemos visto que la RTS mide cómo cambia un insumo a medida que el otro insumo es ajustado para compensar aquel efecto y que el efecto neto resultante sea una variación nula del nivel de producción, con lo cual tenemos, en definitiva, que RTS=***pendiente*** de la isocuanta. En cambio, la elasticidad de sustitución mide la ***curvatura*** de la isocuanta: Si denotamos como ΔRTS al cambio experimentado por la RTS, y como $\Delta(x_2/x_1)$ al cambio de la relación entre los dos factores 1 y 2, la elasticidad de sustitución es medida como

$$\sigma= [\Delta(x_2/x_1)\, /(x_2/x_1)]/\, (\Delta RTS/RTS).$$

Este número mide la relación existente entre el cambio de la relación factorial (x_2/x_1) y el cambio de la pendiente de la isocuanta ΔRTS, ambos cambios medidos como porcentajes. Un pequeño cambio de la pendiente que genere un amplio cambio de la relación factorial implica que la isocuanta es relativamente plana, es decir que tenemos una elasticidad muy elevada. Haciendo que los Δ sean tiendan a cero, la elasticidad de sustitución se transforma en

$$\sigma= [RTS/(x_2/x_1)]\, [d(x_2/dx_1)/dRTS].$$

Podemos expresarla también como una *derivada logarítmica*: si $y=f(x)$, $\varepsilon= (dy/dx).(x/y) = (d\, ln y)/(d\, ln\, x)$. La primera igualdad surge de expresar los cambios en términos porcentuales tendientes a 0. Para la segunda se supone que tanto x como y son positivos. Esta última expresión permite indicar que $\sigma= (d\, ln\, (x_2/x_1))/d\, ln\, |RTS|$.

Calculemos ahora la elasticidad de sustitución de una Cobb-Douglas. Como indiqué arriba, $RTS= \alpha/(1- \alpha).\ (x_2/x_1)$. De modo que $(x_2/x_1)= (1-\alpha)/\alpha\ RTS$. O sea, $ln(x_2/x_1)= ln((1-\alpha)/\alpha) + ln|RTS|$. De lo cual, $ln(x_2/x_1)= ln((1-\alpha)/\alpha) + RTS$ y $\sigma=d\, ln(x_2/x_1)/d\, ln\, |RTS|=1$. La elasticidad de sustitución de una Cobb-Douglas es, por consiguiente, unitaria.

<u>*Rendimientos a escala*</u> Se dice que una tecnología exhibe **rendimientos constantes a escala** cuando se cumple cualquiera de las siguientes propiedades

(1) $y\ \varepsilon\ Y$ implica que $ty\ \varepsilon\ Y$, para todo $t\geq 0$;

(2) $f(tx)= t\, f(x)$ para todo t ≥ 0; es decir, la f.p. $f(x)$ es (positivamente) homogénea de grado 1.

Detrás de esta propiedad hay una propiedad de poder “replicar” el proceso productivo tanto como se desee.

El parámetro t puede ser menor que 1, lo cual plantea un problema en ciertas tecnologías en las cuales no es posible subdividir el proceso productivo, porque existe una escala mínima de operación para producir el producto. Otra circunstancia en que el supuesto es violado es cuando no es posible operar un proceso por números no enteros (indivisibilidad). Finalmente, también es inapropiado el supuesto si, por ejemplo, al duplicarse todos los insumos el producto resulta más que duplicado. Esto no es ningún misterio. Hay leyes de la geometría que permiten esta situación, por ejemplo al diseñarse el diámetro de un caño (ej. oleoducto).

En este caso, en lugar de la 2^{da} definición hay que reconocer que estamos ante **rendimientos crecientes a escala**, a saber, $f(tx)>t\, f(x)$, para todo $t>1$.

En fin, los rendimientos constantes a escala pueden ser violados por la imposibilidad de replicar algún insumo (el caso característico es la tierra en el sector agrícola). Éste es el caso con **rendimientos decrecientes a escala**: $f(tx)< t\, f(x)$ para todo $t>1$. Por ejemplo, supongan una granja de 100 hectáreas. Si quisiéramos producir 2 veces más de producto, podríamos duplicar cada uno de los insumos, lo cual implica duplicar también la tierra empleada. En este caso, es posible que no podamos hacerlo porque no hay más tierra disponible. Aunque en este caso la tecnología podría involucrar rendimientos constantes a escala si aumentamos todos los insumos, puede resultar conveniente pensar que este caso exhibe rendimientos decrecientes a escala con respecto a **todos los insumos bajo nuestro control**.

Es interesante tener en cuenta que *la presencia de rendimientos decrecientes a escala siempre puede vincularse con la existencia de algún insumo fijo*. Para demostrarlo, supongan que $f(x)$ es una f.p. con k insumos que exhibe rendimientos decrecientes a escala. En tal caso, podemos introducir un nuevo insumo “mítico” y medimos su cantidad mediante la letra z. Definimos una nueva función de producción $F(z, x)$ mediante $\boldsymbol{F(z, x) = z\, f(x/z)}$. Esta función F tiene rendimientos constantes a escala. Si expandimos todos los insumos – es decir, el insumo x y el insumo z – mediante un $t>0$, tendremos que el producto queda modificado en t. Fijando $z=1$, tenemos exactamente la misma tecnología que antes. Luego, podemos pensar a la tecnología original con rendimientos decrecientes $f(x)$ como una restricción de la tecnología con rendimientos constantes $F(z, x)$ resultante de fijar $z=1$.

Una tecnología puede exhibir rendimientos crecientes a escala para ciertos valores de x y (de)crecientes para otros valores. Luego, vamos a introducir una medida local de rendimientos a escala, a saber la *elasticidad de escala de la f.p.,* que mide el % de incremento de la producción originado en un % de incremento de la escala. Se define la escala de operaciones como el número positivo t que, cuando $y= f(tx)$ es la f.p., si $t=1$ estamos reproduciendo la escala actual de producción; si $t>1$, escalamos hacia arriba a todos los insumos en la proporción t, y con $t<1$ reducimos a todos los insumos en proporción t.

