Programación Lineal

Voy a seguir los próximos puntos del libro de Robert J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 2001.

Recomiendo leer el capítulo XVIII del Tratado de Microeconomía. El objetivo de este documento es complementar dicho capítulo.

Introducción La Optimización de una Planta Productiva

Imagínense que estamos en una empresa industrial. La empresa puede producir distintos bienes, que enumeramos como $1, 2,\ldots, n$. Estos bienes son construidos/manufacturados /producidos a partir de algunos insumos materiales básicos. Supongan que hay m insumos materiales, que enumeraremos como $1, 2,\ldots, m$. Las decisiones a tomar son complejas, y aparecen a medida que van cambiando las condiciones del mercado. Pero para describir un problema simplificado y que tenga cierto realismo, vamos a presentar una foto de esta evolución dinámica. En este momento preciso, la fábrica tiene una cantidad b_i del insumo material i. Denotaremos al precio de este insumo como ρ_i. Además, cada bien producido requiere cantidades determinadas de los distintos insumos. Por ejemplo, producir una unidad del producto j requiere una cantidad conocida a_{ij} del insumo material j. Y el producto final j-ésimo puede venderse a un precio de mercado conocido igual a σ_j por unidad.

En esta sección haremos el supuesto de que *la empresa productiva es pequeña con respecto a todo el mercado y que, por consiguiente, no puede cambiar el valor de mercado de sus insumos básicos, ni tampoco alterar el de sus productos.*

Vamos a estudiar dos problemas de optimización que luego veremos cómo están vinculados entre sí:

1. *El Gerente de Producción Optimista* El primer problema es el del gerente de producción de la empresa. Se trata de cómo utilizará los insumos materiales que están a su disposición. Supongamos que decide producir x_j unidades del producto j $(j= 1,\ldots, n)$. El ingreso obtenido con esta producción de 1 unidad del producto j es σ_j. Pero también hay que considerar el costo de las materias primas utilizadas. El costo de producir 1 unidad del producto j es $\sum_{i=1}^{m} \rho_i\, a_{ij}$. Luego, hay un ingreso neto asociado a la producción de 1 unidad, que es la diferencia entre el ingreso unitario y el costo unitario. Como el ingreso neto juega un papel importante en el modelo, vamos a introducir la notación siguiente:

$$c_j \equiv \sigma_j - \sum_{i=1}^{m} \rho_i\, a_{ij}.\ (j=1, \ldots, n).$$

Por lo tanto, el ingreso o beneficio neto de producir x_j unidades de j es simplemente $c_j\, x_j$ y el beneficio total resultante es

$$[1] \qquad \sum_{j}^{n} c_j\, x_j.$$

El objetivo del gerente de planeamiento, es simplemente maximizar este índice [1]. Pero hay restricciones sobre la producción que deben cumplirse. Por ejemplo, la cantidad x_j a producir no puede ser negativa; por lo tanto, agregamos la restricción

[2] $x_j \geq 0$ $(j=1,\ldots, n)$.

En segundo lugar, no puede producir más producto que el que le permiten sus insumos disponibles. La cantidad consumida del insumo i viene dada por $\sum_j a_{ij} x_j$ por lo cual deberán satisfacerse las restricciones siguientes:

[3] $\sum_i a_{ij} x_j \leq b_i$ $(i=1,\ldots, m)$.

En resumen, la tarea del gerente de producción es calcular los niveles óptimos de x_j, $j=1,\ldots n$ a fin de maximizar [1] sujeto a las restricciones [2] y [3]. Éste es un típico problema de programación lineal. Este ejemplo particular es llamado ***problema de asignación de recursos***.

2. *El Contralor Pesimista* En otra oficina de la empresa hay un ejecutivo al que llamamos contralor. Entre otras cuestiones, el contralor tiene la función de asignar valor a los insumos materiales disponibles. (Se necesitan estos valores para fines contables y de planeamiento, a fin de determinar el costo de los inventarios). Hay ciertas reglas para fijar estos valores. La regla más importante (y la única relevante en nuestra discusión) es la siguiente: *La empresa debe estar dispuesta a vender las materias primas si otra empresa ofrece comprarlos a un precio coherente con estos valores*. Denotemos como w_i al valor unitario asignado a la materia prima i-ésima $(i=1, 2,\ldots, m)$. O sea que éstos son los números que debe determinar el contralor. El costo de oportunidad de tener b_i unidades del insumo material i es $b_i\, w_i$, y por lo tanto el **costo total de oportunidad** es

[4] $\sum_i b_i\, w_i$.

El objetivo del contralor es minimizar este costo de oportunidad perdido (de manera que los estados financieros parezcan lo mejor que se pueda). Pero aquí también hay restricciones. En primer lugar, cada valor unitario asignado w_i no debe ser inferior al precio unitario que prevalece en el mercado ρ_i, porque si no fuera así alguien de afuera compraría las materias primas a un precio menor que ρ_i, lo que contradiría el supuesto de que ρ_i es el precio que prevalece en el mercado. Por consiguiente,

[5] $w_i \geq \rho_i$ $(i=1,\ldots, m)$.

Fíjense que también debe cumplirse:

[6] $\sum_i w_i\, a_{ij} \geq \sigma_j$ $(j=1,\ldots, n)$.

Si así no fuera para algún producto j, alguien de afuera podría comprarle a la empresa el producto j, por ejemplo, y venderlo a un precio más bajo que el precio de mercado vigente, lo que contradice que σ_j sea el precio de mercado que prevalece, que no puede disminuirse por acciones unilaterales de la empresa estudiada. Minimizar [4] sujeto a las restricciones [5] y [6] es un problema de programación lineal, que adopta una forma más sencilla si hacemos lo siguiente:

$$y_i = w_i - \rho_i, \quad (i=1,\ldots, m).$$

Dicho en palabras, y_i es el incremento de valor unitario del insumo i, que representa el “mark-up” que la empresa fijaría si quisiera simplemente actuar como revendedor de las materias primas y venderlas así al mercado. Usando estas variables, el problema del contralor es minimizar

$$\sum_i b_i y_i$$

Sujeto a:

$$\sum_i y_i a_{ij} \geq c_j \ (j=1, \ldots, n)$$

y

$$y_i \geq 0 \quad (i=1, \ldots, m).$$

Observar que se eliminó el término $\sum_i b_i \rho_i$ de la función objetivo. Se trata de una **constante** (el valor de mercado de los insumos materiales), que, si bien afecta al valor de la función objetivo que se está minimizando, no tiene ningún impacto sobre el valor óptimo de las variables (que son de interés del contralor).