La elasticidad de escala está definida entonces por:

$$e(x)= (dy(t)/y(t))/(dt/t),$$

evaluando esta fórmula en $t=1$. También la podemos escribir así:

$$e(\mathbf{x})= (dy(t)/dt)\, t/y\,\big|_{t=1}= (df(t\mathbf{x})/dt)/(t/f(t\mathbf{x}))\big|_{t=1}.$$

Las economías a escala tienden a presentarse en industrias con elevados costos de capital que pueden ser distribuidos sobre un amplio número de unidades de producción – tanto en términos absolutos y, en particular, en forma relativa al mercado - . Un ejemplo frecuente: en una fábrica se realiza una inversión en maquinaria, y un trabajador comienza a trabajar con la máquina y produce cierto número de bienes. Si se agrega otro trabajador será posible producir una cantidad adicional de bienes sin aumentar en forma significativa el costo de operación de la fábrica. La cantidad adicional de bienes crece a una tasa significativamente mayor que los costos operativos de la planta de producción. Por consiguiente, el costo de producir un bien adicional es menor que el del bien anterior, y surge una economía de escala. Las economías de escala también suelen derivarse parcialmente del aprendizaje por la experiencia.

La explotación de las economías de escala ayuda a explicar por qué las empresas tienden a ser grandes en algunas industrias. También es una justificación de las políticas de libre comercio, dado que algunas economías de escala pueden requerir un mercado más amplio que el que posibilita un país – por ejemplo, no sería eficiente que Liechtenstein tenga su propia fábrica de autos, si sólo se vendiera al mercado interno. Empero, un único fabricante de autos puede ser rentable si exporta automóviles al mercado global además de venderlos en su propio mercado local. Las economías de escala también desempeñan un rol en el "monopolio natural", como veremos más adelante.

Es típico que, si hay costos fijos de producción, las economías de escala sean crecientes al principio, pero que a medida que aumenta el volumen producido, tiendan a ser decrecientes, lo que da lugar a la curva típica de costo medio en forma de U de la teoría económica. A veces la teoría económica postula la existencia de rendimientos constantes a escala, p.ej. bajo "competencia perfecta".

La elasticidad de escala está dada por $e(\mathbf{x}) = [dy(t)/y(t)]/(dt/t)|_{t=1}$. Decimos que la tecnología exhibe localmente rendimientos crecientes, constantes, o decrecientes si $e(\mathbf{x})$ es mayor, igual, o menor que 1.

Por ejemplo, con la función de producción Cobb-Douglas que tiene la especificación $y= x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ podemos escribir $f(tx_1, tx_2) = t^{\alpha+\beta} f(x_1, x_2)$. Por lo tanto $f(tx_1, tx_2) = t\, f(x_1, x_2)$ si y sólo si $\alpha+\beta= 1$. Con lo cual, habrá rendimientos crecientes, o decrecientes a escala si y sólo si $\alpha+\beta>1$ o < 1. Cabe notar que la elasticidad de escala es, precisamente, $\alpha+\beta$.

El productor paretiano

Consideramos ahora uno de los principales actores de la teoría neoclásica – el productor. El productor es una entidad que transforma factores de producción en productos terminados. Una **firma** es un ejemplo de productor, pero no nos vamos a limitar al análisis de firmas como se las entiende en la sociedad occidental. Por ejemplo, un productor podría ser meramente un artesano independiente como herrero del pueblo, que puede no estar oficialmente reconocido como empresa.

Más aún, la teoría paretiana de la producción limita su definición de lo que es un productor a una entidad en la cual toma decisiones **una** persona. Muchas corporaciones modernas son, o bien sociedades, o empresas con cientos o miles de propietarios (accionistas) que tienen poder de decisión. Desde este punto de vista, las decisiones tomadas en las corporaciones con propietarios múltiples a menudo resultan de deseos en conflicto de propietarios diferentes, y por consiguiente deberían ser tratadas como una suerte de bien público.

Pero este tipo de enfoque nos embarcaría en una dirección diferente. Por ahora, la firma "paretiana" será tratada como una firma de propiedad de un único empresario con poder de decisión indiscutido sobre todos los aspectos del proceso productivo: a saber, qué producirá su empresa, la técnica de producción, la contratación de factores de producción, etc.

Hay elementos sobre los cuales el productor paretiano no tiene poder de decisión. Precios de bienes y factores le son impuestos por una entidad amorfa, el *mercado competitivo*. En otros términos, el productor paretiano es un **tomador de precios** tanto en los mercados de la producción y los mercados factoriales. Dados estos precios, el productor adopta decisiones sobre qué producir, cuánto y por cuáles técnicas hacerlo, pero no puede fijar los precios. Estos temas volverán, empero, a ser encarados en el punto 7 del programa, cuando tratemos la teoría de la producción Marshalliana.

El supuesto que convierte a los productores en tomadores de precios es el de **competencia perfecta**. Tendremos mucho más para decir sobre cómo caracterizar a esta forma de mercado, pero por ahora será suficiente decir que los productores paretianos toman a los precios como **parámetros de sus decisiones**, no como variables.

En realidad, el propio Léon Walras (1874) adoptó el supuesto de competencia perfecta llevado al extremo: en efecto, supuso que *todo* era fijado por el mercado y dejó al productor prácticamente sin grados de libertad para determinar la producción o contratar factores. Terminó suponiendo una tecnología de Leontief – algo similar a lo que había supuesto Karl Marx en *Das Kapital* (1867). El propio Pareto (en 1898 y 1906) – a quien hay que acreditar la introducción de la "firma paretiana" en la teoría económica neoclásica – se resistió a la introducción de coeficientes técnicos plenamente variables, aunque también enfatizó que suponer coeficientes fijos de producción era una hipótesis alejada de la realidad. La idea de un productor motivado que participa activamente dentro del proceso de producción requería introducir técnicas de producción variables. La idea de un productor maximizador de beneficios se debe a Augustin Cournot (1838). Que el productor toma decisiones sobre diversas técnicas de producción es una idea que afloró entre los economistas neoclásicos tempranos, particularmente Knut Wicksell (1893), Philip H. Wicksteed (1894, 1910) y Vilfredo Pareto (1898, 1906).