El problema típico de programación lineal

En este ejemplo, aparecen variables cuyos valores deben ser fijados a nivel óptimo, que serán llamadas **variables de decisión**. Típicamente las representaremos como x_j $(j=1, 2,\ldots n)$. En programación lineal, siempre el óptimo es maximizar o minimizar una función lineal de estas variables de decisión,

$$\zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

A esta función se la denomina **función objetivo**. A veces los problemas del mundo real se pueden formular más genuinamente como minimizaciones (ya que en general los planificadores del mundo real parecen ser siempre pesimistas), pero al formular el problema matemáticamente, resulta mejor trabajar con problemas de maximización. Naturalmente, la conversión de una forma a la otra es matemáticamente trivial (digamos que maximizar ζ es lo mismo que minimizar $-\zeta$).

Además de la función objetivo, tenemos las restricciones. Algunas son muy simples, por ejemplo: algunas variables de decisión deben ser no negativas. Puede haber restricciones más complicadas. Pero en todos los casos las restricciones son ya de igualdad, ya de desigualdad asociada con alguna combinación lineal de las variables de decisión:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \ \{ \geq, =, \text{ó} \leq \} \ b.$$

Es simple convertir las restricciones de una forma a otra. Por ejemplo, una restricción de desigualdad

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \ \leq b$$

puede convertirse en una restricción de igualdad incorporando otra variable w, llamada **variable slack**:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \ \ldots + a_nx_n + w = b. \qquad (w \geq 0)$$

Por otra parte, la restricción de igualdad

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

puede ser convertida en desigualdad, mediante dos restricciones

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq b$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \geq b.$$

Luego, no existe una preferencia a priori por la forma en que las restricciones sean planteadas – por supuesto, siempre que sean lineales. Pero desde un punto de vista matemático, veremos que hay una presentación preferida, que es la de plantear a las restricciones como de menor o igual estipulando que todas las variables de decisión sean no negativas. Por lo tanto, el problema de programación lineal que estudiaremos será formulado de la forma siguiente:

Maximizar $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots. + c_nx_n$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$$

De los programas lineales formulados de esta forma diremos que son **programas en forma típica**. Siempre usaremos m para el número de restricciones y n para el número de variables de decisión.

Un conjunto de valores específicos de las variables de decisión es llamado una **solución**. Una solución $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ es **factible** si satisface todas las restricciones. Es denominada **óptima** si logra el óptimo buscado. Hay problemas que no tienen solución factible, como lo ilustra el ejemplo siguiente:

Maximizar $5\,x_1 + 4\,x_2$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$-2x_1 - 2x_2 \leq -9$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

De hecho, la segunda restricción implica $x_1 + x_2 \geq 4{,}5$, lo que contradice a la primera. Si un problema no tiene solución factible (adviértase que la factibilidad o no factibilidad se determina exclusivamente analizando las restricciones del problema) decimos que ese problema es **no factible**.

En el otro extremo de los problemas no factibles se sitúan los problemas sin solución acotada. Un problema es denominado **no acotado** si tiene soluciones factibles pero con valores arbitrariamente amplios de la función objetivo. Sea por ejemplo el problema

Maximizar $x_1 - 4x_2$

Sujeto a

$-2x_1 + x_2 \leq -1$

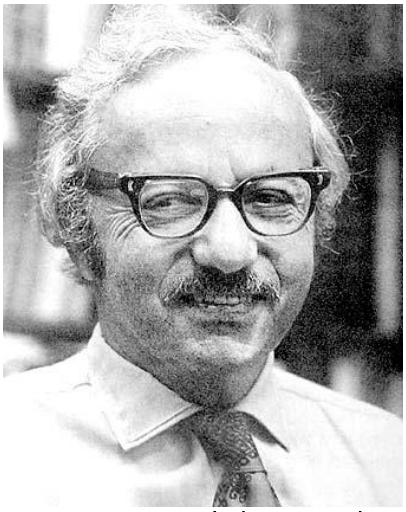
$-1x_1 - 2x_2 \leq -2$

$x_1 , x_2 \geq 0.$

Luego, podemos hacer x_2 igual a cero y que x_1 sea muy grande. Siempre que x_1 sea mayor que 2 la solución seguirá siendo factible, pero a medida que crece, la función objetivo $\rightarrow +\infty$. Luego, el problema no resulta acotado. Además de obtener las soluciones de un problema lineal, también a veces interesa detectar si un problema es o no factible o acotado.

Nota histórica

El tema programación lineal tiene sus raíces en el estudio de desigualdades lineales, que se remonta a 1826 con el trabajo desarrollado por Joseph Fourier, de quien nace el método de eliminación llamado de Fourier-Motzkin. Desde entonces, muchos matemáticos han demostrado casos especiales del resultado más importante en ese campo, a saber el teorema de dualidad. Se hicieron aplicaciones a partir de 1939 cuando L. V. Kantorovich, un matemático ruso, advirtió la importancia práctica de cierto tipo de problemas de programación lineal y obtuvo un algoritmo para resolverlos.[1] Desafortunadamente, por muchos años las contribuciones de Kantorovich fueron desconocidas en occidente y no tuvieron repercusión alguna detrás de la cortina de hierro. La programación lineal fue planteada como un modelo matemático desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial para planificar los gastos y los rendimientos, a fin de reducir los costos del ejército y aumentar las pérdidas del enemigo. Se mantuvo en secreto hasta 1947, cuando G. B. Dantzig inventó el método simplex para resolver problemas lineales que se planteaban a la Fuerza Aérea de Estados Unidos. La primera publicación de la obra de Dantzig data de 1951.[2] *En 1961, Wassily Leontief se dirigió al decano de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires solicitándole autorización para traducir y publicar en una revista que recogiera las mejores obras científicas en lengua no inglesa un trabajo del año 1941 en el que José Barral Souto había "anticipado en su esencia el enfoque de la programación lineal en la teoría económica*".[3]



George B. Dantzig (1914-2005)

José Barral Souto (1903-1976)
La combinación lineal de los errores, como método para analizar las series cronológicas (1967)

En 1975, la Academia Sueca de Ciencias les otorgó el premio Nobel de ciencias económicas a L.V. Kantorovich y T.C. Koopmans, "por sus contribuciones a la teoría de la asignación óptima de recursos". Aparentemente, la academia consideró que los trabajos de Dantzig eran demasiado matemáticos para el premio en ciencias económicas (y no hay un premio Nobel en matemáticas). En la posguerra, muchas industrias lo usan habitualmente en su planificación diaria.

---

[1] Kantorovich, L. (1960), *Mathematical methods in the organization and planning of production*, Management Science 6, 550–559.
[2] Dantzig, G. (1951), *Application of the simplex method to a transportation problem*, in T. Koopmans, ed., *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley and Sons, New York, pp. 359–373; Dantzig, G. (1951), *A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem*, in T. Koopmans, ed., *Activity Analysis of Production and Allocation*, New York, pp. 330–335.
[3] Véase Manuel Fernández López, Centenario de José Barral Souto, El Genio Gallego que anticipó la Programación Lineal, Revista Galega de Economía, vol. 13, núm. 1-2 (2004).

El Método Simplex: ejemplo

Comenzamos con un ejemplo. Indicamos el número de cada ecuación siguiendo a Vanderbei, para que ustedes puedan luego ubicarla fácilmente en su libro.

[2.1] Maximizar $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

Sujeto a:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

En primer término vamos a agregar las variables slack. Para cada desigualdad de [2.1] introducimos una nueva variable representando la diferencia entre el segundo miembro y el primero. Por ejemplo, en la primera desigualdad, $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$, introducimos la variable slack $w_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$. Está claro que con esta definición de w_1 y la condición que w_1 sea no negativa, el resultado es equivalente a la restricción original. Aplicamos este procedimiento para cada inecuación de menor-o-igual y se obtiene una representación equivalente del problema:

[2.2] Maximizar $\zeta = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ (ζ es el valor alcanzado por la función objetivo)

Sujeto a

$$w_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$w_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$w_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$
$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0.$$

El método simplex es un proceso iterativo en el que se comienza con una solución $x_1, x_2, .., w_3$ que satisfaga las ecuaciones y requisitos de no-negatividad de [2.2], a partir de lo cual se busca una nueva solución $x_1^1, x_2^1, \ldots, w_3^1$, que sea mejor – o sea, que dé lugar a un mayor valor de la función objetivo: $5x_1^1 + 4x_2^1 + 3x_3^1 > 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$. Continuamos con este proceso hasta que la solución a que se llega no pueda ser mejorada. Entonces, la solución final es la solución óptima.

Para arrancar el proceso iterativo, *se requiere una solución inicial que sea factible* $x_1, x_2, \ldots, w_3$. En nuestro caso planteado más arriba, esto es sencillo. Simplemente fijamos a todas las variables originales en su valor cero y usamos las ecuaciones que definen las variables slack: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, w_1 = 5, w_2 = 11, w_3 = 8$. El valor de la función objetivo asociado es $\zeta = 0$. Ahora nos preguntamos si puede mejorarse esta solución. Como el coeficiente de x_1 es positivo, si incrementamos esta variable hasta algún valor positivo, también se incrementará ζ. Ahora bien, si modificamos estos valores, los valores de las variables slack también cambiarán. Debemos asegurarnos que no se hagan negativas. Como $x_2 = x_3 = 0$, vemos que $w_1 = 5 - 2x_1$. Luego, para que w_1 se mantenga no-negativa se requiere que x_1 no supere $5/2$. En forma semejante, la no-negatividad de w_2 impone la cota $x_1 \leq 11/4$ y la no-negatividad de

w_3 requiere $x_1 \leq 8/3$. Como se deben cumplir todas estas condiciones, vemos que x_1 no puede ser mayor que el mínimo de estas cotas: $x_1 \leq 5/2$. Nuestra nueva solución mejorada es, por consiguiente:

$$x_1 = 5/2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = ½.$$

El primer paso fue directo. A partir de aquí resulta menos claro cómo habría que proceder. Lo que hizo que el primer paso fuera sencillo es que teníamos un grupo de variables que estaban fijadas inicialmente en cero y teníamos a las demás expresadas en términos de ellas. Esta propiedad puede arreglarse para la nueva solución. Hay que reescribir las nuevas ecuaciones de [2.2] de manera que x_1, w_2, w_3, y ζ queden como funciones de w_1, x_2, y x_3. Es decir, tenemos que intercambiar los roles de x_1 y w_1. A tal efecto, usamos la ecuación de w_1 en [2.2] resuelta en términos de x_1: $x_1 = 5/2 - 1/2\ w_1 - 3/2\ x_2 - 1/2\ x_3$. Las ecuaciones para w_2, w_3, y ζ deben ser manipuladas de manera que x_1 no aparezca a la derecha. La forma más sencilla de lograr esto es hacer “operaciones de fila” en las ecuaciones en [2.2]. Por ejemplo, si tomamos la ecuación para w_2 y restamos dos veces la ecuación de w_1 y luego traemos el término w_1 a la derecha, obtenemos $w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2$. Realizando operaciones análogas con w_3 y ζ, se pueden re-escribir las ecuaciones en [2.2] como

[2.3] $\zeta = 12.5 - 2.5w_1 - 3.5x_2 + 0.5x_3$

$$x_1 = 2.5 - 0.5w_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3$$
$$w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2$$
$$w_3 = 0.5 + 1.5w_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3.$$

Observen que podemos recuperar nuestra solución fijando las variables “independientes” en cero, y usar las ecuaciones para leer los valores resultantes de las variables “dependientes”.

Ahora se ve que al aumentar w_1 o x_2 se producirá una disminución del valor de la función objetivo, y también que x_3, que es la única variable con un coeficiente positivo, es la única variables independiente que podemos aumentar para conseguir un aumento adicional de la función objetivo. Pero ahora de nuevo, debemos calcular cuánto podríamos aumentarla sin violar el requerimiento de que las variables dependientes queden no-negativas. Ahora vemos que la ecuación de w_2 no se ve afectada por cambios en x_3, pero las ecuaciones de x_1 y w_3 sí imponen cotas superiores, a saber $x_3 \leq 5$ y $x_3 \leq 1$. El último es el límite más estricto, por lo que la nueva solución será:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = 0.$$

El valor correspondiente de la función objetivo es $\zeta = 13$.