Costos

Estructura general del problema y solución En el largo plazo, el economista dice que todos los insumos son variables (eventualmente la empresa puede salir del mercado). Si $\boldsymbol{w}= (w_1,..., w_L)$ representa un vector de precios de mercado de los insumos utilizados por la firma, el costo de producción = $\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}$. Cuando no haya ambigüedad, suprimiremos la T de $\boldsymbol{w}^T$, escribiendo simplemente $\boldsymbol{w}$.

Esta definición (**wx**) debe ser diferenciada de la **función de costo** que se obtiene resolviendo el problema siguiente de minimización condicionada:

(*) $c(\boldsymbol{w}, y)$=Min $\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{x}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$ sujeto a $f(\boldsymbol{x}) = y$.

Como de costumbre, se indica mediante **negrita** a los vectores (por ejemplo, **w**, **x**).

La *función de costo de corto plazo* es la siguiente, (**z** representa un vector de insumos fijos):

(**) $c(\boldsymbol{w}, y, \boldsymbol{z})$ = Min $\boldsymbol{wx}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$ sujeto a $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = y$.

En el problema (*) todos los insumos son variables, y por lo tanto no hay costos fijos; en el problema (**) hay costos fijos que surgen de la valoración, a precios de mercado, de los insumos fijos **z**. Estos insumos fijos condicionan al conjunto de posibilidades de producción. También es importante notar que en estos problemas al precio de los insumos se los supone constantes. Por lo tanto, la función de costos puede ser utilizada para describir el comportamiento de empresas que son **tomadoras de precios** en los mercados factoriales, pero no en los de los productos. Éste puede ser el caso del monopolio.

Solución Para resolver el problema (*) escribimos:

$$Mín\ \boldsymbol{w}\,\boldsymbol{x}\ tal\ que\ f(\boldsymbol{x})=y.$$

La función de Lagrange es $L(\lambda, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{wx} - \lambda\,(f(\boldsymbol{x}) - y)$; la derivamos con respecto a cada uno de sus argumentos $\boldsymbol{x_j}$ y λ. Las condiciones de primer orden para obtener una solución **interior** (es decir, $x_j > 0$) son las siguientes:

$$w_j - \lambda\, \partial f(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_j = 0\ (j=1, ...L)$$
$$f(\boldsymbol{x}^*)=y$$

Si denotamos como $\nabla f(\boldsymbol{x})$ al gradiente de $f(\boldsymbol{x})$, estas condiciones se pueden escribir:

$$\boldsymbol{w}= \lambda\, \nabla f(\boldsymbol{x}^*),$$
$$f(\boldsymbol{x}^*)= y.$$

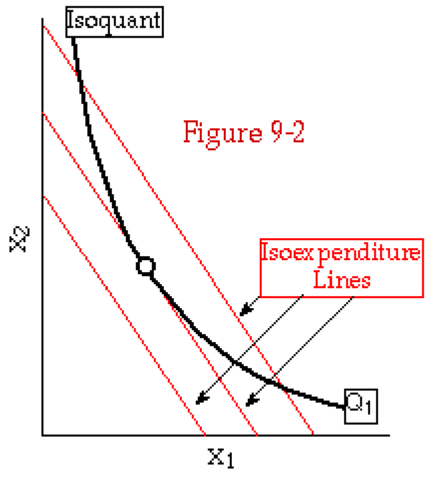
Se obtienen $L+1$ condiciones que en general pueden ser resueltas para las $L+1$ variables $x_1,..., x_L, \lambda$.

¿Cómo interpretarlas en sentido económico? Dividiendo la condición i-ésima por la j-ésima:

$$\boxed{w_i/w_j =(\partial f(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_i)/(\partial f(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_j) \qquad i, j=1, ...,L.}$$

El término del segundo miembro es la RTS (con signo positivo) a la cual el factor j puede ser sustituido por el factor i manteniendo el nivel de producto constante. El término w_i/w_j del primer miembro es lo que podríamos denominar la RES o *relación (tasa) económica de susti-*

tución, indicativa de a qué tasa podemos sustituir el factor j por el factor i manteniendo el costo constante. Estas condiciones requieren que la **RTS sea igual a la RES**, porque en caso contrario podría realizarse algún ajuste que conducirá a un costo más reducido a fin de producir el mismo producto. En una empresa con dos insumos y un producto, esta condición puede ser graficada en forma sencilla. La Figura adjunta reproduce un gráfico del libro de Friedman. La figura indica que la curva isocuanta debe estar situada por encima de (y tangente a) la recta de isocosto. El argumento puede ser puesto en términos matemáticos de la siguiente manera.



Tomado de D. Friedman, Price Theory, an Intermediate Text (1990)

Supóngase que la función de producción es diferenciable. Sea un par de pequeños ajustes de los insumos 1 y 2 (h_1, h_2) y una expansión de la función de producción en serie de Taylor hasta el 2º orden:

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2) \approx f(x_1, x_2)+(\partial f/\partial x_1)\, h_1+(\partial f/\partial x_2)\, h_2 + ½ \, [\, \partial^2 f/\partial x_1^2 \, h_1^2 + 2\, \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2 \, h_1 h_2 + \partial^2 f/\partial x_2^2 \, h_2^2]$$

Escrito en forma matricial:

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2) \approx f(x_1, x_2) + f^T h + ½\, h^T M\, h$$

(f^T = vector de las derivadas $[f_1, f_2]$ traspuesto; h = vector $[h_1, h_2]$ columna; M= matriz hessiana de las derivadas segundas de f: $\partial^2 f/\partial x_i\, \partial x_j$)

Una alteración h_1, h_2 que mantenga constante el costo debe cumplir con $w_1h_1+w_2h_2=0$. Si se sustituyen las condiciones de 1º orden en esta igualdad se obtiene:

$$w_1 h_1 + w_2\, h_2 = \lambda f_1\, h_1 + \lambda f_2\, h_2 = \lambda\, [f_1 h_1 + f_2\, h_2] = \lambda\, (f^T h) = 0.$$

Ahora bien, el término $f^T h$ de la expansión de Taylor debe anularse para movimientos a lo largo de la recta isocostos, lo que implica que

$$f_1 h_1 + f_2 h_2 = 0.$$

Luego, a fin de que el producto no aumente para cualquier movimiento a lo largo de esta recta debe satisfacerse que

$h^T M\, h \leq 0$
para todos los $[h_1, h_2]$ tales que $[f_1\, h_1 + f_2\, h_2] = 0$.

Esto significa que en la posición de mínimo costo, un movimiento de "primer orden" que da lugar a una tangencia con la recta isocosto implica que el producto permanece constante, y un movimiento de segundo orden implica que el producto disminuye o a lo sumo permanece constante (Esta última posibilidad implica que la isocuanta presenta un segmento o faceta plana, como en el análisis de actividades).

Generalizando al caso de L factores, la condición de segundo orden aplicable es que la matriz Hessiana $\boldsymbol{M}^2 = [\partial^2 f/\partial x_i\ \partial x_j]$ de la función de producción sea semi-definida negativa sujeta a una restricción lineal:

$\boldsymbol{h}_t\, \boldsymbol{M}^2 \boldsymbol{h} \leq 0$ para todos los $\boldsymbol{h}$ que satisfacen $\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{h}=0$.

<u>*Funciones de demanda condicionales*</u> Para cada alternativa de precios de los factores $\boldsymbol{w}$ y producto y existirá una elección $\boldsymbol{x}^*$ que minimiza el costo de producción. ¿Cuáles son los parámetros del problema? Pues $\boldsymbol{w}$ e y. La función que expresa la elección óptima se escribe $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, y)$ y es denominada **función de demanda condicional**. Estas cantidades demandadas dependen tanto de la cantidad a producir como de los precios de los factores.

<u>*Costo total mínimo*</u> La función de costos a los precios factoriales $\boldsymbol{w}$ para producir una cantidad de producto y es llamada la función de costo total mínimo: $c\ (\boldsymbol{w}, y) = \boldsymbol{w}\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, y)$.

<u>*Dificultades*</u>

La función de producción puede *no ser diferenciable*, como <u>no</u> lo es en el caso de la tecnología de Leontief: $f\,(K, L)=min\ \{K/v, L/u\}$. Como la firma no derrochará un insumo que tenga precio positivo, operará en un punto donde $y= K/v= L/u$. Luego, si desea producir y unidades de producto, se usarán vy unidades de capital y uy de trabajo, sean cuales fueren sus precios. Luego, la función de costos viene dada por:

$$c\ (w_K, w_L, y)= w_K\, v\, y + w_L\, u\, y= y\ (vw_K + u\, w_L).$$

Segundo, las condiciones de optimalidad caracterizan sólo a los óptimos interiores. Si el costo mínimo se alcanza en la frontera (por ejemplo, si la tangencia entre el híper-plano de isocostos y la híper-superficie isocuanta se diera con uso negativo del factor i) las condiciones apropiadas de minimización del costo pasarán a ser las siguientes:

$$\lambda\ \partial f(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_i - w_i \leq 0 \text{ si } x_i^* = 0$$
$$\lambda\ \partial f(\boldsymbol{x}^*)/\partial x_j - w_j = 0 \text{ si } x_j^* > 0\ (j \neq i)$$

Estas son llamadas condiciones de **Karush-Kuhn-Tucker** o de *holgura complementaria* de optimalidad.

Para que el óptimo determinado por las condiciones de primer orden sea *único*, es suficiente estipular que resulte también un óptimo global bajo la condición de que $V(y)$ sea estrictamente convexo.

<u>Estática comparativa de las funciones de demanda condicionales con 2 insumos</u>

Escribimos nuevamente las condiciones de primer orden:

$$f(x_1(w_1, w_2, y), x_2(w_1, w_2, y)) \equiv y$$
$$w_1 - \lambda\, [\partial f(x_1(w_1, w_2, y), x_2(w_1, w_2, y))/\partial x_1] \equiv 0$$
$$w_2 - \lambda\, [\partial f(x_1(w_1, w_2, y), x_2(w_1, w_2, y))/\partial x_2] \equiv 0.$$

Notar que estas condiciones de primer orden son *<u>identidades</u>* – por definición son verdaderas para todos los valores de w_1, w_2 e y. Se las puede diferenciar, por consiguiente, con respecto a cualquiera de estas variables, por ejemplo a w_1:

$$\partial f/\partial x_1\, \partial x_1/\partial w_1 + \partial f/\partial x_2\, \partial x_2/\partial w_1 \equiv 0$$
$$1 - \lambda\, [\partial^2 f/\partial x_1^2\, \partial x_1/\partial w_1 + \partial^2 f/\partial x_1\partial x_2\, \partial x_2/\partial w_1] - \partial f/\partial x_1\, \partial \lambda/\partial w_1 \equiv 0$$
$$0 - \lambda\, [\partial^2 f/\partial x_2\, \partial x_1\, \partial x_1/\partial w_1 + \partial^2 f/\partial x_2^2\, \partial x_2/\partial w_1] - \partial f/\partial x_2 \partial \lambda/\partial w_1 \equiv 0$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas en términos matriciales, como el producto de una matriz de *3x3* y un vector columna de *3x1* (en el primer miembro) igual a un vector columna de *3x1* (en el segundo miembro):

(S) $\boldsymbol{Hz} = \boldsymbol{\gamma}.$

La matriz $\boldsymbol{H}$ es la hessiana orlada de acuerdo con las condiciones de 2º orden, y determinante *H:*

$$\begin{vmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ -f_1 & -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} \\ -f_2 & -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} \end{vmatrix}$$