Ahora hay que ver si es posible aumentar la función objetivo y, en tal caso, en cuánto. Se requiere escribir las ecuaciones de tal forma que ζ, x_1, w_2, y x_3 queden expresadas como funciones de w_1, x_2, y w_3. Poniendo la última ecuación de [2.3] en términos de x_3 obtenemos:

$$x_3 = 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3.$$

También vemos que realizando operaciones apropiadas, se podrá eliminar x_3 de las restantes ecuaciones. El resultado es:

[2.4] $\zeta = 13 - w_1 - 3x_2 - w_3$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\ w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\ x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3. \end{aligned}$$

Ahora estamos listos para la tercera iteración. El primer paso es ver alguna variable que, teniendo un coeficiente positivo en la función objetivo, su aumento permita incrementar ζ. Pero ahora no hay tal variable (todas tienen un coeficiente negativo en la función objetivo). Este hecho lleva no sólo a que el método simplex se detenga, sino también a demostrar que la solución existente es óptima. Y la razón es simple: como las ecuaciones [2.4] son completamente equivalentes a [2.2] y, como todas las variables deben ser no-negativas, se sigue que $\zeta \leq 13$ para toda solución factible. Como nuestra solución actual llegó al valor 13, vemos en realidad que es óptima.

Diccionarios, Bases y otros conceptos

Los sistemas [2.2], [2.3] y [2.4] que hallamos en el proceso son llamados los **diccionarios**. A excepción de ζ, las variables del primer miembro (o sea, las que denominamos variables dependientes) son llamadas **variables básicas**. Las variables del segundo miembro (o sea las independientes) son llamadas **variables no básicas**. Las soluciones halladas colocando a las variables no básicas en cero, son llamadas **soluciones básicas factibles**.

Dijimos que para arrancar el proceso iterativo, *se requiere una solución inicial que sea factible*. Esto fue sencillo en el ejemplo que hemos dado. Pero no siempre es así. En tales casos, podríamos tener una base no factible que, por no tener todas las variables no-negativas, no podría ser elegida como punto de partida. No trataremos estos casos, pero es útil saber que hay formas sencillas de resolver estas situaciones. Al problema que se plantea en estos casos se lo llama de **Fase I**, y se denomina **Fase II** al proceso que se ha seguido partiendo de una solución básica factible a fin de localizar la base factible óptima (como hicimos en nuestro ejemplo).

El Método Simplex en general

Consideremos el problema general de programación lineal escrito en forma típica:

Maximizar $\sum^n c_j x_j$

sujeto a $\sum^n a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$

$x_j \geq 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$

Nuestra primera tarea es introducir variables de holgura y un nombre para el valor de la función objetivo:

[2.5] $\zeta = \sum^n c_j x_j$

$w_i = b_i - \sum^n a_{ij} x_j \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$

Como vimos en el ejemplo, a medida que el método simplex avanza, las variables de holgura se entrelazan con las variables originales y todas reciben el mismo tratamiento. Por lo tanto, a veces es conveniente tener una notación donde las variables de holgura no se distingan en forma tajante de las variables originales. Así que simplemente las vamos a agregar al final de la lista de variables-x:

$$(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}).$$

Es decir, hacemos $x_{n+i} = w_i$. Con esta notación, podemos escribir [2.5] como

[2.6] $\zeta = \sum^n c_j x_j$

$x_{n+i} = b_i - \sum^n a_{ij} x_j \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$

Este es nuestro diccionario de partida. A medida que progresa el simplex, se pasa de un diccionario a otro buscando la solución óptima. *Cada diccionario tiene m variables básicas y n no básicas*. Si denotamos como B a la colección de índices de las variables básicas, que inicialmente es $B=\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$ y como N a la colección de índices de las variables no básicas, inicialmente $N=\{1, 2, \ldots, n\}$, pero esto va cambiando luego de la primera iteración. A medida que se avanza, el diccionario aparecerá como

[2.6] $\zeta = \zeta^* + \sum^{j \in N} c_j^* x_{ij}$

$x_i = b_i^* - \sum^{j \in N} a_{ij}^* x_{ij} \qquad (i \in B)$

donde se indica con un asterisco a las variables que van modificándose a medida que avanza el proceso.

La variable que pasa de ser no-básica a básica se denomina *variable entrante*. Se elige de forma que aumente ζ: a saber, aquella con coeficiente positivo más alto en el conjunto $\{j \in N: c_j^* > 0\}$. Si este conjunto es vacío, se desprende que la solución es óptima. Si el conjunto contiene más de un elemento (el caso normal), se elegirá aquella que tenga el coeficiente positivo más grande. La variable que deja de ser básica pasando a ser no-básica se denomina *variable saliente*. Ésta se elige de modo de preservar el carácter no negativo de las variables básicas corrientes. Una vez que decidimos que x_k será la variable entrante, su valor aumentará de 0 a un valor positivo. Este incremento originará que cambien los valores de las variables básicas: $x_i = b_i^* - a_{ik}^* x_k, i \in B$.

Debe asegurarse que todas las variables sigan siendo no-negativas. Luego, requerimos que

[2.7] $b_i^* - a_{ik}^* x_k \geq 0, i \in B$.

Entre estas expresiones, la que puede hacerse negativa es aquella con a_{ik}^* positivo (las otras no cambian o aumentan). Luego, podemos limitar la atención a los i para los que $a_{ik}^*>0$. Para esa i, el valor alcanzado por x_k cuando la expresión se hace cero es

$$x_k = b_i/a_{ik}.$$

Como no queremos que éstos se hagan negativos, aumentamos x_k hasta el menor de estos números:

$$x_k = \text{mín } \{b_i^*/a_{ik}^*\} \text{ entre los } i \in B = \{a_{ik}^*>0\}$$

La regla para elegir la variable saliente es, luego: *elegir de* $\{i \in B, a_{ik}^*>0$ y b_i^*/a_{ik}^* *es mínimo*$\}$.

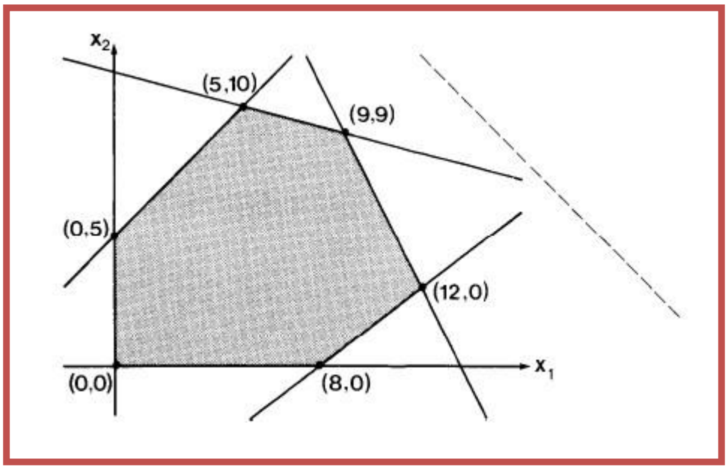
Una vez que han sido seleccionadas las variables básica-saliente y no básica-entrante, nos movemos a un nuevo diccionario, lo que implica hacer operaciones apropiadas fila para realizar el intercambio. Se llama *pivote* a la operación de pasar de un diccionario al siguiente.