El vector $\mathbf{z} = [\partial z/\partial w_1]$ es el vector de <u>respuesta</u> $[\partial\lambda/\partial w_1\ \ \partial x_1/\partial w_1\ \ \partial x_2/\partial w_1]^T$ y $\boldsymbol{\gamma}$ es el vector de <u>desplazamiento</u> $[0\ \ -1\ \ 0]^T$. Recordando que el signo del determinante de H es negativo por la condición de minimización, resolviendo el sistema (S), se obtiene inmediatamente:

$$\partial x_1/\partial w_1 = f_2^2\, /H < 0$$
$$\partial x_2/\partial w_1 = -f_2 f_1/H > 0$$
$$\partial x_2/\partial w_1 = \partial x_1/\partial w_2 = -f_2 f_1/H = -f_1 f_2/H > 0$$

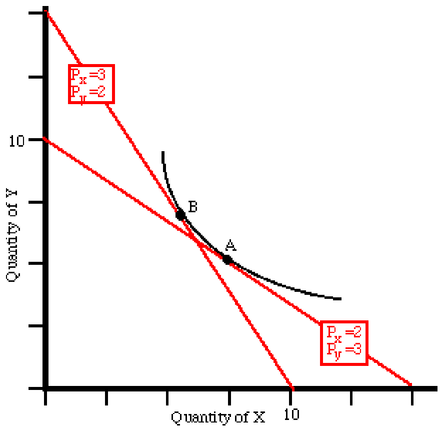


Figure 9-4

La primera condición implica que la curva de demanda condicional de x_1 en términos de su propio precio tiene pendiente <u>negativa</u>. La segunda condición implica que la curva de demanda condicional de x_2 en términos del precio w_1 tiene pendiente <u>positiva</u>. La tercera condición implica que los efectos-precio cruzados deben ser iguales (condición de <u>simetría</u> por el <u>teorema de Clairaut</u>) y <u>positivos</u> (es decir, son insumos sustitutos). *Con más de dos factores productivos, el efecto-precio cruzado puede tener cualquier signo (es decir, podemos tener* $\partial x_j/\partial w_i > 0$ es decir, *<u>complementarios</u>*). El gráfico representa la situación con dos factores, con producto constante, con un aumento del precio P_x desde 2 a 3 y disminución del precio del insumo y desde P_y=3 hasta P_y=2. La empresa sustituye al insumo que se ha vuelto relativamente más caro.

Funciones de costo medio y marginal

Denotamos como $\boldsymbol{x_f}$ al vector de insumos fijos de la firma, $\boldsymbol{x_v}$ al vector de factores variables y distribuimos al vector $\boldsymbol{w}$ en dos subvectores que corresponden a aquellos insumos, de modo que $\boldsymbol{w= (w_v, w_f)}$. Las funciones de demanda de factores condicionales $\boldsymbol{x_v}$ dependerán en general de la dotación de insumos fijos, por lo cual su demanda y la función de costos de corto plazo serán:

$$\boldsymbol{x_v = x_v (w, y, x_f)}$$
$$c\ \boldsymbol{(w, y, x_f) = w_v\, x_v (w, y, x_f) + w_f\, x_f}$$

El término $\boldsymbol{w_v\, x_v\, (w, y, x_f)}$ es el costo variable de corto plazo (CVC) y el término $\boldsymbol{w_f x_f}$ el costo fijo (CF). Otros conceptos que pueden ser identificados con estos elementos son:

Costo total de corto plazo: $CTC = c\,(\boldsymbol{w}, y, \boldsymbol{x_f}) = \boldsymbol{w_v\, x_v}\,(\boldsymbol{w}, y, \boldsymbol{x_f}) + \boldsymbol{w_f\, x_f}$
Costo medio de corto plazo: $CMC = c\,(\boldsymbol{w}, y, \boldsymbol{x_f})/y$
Costo medio variable de corto plazo: $CMVC = \boldsymbol{w_v\, x_v}\,(\boldsymbol{w}, y, \boldsymbol{x_f})/y$
Costo fijo medio: $CFM = \boldsymbol{w_f\, x_f}/y$
Costo marginal de corto plazo: $CMgC = \partial c\,(\boldsymbol{w}, y, \boldsymbol{x_f})/\partial y$.

Si todos los factores son variables, la empresa también optimizará su elección de $\boldsymbol{x_f}$ con lo cual la función de costos tendrá como únicos argumentos al nivel de producto y a los precios de todos los factores.

La función de costo de largo plazo expresada en términos de la función de corto plazo es obtenida de la manera siguiente: Si $\boldsymbol{x_f (w, y)}$ es la elección óptima de los factores fijos, la elección óptima de los factores variables de largo plazo será $\boldsymbol{x_v (w, y, x_f (w,y))}$. La función de costo de largo plazo será entonces:

$$c\,(\boldsymbol{w}, y) = \boldsymbol{w}_v\, \boldsymbol{x_v}(\boldsymbol{w}, y) + \boldsymbol{w_f\, x_f}(\boldsymbol{w}, y) = c\,(\boldsymbol{w}, y, \boldsymbol{x_f}(\boldsymbol{w}, y))$$

a partir de la cual son definidos los conceptos siguientes:

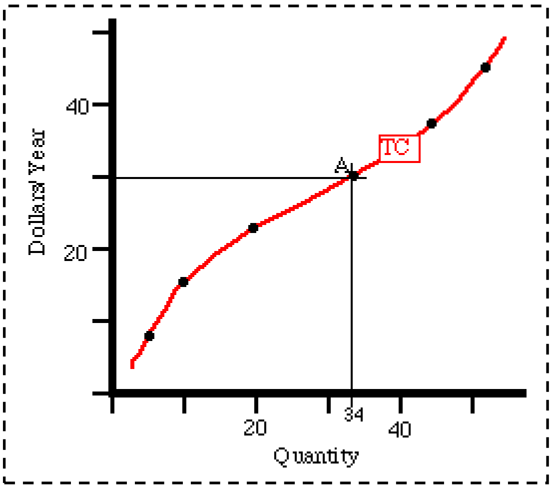
Costo medio de largo plazo = $CML = c\,(\boldsymbol{w}, y) / y$
Costo marginal de largo plazo = $CMgL = \partial c\,(\boldsymbol{w}, y) / \partial y$

Teorema *(Función de costo medio con rendimientos constantes a escala)* La función de costo de una función de producción con rendimientos constantes a escala puede ser escrita $c\,(\boldsymbol{w}, y)=y\ c\,(\boldsymbol{w}, 1)$.

Dem.) Si $\mathbf{x}^*$ es la canasta más barata para producir una unidad de producto a los precios $\boldsymbol{w}$ entonces $c\ (\boldsymbol{w}, 1) = \boldsymbol{wx}^*$. Pero como la tecnología tiene rendimientos constantes a escala, la canasta $y\boldsymbol{x}^*$ permitirá producir y. Si no minimiza el costo, existiría otra canasta $\boldsymbol{x'}$ que minimizaría el costo de producir y a los precios $\boldsymbol{w}$ con la propiedad $\boldsymbol{wx'} < \boldsymbol{wx}^*$, con lo cual $\boldsymbol{x'}/y$ podría producir 1 dado que la tecnología tiene rendimientos constantes a escala, contradiciendo la definición de $\boldsymbol{x}^*$. Esto significa que $c\ (\boldsymbol{w}, y)=\boldsymbol{w}\ y\ \boldsymbol{x}^*=y\ c\ (\boldsymbol{w}, 1)$. Ergo, con rendimientos constantes a escala, el costo medio, el costo medio variable y el costo marginal coincidirán.

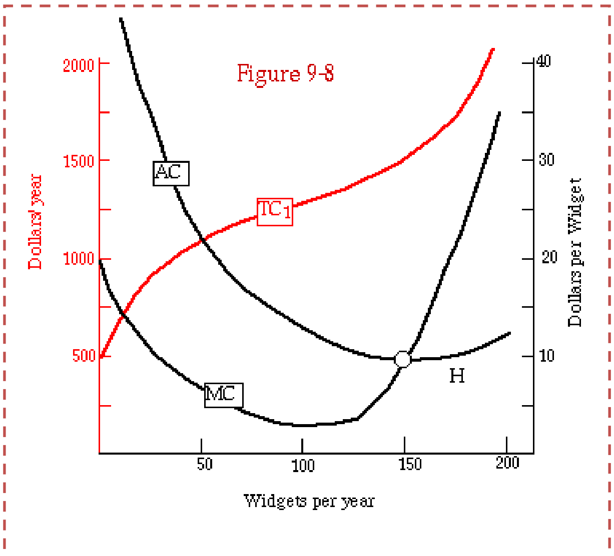
Geometría de los costos

La primera figura adjunta muestra un ejemplo de evolución del costo total de producción de una firma en términos de su producto en el largo plazo. Nótese que por construcción el *CML* es inicialmente decreciente – explicable por la incidencia del decrecimiento del costo fijo medio con el nivel de producto – hasta alcanzar un mínimo en *Q=34*, a partir de cuyo nivel comienza a crecer nuevamente en razón del crecimiento del costo medio variable de largo plazo.

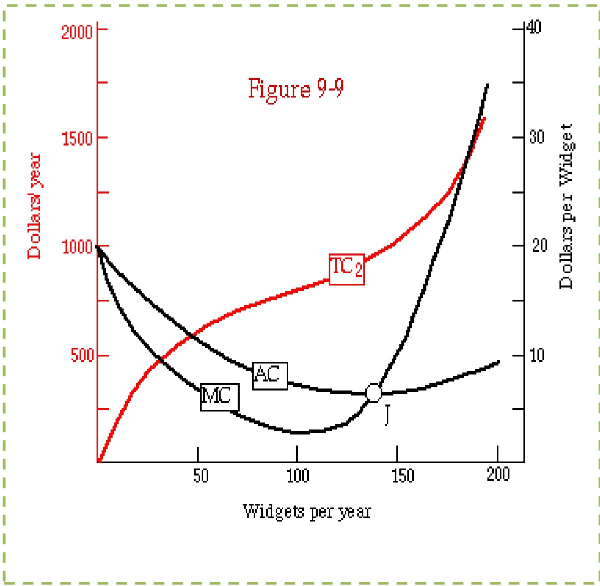


Relación entre las curvas de costo medio y marginal

Llamamos y^* a la producción de costo medio mínimo, que es igual a 34 en el gráfico; luego a la izquierda de y^* el costo medio es decreciente: $y \leq y^* \Rightarrow d/dy\,(c(y)/y) \leq 0$. Es decir, $(yc'(y)-c(y))/y^2 \leq 0\ (y \leq y^*) \Rightarrow c'(y) \leq c(y)/y\ (y \leq y^*)$. Luego, a la izquierda del punto de costo medio mínimo el costo marginal es *inferior* al costo medio. A su derecha, $y \geq y^* \Rightarrow d/dy\,(c(y)/y) \geq 0$. Luego, a la derecha de la producción de costo medio mínimo el costo marginal debe ser *superior* al costo medio: $(yc'(y)-c(y))/y_2 \geq 0\ (y \geq y^*) \Rightarrow c'(y) \geq c(y)/y\ (y \geq y^*)$. Como ambas desigualdades deben verificarse en y^* se tiene que $c'(y^*) = c(y^*)/y^*$, o sea *el costo marginal debe igualarse al costo medio para la producción de costo medio mínimo.*



Otro teorema que se obtiene simplemente es el siguiente: el *costo medio variable cuando se tiene un producto igual a cero es igual al costo marginal*. En efecto, se define al $CMV(y) = cv(y)/y$. Si $y \rightarrow 0$ la expresión tiende a un límite indeterminado. Mediante la regla de L' Hôpital $\lim_{y\rightarrow 0} cv(y)/y = cv'(0)/1$. Luego *el costo variable medio para un producto igual a cero es igual al costo marginal*.