Geometría de los problemas de PL (ver aquí)

Por ejemplo, un programa lineal simple en dos variables podría tener este aspecto:

Maximizar $x_1 + x_2$

$-x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 + 4x_2 \leq 45$
$2x_1 + x_2 \leq 27$
$3x_1 - 4x_2 \leq 24$
$x_1, x_2 \geq 0$



La interpretación geométrica está adjunta.

Cada desigualdad divide el plano (espacio) en una mitad en la que no puede existir solución y otra en la que sí puede. Por ejemplo, $x_1 \geq 0$ excluye soluciones a la izquierda del eje x_2 y $-x_1 + x_2 \leq 5$ implica soluciones que deben estar abajo y a la derecha de la línea $-x_1 + x_2 = 5$, dibujada entre $(0,5)$ y $(5,10)$.

El Simplex

Las soluciones deben yacer en la región de factibilidad delimitada por las regiones que se intersecan. A esta región se la denomina **simplex**.

El simplex es una **región convexa**: dados dos puntos de la región, todos los puntos del segmento de línea que está entre ambos también están en la región. La convexidad puede utilizarse para mostrar un hecho importante:

Teorema fundamental La solución de un problema de máximo (mínimo), si existe, siempre se alcanza en uno de los vértices del simplex. Pensemos en la función objetivo $x_1 + x_2$ que en nuestro caso genera la curva (línea) de nivel (de “indiferencia”) segmentada. Supóngase que esta línea se desliza desde $+\infty$ hacia el simplex. Si hay solución, la línea tocará primeramente al simplex en uno de sus vértices (una solución) o coincidirá con uno de sus bordes o facetas (soluciones múltiples) incluyendo a sus vértices. El método simplex busca de forma sistemática entre los vértices, trasladándose a nuevos vértices donde la función objetivo no alcanza un valor inferior, y es usualmente mayor, que el valor alcanzado en el vértice anterior.

Otras cuestiones La *linealidad* es importante, ya que si la función objetivo o el simplex fuera curvado, resultaría mucho más arduo indicar dónde está el óptimo, de existir éste. Si la intersección de los semi-espacios es vacía, el programa lineal *no es factible* Una restricción es *redundante* si el simplex definido por las restantes restricciones yace enteramente dentro de uno de sus semi-espacios. El simplex puede *no estar acotado*. El resultado es que la solución puede estar indefinida, y aún si está definida, a los algoritmos utilizados puede resultarles dificultoso localizar una solución.

Teoría de la Dualidad

"Desde la introducción del análisis marginal, ninguna idea ha resultado tan importante para la teoría fundamental de los precios como la de dualidad" (Kelvin Lancaster)

Asociado con todo problema lineal hay otro llamado su dual. El dual de este problema lineal dual es el problema original de programación (que a partir de ahora denominaremos *problema **primal** de programación*). El caso es que toda solución factible de uno de estos dos programas lineales permite acotar el valor alcanzado por la función objetivo del otro. Estas importantes ideas conforman la teoría de la dualidad, que estudiaremos ahora.

1. Motivación: Hallar una Cota Superior

Sea el ejemplo siguiente:

Maximizar $4x_1 + x_2 + 3x_3$

Sujeto a:
$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 \quad &\le 1 \\
3x_1 - x_2 + x_3 &\le 3 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

La primera observación es que toda solución factible facilita una cota inferior del valor de la función objetivo, ζ^*. Por ejemplo, la solución $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ nos dice que $\zeta^* \ge 4$. Pero, ¿es buena esta cota inferior? ¿está próxima al valor óptimo? Para saberlo, necesitamos cotas superiores, que pueden obtenerse de la siguiente manera. Multiplicando la primera restricción por 2 y sumándole 3 veces la segunda restricción:

$$
\begin{aligned}
2\,(x_1 + 4x_2) &\le 2\,(1) \\
+3\,(3x_1 - x_2 + x_3) &\le 3\,(3) \\
\hline
11x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\le 11.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como las variables son no-negativas, podemos comparar la suma con la función objetivo, notando que:

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 11.$$

Luego, se tiene $\zeta^* \le 11$. Hemos ubicado la búsqueda entre 9 y 11. Estas cotas dejan una zanja (la solución óptima debería estar allí), pero es mejor que no tener nada. Además lo podemos mejorar: para conseguir una cota superior mejor, aplicamos de nuevo la misma técnica de acotación, pero reemplazando los números que usamos por variables, y tratamos de hallar qué valor de estas variables proporcionan una cota superior mejorada. Comenzamos multiplicando ambas restricciones por dos números no-negativos, y_1 e y_2, respectivamente. Como estos números son no-negativos, se mantiene la dirección de ambas desigualdades. Luego,

$$
\begin{aligned}
y_1\,(x_1 + 4x_2 \quad) &\le y_1 \\
+y_2\,(3x_1 - x_2 + x_3) &\le 3y_2 \\
\hline
(y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + (y_2)x_3 &\le y_1 + 3y_2.
\end{aligned}
$$

Si además estipulamos que los coeficientes de las x_i sean tan grandes como el coeficiente correspondiente en la función objetivo,

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$4y_1 - y_2 \geq 1$$
$$y_2 \geq 3,$$

y ahora comparamos la función objetivo con respecto a esta suma (y su acotación):

$$\begin{aligned} \zeta &= 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ &\leq (y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + (y_2)x_3 \\ &\leq y_1 + 3y_2. \end{aligned}$$

Ahora disponemos de una cota superior, $y_1 + 3y_2$, que deberíamos minimizar a efectos de obtener la mejor cota superior. Luego, buscamos resolver el siguiente problema de optimización:

$$\text{Minimizar } y_1 + 3y_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 &\geq 4 \\ 4y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y_2 &\geq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Este problema es llamado el problema *dual* del problema asociado al problema de programación lineal. Ahora lo definiremos en términos generales.