La figura 9-8 ilustra la situación de una empresa que tiene costos fijos positivos, por lo cual la curva de CFM tiende hacia infinito a medida que la producción tiende a cero (TC_1 costos totales, *AC* = Costo medio y *MC* = costo marginal). En la Figura 9-9 que le sigue se presenta el caso de una firma que carece de costos fijos.

Propiedades de la función de costos

1.- Es no-decreciente en $\mathbf{w}$: $\mathbf{w}' \geq \mathbf{w} \Rightarrow c(\mathbf{w}', y) \geq c(\mathbf{w}, y)$

Dem. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ son las canastas minimizadoras del costo asociadas con $\mathbf{w}$ y $\mathbf{w}'$, $\mathbf{wx} \leq \mathbf{wx}'$ y, como $\mathbf{w}' \geq \mathbf{w}$, $\mathbf{w}'\mathbf{x}' \geq \mathbf{w}\mathbf{x}'$. Por carácter transitivo $\mathbf{w}'\mathbf{x}' \geq \mathbf{w}\mathbf{x}$.

2.- Es homogénea de grado 1 en $\mathbf{w}$, es decir $c(t\mathbf{w}, y) = t\, c(\mathbf{w}, y)$ para $t>0$.

Dem. Se demostrará que si $\mathbf{x}$ es la canasta minimizadora del costo a los precios $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{x}$ también es la que minimiza el costo a los precios $t\mathbf{w}$. De no serlo, existiría otra canasta $\mathbf{x}'$ minimizadora con la propiedad $t\,\mathbf{wx}' < t\,\mathbf{wx}$. Pero esta desigualdad implica que $\mathbf{wx}' < \mathbf{w}\,\mathbf{x}$. En definitiva, alterar la escala de los precios factoriales no cambia la composición de la canasta pero aumenta el costo exactamente en la misma medida: $c(t\mathbf{w}, y) = t\, c(\mathbf{w}, y)$.

3.- Es cóncava en $\mathbf{w}$: $c(t\mathbf{w}+(1-t)\mathbf{w}', y) \geq t\, c(\mathbf{w}, y)+(1-t)c(\mathbf{w}', y)$, $1 \geq t \geq 0$.

Dem. Consideremos dos combinaciones precio-cantidad minimizadoras del costo $(\mathbf{w}, x)$, $(\mathbf{w}', x')$. Calculamos $1 \geq t \geq 0$ y establecemos un vector de precios $\mathbf{w}'' = t\,\mathbf{w} + (1-t)\,\mathbf{w}'$. La función de costo a estos precios es $c(\mathbf{w}'', y) = \mathbf{w}''x'' = t\,\mathbf{w}\,\mathbf{x}'' + (1-t)\,\mathbf{w}'\mathbf{x}''$. Dado que $\mathbf{x}''$ no será necesariamente la canasta minimizadora del costo a los precios $\mathbf{w}'$ o $\mathbf{w}$ para producir el producto y, tenemos que $\mathbf{w}\,\mathbf{x}'' \geq c(\mathbf{w}, y)$, $\mathbf{w}'\mathbf{x}'' \geq c(\mathbf{w}', y)$. Por lo tanto,

$c(\mathbf{w}'', y) \geq t\, c(\mathbf{w}, y)+(1-t)c(\mathbf{w}', y)$, que era la tesis.

4.- La función $c(\mathbf{w}, y)$ es continua en $\mathbf{w}$, si $\mathbf{w} \gg \mathbf{0}$. Esto surge del Teorema del Máximo que ya hemos visto en la teoría de la demanda.

Lema de Shephard y Teorema de la envolvente

Sea $x_i(\mathbf{w}, y)$ la demanda condicional del factor i. Luego si la función de costos es diferenciable en $(\mathbf{w}, y)$ con $w_i>0$ (i=1, ..., L) se tiene que

$$x_i(\mathbf{w}, y) = \partial c(\mathbf{w}, y)/\partial w_i \; (i= 1, 2, ...L)$$

Dem. Llamemos $\mathbf{x}^*$ a la canasta minimizadora del costo que produce y a los precios $\mathbf{w}^*$. Definimos la función $g(\mathbf{w})=c(\mathbf{w}, y) - \mathbf{w}\,\mathbf{x}^*$. Esta función es siempre no positiva porque $c(\mathbf{w},y)$ es el costo más bajo de producir y. Pero debe cumplirse $g(\mathbf{w}^*)=0$. Como éste es el valor máximo que alcanza la función, su primera derivada debe anularse:

$$\partial g(\mathbf{w}^*)/\partial w_i = \partial c(\mathbf{w}, y)/\partial w_i - x_i=0 \; i=1, ...,L.$$

Por consiguiente el vector de insumos que minimiza el costo viene dado por el vector de derivadas de la función de costos con respecto a los precios.

Teorema de la envolvente

Este teorema es un teorema básico utilizado para resolver problemas de maximización en microeconomía. Puede ser utilizado para demostrar el lema de Hotelling, el de Shephard y la identidad de Roy. La tesis afirma que en un problema arbitrario de maximización donde la función objetivo depende de un parámetro a: $M(a) = \max_x f(x,a)$ en el que la función $M(a)$ proporciona el valor maximizado de la función objetivo f como función del parámetro a. Sea ahora $x(a)$ la solución del problema en términos del parámetro (a). Luego se cumple que $M(a) = f(x(a), a)$. El teorema nos indica cómo cambia $M(a)$ a medida que cambia a,

$$dM(a) / da = \partial f(x^*, a)/\partial a \,|_{x^*= x(a)}$$

O sea: la derivada de M con respecto a a viene dada por la derivada parcial de $f(x, a)$ con respecto a a, manteniendo fijo x, y evaluando posteriormente la derivada en el punto de elección óptima $x^*=x(a)$.