El Problema Dual en general

Supongamos que tenemos un problema de programación en su forma típica:

[5.1] Maximizar $\sum^{n} c_j x_j$

Sujeto a $\sum^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, 2,\ldots, m)$

$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2,\ldots, n).$

El *problema dual* asociado viene dado por:

Minimizar $\sum^{m} b_i y_i$

Sujeto a $\sum^{m} y_i a_{ij} \geq c_j \quad (j=1, 2,\ldots, n)$

$y_i \geq 0 \quad (i=1, 2,\ldots, m)$

Al comenzar con [5.1], éste es llamado el *problema primal*. La primera cuestión en nuestra agenda es demostrar que tomar el dual del dual nos permite regresar al primal, para lo cual escribiremos el dual en forma típica. Luego, cambiaremos la minimización por una maximización y los signos de las restricciones de mayor-o-igual a restricciones de menor-o-igual. Naturalmente, todo esto no debe alterar el problema. Para cambiar una minimización en una maximización, tomamos nota de que minimizar algo es equivalente a maximizar su negativo y luego negar el resultado:

Minimizar $\sum^{m} b_i y_i =$ - Maximizar $-\sum^{m} b_i y_i$

Para cambiar las desigualdades, simplemente tenemos que multiplicar por (-1). Entonces la representación resultante en forma típica de nuestro problema dual será

- Maximizar $\sum(-b_i) y_i$

Sujeto a $\sum^{m} (-a_{ij}) y_i \leq - c_j \quad (j=1, 2, \ldots, n)$

$y_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m)$.

Ahora tomamos su dual:

- Minimizar $\sum^{n} (-c_j) x_j$

Sujeto a $\sum^{n}(-a_{ij})x_j \geq -b_i \quad (i=1, 2, \ldots, m)$

$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \ldots, n)$

Esta representación es, claramente, equivalente a [5.1].

<u>Teorema Débil de Dualidad</u>

Teorema 5.1 Si $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ es factible en el Primal y $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ es factible en el Dual, luego

$$\sum c_j x_j \leq \sum b_i y_i.$$

Dem. La demostración surge en forma directa por las siguientes desigualdades:

$$\sum c_j x_j \leq \sum_j (\sum_i y_i a_{ij}) x_j = \sum_i \sum_j y_i a_{ij} x_j = \sum_i (\sum_j a_{ij} x_j) y_i \leq \sum_i b_i y_i$$

La 1ra desigualdad surge porque cada x_j es no negativo y cada c_j no es mayor o igual que $(\sum_i y_i a_{ij})$. La 2da vale por razones similares.

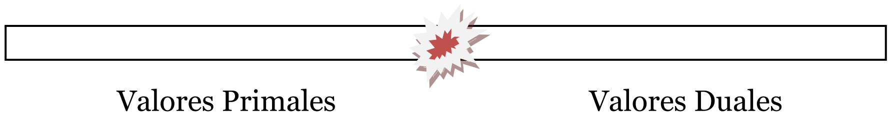


Figura 5.1 Representación de la acotación de los valores primales por los valores duales. No hay brecha entre el valor máximo del Primal y el valor mínimo del Dual.

El Teorema Débil de Dualidad dice que el conjunto de los valores primales yace a la izquierda del conjunto de los valores duales. *Ahora veremos que estos dos conjuntos son cerrados, y que el extremo derecho del Primal coincide con el extremo izquierdo del Dual, de modo que no hay brecha entre los valores óptimos del primal y del dual*. La ausencia de una brecha facilita un instrumento muy conveniente para verificar la existencia de optimalidad. Pues si podemos exhibir una solución factible del primal $(x_{1^*}, x_{2^*},\ldots x_{n^*})$ y una solución factible del dual $(y_{1^*}, y_{2^*}, \ldots, y_{m^*})$ tales que

$$\sum_j c_j x_j^* = \sum_i b_i y_i^*,$$

entonces podemos concluir que estas soluciones son óptimas para sus problemas respectivos. Para verificar que la solución del primal es óptima, sea otra solución factible $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Por el teorema débil de dualidad, tenemos que

$$\sum c_j x_j \leq \sum b_i y_{i^*} = \sum c_j x_{j^*}.$$

Ahora bien: como $x^* \equiv (x_{1^*},\ldots, x_{n^*})$ se supuso factible, vemos ahora que debe ser óptima. Un argumento análogo muestra que la solución dual es también óptima en el problema dual. Por ejemplo, considérense las soluciones $x= (0,\ 0.25,\ 3.25)$ e $y= (1,\ 3)$ en el ejemplo previo. Ambas soluciones son factibles, y dan lugar a un valor de las funciones objetivo igual a 10. Por consiguiente, por el teorema débil de dualidad, estas dos soluciones son óptimas para el primal y el dual, respectivamente.

Teorema Fuerte de Dualidad[4]

El enunciado de que nunca hay brecha entre los valores óptimos del Primal y el Dual conduce al Teorema Fuerte de Dualidad.

Teorema 5.2 *Si el Primal tiene una solución óptima* x^* *entonces el Dual también tiene una solución óptima* y^*. *Además,* $\sum c_j x_j^* = \sum b_i y_i^*$.

Antes que demostrarlo, lo veremos en una aplicación, para lo cual recordaremos el problema de programación anterior (ver página 13). La idea principal que deseo ilustrar es: mientras el simplex va resolviendo el problema Primal, también está resolviendo implícitamente el Dual, de tal manera que sea válido el teorema fuerte 5.2.

Para verlo, repasemos: comenzamos introduciendo en el Primal variables $\boldsymbol{w_i}$ llamadas slack. También podemos introducir variables slack en el Dual, llamadas, p.ej. $\boldsymbol{z_j}$ $(j=1,\ 2,\ 3)$. Como las desigualdades del Dual son de mayor-o-igual, podemos definir cada variable slack como la diferencia entre el 1º miembro y el 2º miembro. Por ejemplo, $z_1 = y_1 + 3y_2 - 4$. Luego, los diccionarios Primal y Dual son como sigue:

(P)
$$\zeta = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$
$$\begin{aligned} w_1 &= 1 - x_1 - 4x_2 \\ w_2 &= 3 - 3x_1 + x_2 - x_3. \end{aligned}$$

(D)
$$-\xi = -y_1 - 3y_2$$
$$\begin{aligned} z_1 &= -4 + y_1 + 3y_2 \\ z_2 &= -1 + 4y_1 - y_2 \\ z_3 &= -3 + y_2. \end{aligned}$$

Obsérvese que se ha indica en (D) el *negativo* de la función objetivo del dual, dado que prefiero *maximizar* la función objetivo que aparece en un diccionario. También, los números que figuran en el diccionario dual son los **negativos** de los del diccionario primal dispuestos en filas y columnas intercambiadas. En realidad, si sólo ponemos los números, nos queda:

0	4	1	3
1	1	-4	0
3	-3	1	-1

$\Longleftrightarrow$

Negativa

Traspta.

0	-1	-3
-4	1	3
-1	4	-1
-3	0	1

Luego, visto como tabla numérica, el diccionario dual es la negativa traspuesta del diccionario primal.

[4] Este teorema recibe también el nombre de *Teorema de Equilibrio*.

El Teorema Fuerte de Dualidad nos dice que, siempre que el Primal tenga solución óptima, también la tiene el Dual y no hay brecha de dualidad. Pero ¿qué pasa si el Primal carece de solución óptima? Por ejemplo, podría no estar acotado. La no acotación del Primal en forma conjunta con el Teorema Débil de Dualidad nos dice de inmediato que el Dual no debe ser factible. En forma semejante, si el Dual no está acotado, entonces no debe ser factible el Primal. Es natural esperar que estos 3 casos sean las únicas posibilidades, es decir: P con solución óptima-D con solución óptima; P sin solución óptima-D no factible; D sin solución óptima-P no factible. Pero resulta que hay una cuarta posibilidad que a veces se plantea: ambos problemas son no factibles. Tomemos p.ej. el problema siguiente:

Maximizar $x_1 - x_2$

Sujeto a $x_1 - x_2 \leq 1$

$-x_1 + x_2 \leq -2$

$x_1, x_2 \geq 0.$

Es fácil comprobar que este problema primal no es factible, ya que la intersección de las regiones definidas por las 2 primeras inecuaciones es vacía. Y el dual también. Estos problemas se caracterizan por presentar una gran brecha de no factibilidad, que va de $-\infty$ a $+\infty$.

La teoría de la dualidad es útil a menudo, ya que ofrece un *certificado de optimalidad*. Por ejemplo, supongamos que se les pidió resolver un programa lineal enorme y difícil. Después de pasar semanas o meses en la computadora, ustedes finalmente son capaces de utilizar el método simplex para resolver el problema, produciendo una solución óptima dual y^* además de la solución óptima primal x^*. Ahora, ¿cómo van a convencer al jefe de que la solución obtenida es la correcta? ¿Piensan pedirle que verifique la exactitud de sus programas de computación? Imposible. Y de hecho no es necesario. Todo lo que se necesita hacer es suministrar la solución Primal y la solución Dual, y sólo tiene que comprobar que la solución primal es factible para el problema Primal (eso es fácil), que la solución Dual es factible para el problema dual (es igual de fácil) y que los valores coinciden (eso es aún más fácil).

Holgura Complementaria

A veces es necesario recuperar una solución dual óptima cuando sólo se conoce una solución primal óptima. El siguiente teorema, conocido como *Teorema de Holgura Complementaria,* puede ayudar en este sentido.

Teorema 5.3 (*Holgura Complementaria) Supóngase que* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es factible en el Primal e* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *es factible en el Dual. Sean* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ *el vector de variables slack correspondiente al Primal, y* $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *el de variables slack del Dual. Entonces, x e y son óptimos en sus respectivos problemas si y solamente si*

$$[5.7] \quad \begin{aligned} x_j z_j &= 0, \qquad j=1, 2, \ldots n \\ w_i y_i &= 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Sugiero que practiquen los puntos vistos hasta aquí con una guía de trabajos prácticos que está en mi sitio de internet.

Problema de Asignación de Recursos

Volvamos al problema de producción industrial con que comenzamos la clase. Se recuerda que el problema describía la situación de una empresa productiva que transforma diversas materias primas ($i= 1, 2,\ldots, m$), también llamados recursos, en diversos productos finales ($j=1, 2,\ldots, n$). Suponemos como antes que el precio del recurso i es ρ_i, que el precio de una unidad del producto terminado j es σ_j, que producir una unidad del producto j requiere a_{ij} unidades de la materia prima i, y que en el momento analizado la empresa tiene a mano b_i unidades del recurso i-ésimo.

Primal	**Dual**
Restricción de igualdad	Variable libre
Restricc. de desigualdad	Variable no negativa
Variable libre	Restricción de igualdad
Variable no negative	Restricc. de desigualdad

Tabla 5.1 *Reglas de formación del Dual*

Los valores de mercado/precios vigentes están – por definición – relacionados mediante la fórmula

$$\sigma_j = \sum_i \rho_i \, a_{ij} \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

Estas ecuaciones se cumplen si el mercado está en *equilibrio* (observar que se trata en esencia de ecuaciones de costo marginal = precio del producto). Aquí es crucial suponer que el conjunto de recursos del 2º miembro es exhaustivo, incluyendo ítems como la depreciación de los activos fijos. En el mundo real, se puede asumir bajo ciertas condiciones que ésta es la situación de los mercados existentes, aunque experimenten en forma continua perturbaciones que inciden sobre el mercado y trasladan el equilibrio en forma permanente.

Estas perturbaciones provienen de varias causas, siendo una de ellas la *innovación*. Una innovación tiende a mejorar el proceso productivo, lo que implica que algunos coeficientes a_{ij} se reduzcan. Analicemos ahora una situación donde se registra un beneficio inesperado en el producto j-ésimo producido. Esta ganancia imprevista viene dada por

$$[5.12] \quad c_j = \sigma_j - \sum_i \rho_i \, a_{ij}$$

Naturalmente, una vez que la mayoría de los productores de estos productos se aprovechen de dicha innovación, y que los proveedores se enteren de las ganancias producidas, van a adoptar medidas aumentando el precio de las materias primas. *Sin embargo, siempre hay un retraso; y es durante este tiempo que se hacen las grandes fortunas*.

Para entrar en tema, supóngase que el retraso temporal es alrededor de un mes (según qué industria sea, este retraso puede ser más corto o más largo). También supongamos que el gerente de producción decide producir x_j unidades de producto j y que todas las unidades producidas son vendidas en forma inmediata a su valor de mercado. El ingreso total del mes será entonces $\sum \sigma_j x_j$. El valor de los recursos a mano al principio del mes era $\sum_i \rho_i b_i$. También, denotando los precios de los recursos a finales del mes como w_i $(i = 1, 2,..., m)$ el valor de los inventarios que quedan al término del mes viene dado por

$$\sum_i w_i (b_i - \sum_j a_{ij} x_j)$$

(si algún término resultara negativo, representaría el costo de adquirir materias primas adicionales para satisfacer los requerimientos de producción – aquí se supondrá que las compras adicionales deben hacerse a los precios nuevos, más altos, de finales del mes). La ganancia inesperada, denotada como π, sobre todos los productos, puede escribirse como

$$[5.13] \qquad \pi = \sum_j \sigma_j x_j + \sum_i w_i (b_i - \sum_j a_{ij} x_j) - \sum_i \rho_i b_i.$$

Nuestro objetivo es elegir niveles de producción x_j $(j=1, 2, ..., n)$ que hagan máxima esta ganancia. Pero nuestro proveedor quiere fijar precios w_i $(i=1, 2, ...m)$ para minimizar nuestro beneficio inesperado.