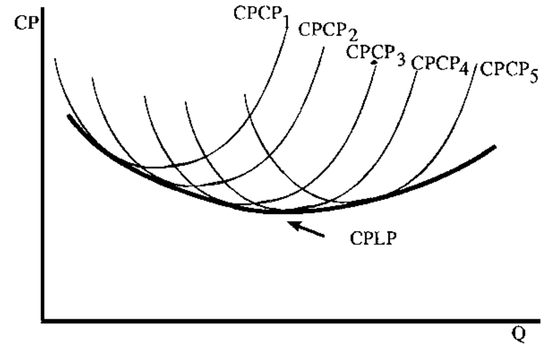


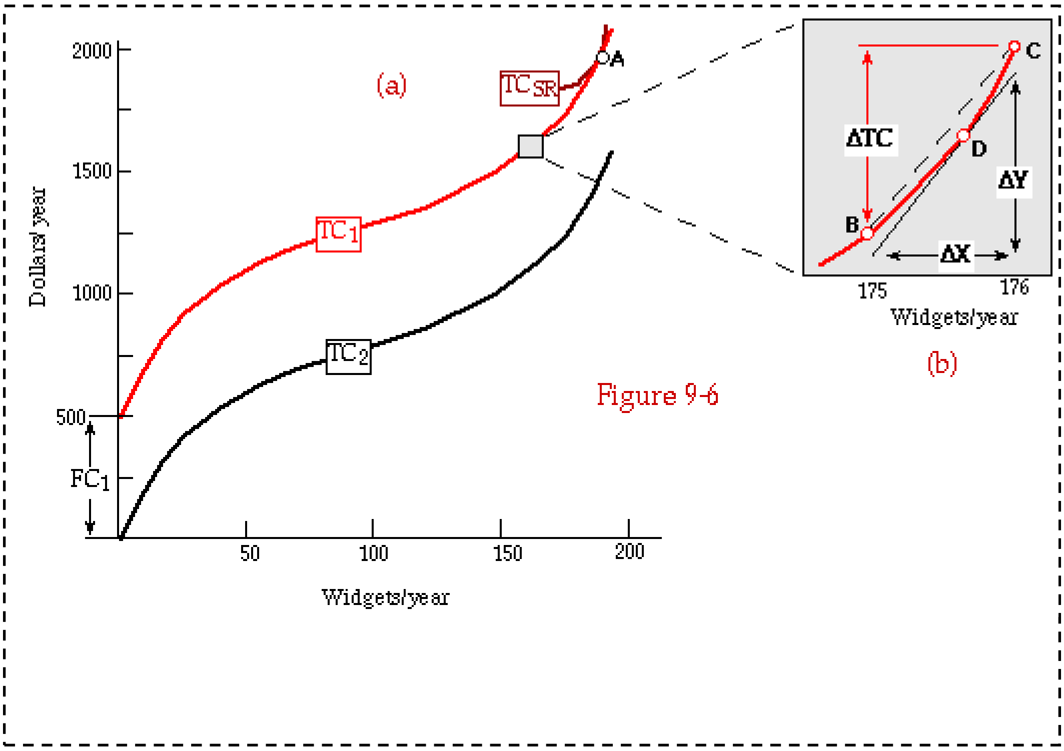
Ilustración: Tangencia de las Curvas de Costo Promedio de Corto Plazo (CPCPi) y Largo Plazo (CPLP)

Aplicación Este teorema ayuda a explicar el comportamiento geométrico de las curvas de costo de corto y largo plazo. Sabemos que la curva de largo nunca puede yacer por encima de cualquier curva de costo de corto plazo. Ahora bien, omitiendo los precios que supondremos fijos, escribimos la curva de costos de largo plazo como $c(y)=c(y, z(y))$. Aquí $z(y)$ es la demanda que minimiza costos de un único factor que termina siendo fijo en el corto plazo. Sea y^* un nivel dado de producto, $z^*=z(y^*)$ la demanda asociada de largo plazo para el factor fijo. El costo de corto plazo es $c(y, z^*)$ que debe ser al menos mayor que el costo de largo plazo $c(y, z(y))$ para cualquier nivel de producto y. La curva de corto plazo será igual a la de largo plazo al nivel de producto y^*, luego $c(y^*, z^*)=c\, y^*, z(y^*))$. *Por lo tanto las curvas de costo de largo y de corto plazo deben ser tangentes en z**. Esto es lo que afirma el teorema anterior. La pendiente de la curva de largo plazo en y^* es

$$dc\ (y^*, z(y^*))/dy = \partial c\ (y^*,z^*)/\partial y + \partial c(y^*, z^*)/\partial z\ \partial z\ (y^*)/\partial y.$$

Pero como z^* es la elección óptima cuando el nivel de producto es y^*, tenemos que $\partial c\ (y^*, z^*)/\partial z=0$. *Luego los costos marginales de largo plazo en* y^* *deben ser iguales a los de corto plazo en* (y^*, z^*).

Con este teorema de la envolvente también podemos ver su vinculación con el costo marginal. Analicemos la siguiente figura:



Calculamos la derivada de la función de costos con respecto al producto y. Según el teorema de la envolvente, esta derivada es igual a la derivada de la función de Lagrange con respecto a y. La función de Lagrange del problema de minimización de costos (con 2 insumos) es:

$$L\ (\lambda, \mathbf{x}) = \boldsymbol{w}\ \mathbf{x} - \lambda\ (f(\mathbf{x})\text{-}y) = w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda\ (f(x_1, x_2) - y).$$

Luego, $\partial c\ (w_1, w_2, y)/\partial y = \lambda$. *Por consiguiente, el parámetro de Lagrange del problema de minimización del costo total es el costo marginal*. En la figura anterior están representadas dos curvas de costo total de corto plazo (a precios fijos de los factores). TC_1 incluye los costos fijos FC_1, mientras que TC_2 no. En la parte (b) se aprecia una expansión de la figura (a) incluida dentro del cuadrado, mostrando la definición rigurosa del costo marginal (pendiente de la curva de costo total) y la definición aproximada (aumento del costo total cuando la cantidad producida aumenta en una unidad).