Antes de estudiar este ejercicio, conviene re-escribir la ganancia inesperada de una forma más conveniente. Vamos a indicar como y_i el incremento de precio de la materia prima i. Es decir,

$$[5.14] \qquad w_i = \rho i + y_i.$$

Sustituyendo ahora [5.14] en [5.13] y simplificando la notación, a cuyo efecto usamos [5.12], se ve que

$$[5.15] \qquad \pi = \sum_j c_j x_j + \sum_i y_i (b_i - \sum_j a_{ij} x_j).$$

Para enfatizar que π depende de las variables x_j e y_i escribiremos cuando sea necesario $\pi(x_1, x_2,...x_n, y_1,...,y_m)$.

Ahora nos concentraremos en las optimizaciones de los agentes. Dados x_j $(j=1, 2,..., n)$ los proveedores reaccionan minimizando $\pi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Observando [5.15], se aprecia que para cualquier recurso i que escasea, o sea

$$b_i - \sum_j a_{ij} x_j < 0,$$

los proveedores tenderán a elevar el precio en forma desmedida (es decir, $y_i \to \infty$). Para evitar esta (obviamente) mala situación, el gerente de producción deseará asegurarse estableciendo los niveles de producción de manera que

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i=1, 2, ..., m.$$

Por el otro lado, para cada recurso i no agotado durante el mes de ganancias extraordinarias, es decir,

$$b_i - \sum_j a_{ij}\, x_j > 0,$$

los proveedores no tendrán incentivos a cambiar el precio de mercado actual (e.d. $y_i = 0$). Luego, desde el punto de vista del *gerente de producción*, el problema se reduce a maximizar

$$\sum_j c_j\, x_j$$

sujeto a las restricciones

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Éste es simplemente el problema de programación lineal Primal. Se trata del problema que el gerente debe resolver anticipándose a proveedores confrontativos.

Ahora veamos el problema desde el punto de vista de los *proveedores*. Reordenando términos en [5.15] escribimos

[5.16] $\pi = \sum_j \left(c_j - \sum_i y_i\, a_{ij}\right) x_j + \sum_i y_i\, b_i;$

vemos que si los proveedores fijan los precios de modo que, después del ajuste de precios, quede una ganancia en el producto *j*-ésimo:

$$c_j - \sum_i y_i\, a_{ij} > 0,$$

entonces el gerente de producción podría generarle a la empresa una ganancia inesperada arbitrariamente grande produciendo una enorme cantidad del producto *j*-ésimo (o sea, $x_j \to \infty$). Supongamos que esto es inaceptable para los proveedores, con lo cual calcularán el incremento de sus precios de modo que

$$\sum_i\ y_i\, a_{ij} \geq c_j, \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Pero si los proveedores aumentaran sus precios tanto que la empresa pierda dinero si produce el producto *j*, o sea si

$$c_j - \sum_i y_i\, a_{ij} < 0,$$

en ese caso el gerente decidirá no producir nada de ese producto, de modo que fijará $x_j = 0$. Luego, el primer término del 2º miembro de [5.16] será siempre nulo, con lo cual el problema enfrentado por los proveedores es minimizar

$$\sum_i b_i\, y_i$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\sum_i y_i\, a_{ij} \geq c_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n),$$

$$y_i \geq 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Pero ¡éste es el Dual del problema del gerente de producción!

Como se ha visto previamente en el teorema fuerte de dualidad, si el problema del gerente de producción tiene solución óptima, también lo tendrá el problema de los proveedores, y ambos objetivos son congruentes. Esto significa que puede restablecerse el equilibrio fijando los niveles de producción y los aumentos de precios según las soluciones óptimas de ambos problemas de programación lineal.

Dualidad de Lagrange

El análisis de la sección precedente es un ejemplo de una técnica general que hace a los fundamentos de la dualidad de Lagrange, que ahora será descripta brevemente.

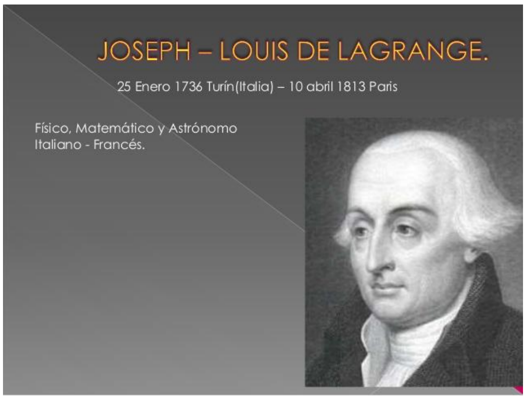
Repasemos lo que hicimos. El análisis giró en torno de una función

$$\pi\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)=\sum_j c_j x_j - \sum_i\sum_j y_i a_{ij} x_j + \sum_i y_i b_i$$

Para simplificar la notación, sea $x = (x_1,\ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2,\ldots, y_m)$ de modo que ahora podemos escribir $\pi\,(x, y)$ en lugar de $\pi\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Usando esta notación, hemos mostrado que

$$\underset{x\geq 0}{\text{Max}}\ \underset{y\geq 0}{\text{Min}}\ \pi(x, y) = \underset{y\geq 0}{\text{Min}}\ \underset{x\geq 0}{\text{Max}}\ \pi(x, y).$$

también se demostró que la optimización interna podía ser resuelta en ambos casos en forma explícita, que el problema máx.-min se reducía a un problema de programación lineal, y que el problema min-máx. se reducía al problema de programación dual.



Se puede pensar en trasladar el mismo esquema a funciones π que no tengan necesariamente la forma de más arriba. En el caso general hay que proceder con cautela. El problema máx.-min. es llamado Primal, y el problema min-máx. es llamado Dual. Empero, puede no ser cierto que ambos problemas tengan los mismos valores de la función objetivo. En realidad, el tema es interesante porque se pueden enunciar condiciones específicas y verificables para que los valores de ambos programas coincidan. Además, uno querría resolver en forma explícita los problemas de optimización de modo que el problema Primal pueda plantearse como un problema simple de maximización y el Dual como un problema simple de minimización. Esto a menudo puede hacerse. Hay distintas formas en que se puede extender la noción de dualidad más allá del contexto de la programación lineal. La descripta es denominada dualidad lagrangeana. Es la extensión más importante.