Subastas y Diseño de Mecanismos[1]

El *diseño de mecanismos* es un campo de la economía y la teoría de los juegos que estudia conceptos de solución para una clase de juegos de *información privada*. Hurwicz y Reiter explican que "*en un problema de diseño, la función objetivo es lo que nos está dado, mientras que el mecanismo es lo desconocido. Por tanto, el problema de diseño es el inverso a la teoría económica tradicional, que típicamente se dedica al análisis del desempeño de un mecanismo dado.*"[2]

Las características distintivas de estos juegos son que se realizan estableciendo una estructura en la que cada jugador tiene un incentivo si se comporta como el diseñador pretende. En este caso se dice que el juego se ha diseñado para el resultado deseado. La fuerza del resultado depende del concepto de solución usado en el juego. Así, dos características distintivas de estos juegos son:

- Que un diseñador del juego escoge la estructura de éste en vez de heredarla.
- Que el diseñador está interesado en el resultado del juego.

El Nobel de Economía de 2007 se concedió a Leonid Hurwicz, Eric Maskin, y Roger Myerson *por haber sentado las bases de la teoría del diseño de mecanismos*.

Una rama del diseño de mecanismos es la creación de mercados como *subastas*. Otra es el diseño de algoritmos de correspondencia. Un ejercicio habitual en el diseño de mecanismos es obtener el resultado deseado de acuerdo con un concepto de solución específico. El celebrado teorema de *Gibbard-Satterthwaite* muestra que *cualquier resultado que puede implementarse como un equilibrio de estrategia dominante es necesariamente dictatorial*. Esto es similar al *Teorema de imposibilidad de Arrow*. Por otra parte, la implementación como equilibrio de Nash es posible para un abanico mucho mayor de reglas de elección social.

En una clase interesante de juegos bayesianos, un jugador, el *principal*, trataría de condicionar su comportamiento según información conocida sólo por otros jugadores. Por ejemplo, alguien dispuesto a comprar un coche de segunda mano a quien le gustaría conocer el estado del vehículo usado. En este caso, no puede obtener la información simplemente preguntando al vendedor, ya que a éste le interesa distorsionar la verdad para realizar la venta. Por fortuna, la teoría de diseño de mecanismos le ofrece una importante ventaja: la de diseñar un juego cuyas reglas favorecen que los demás actúen del modo en que le conviene. Sin la teoría de diseño de mecanismos, el problema del principal sería de difícil resolución. Tendría que tener en cuenta todos los juegos posibles y elegir el que mejor influencia tiene sobre las tácticas de los demás jugadores. Además, el jugador tendría que sacar conclusiones de la información ofrecida por otros jugadores teniendo en cuenta que pueden tratar de engañarle. Gracias al diseño de mecanismos, y en particular al *principio de revelación*, el jugador sólo necesita considerar juegos en los que los agentes divulgan en forma veraz su información privada.

---

[1] Este capítulo corresponde al capítulo 9 de Geoffrey A. Jehle & Philip J. Reny, Advanced Microeconomic Theory (3rd ed.), 2011, *Auctions and Mechanism Design*. Como lectura complementaria se sugiere acudir al material compilado por el Prize Committee of the Royal Swedish Academy of Sciences a propósito del premio Nobel 2007.

[2] Leonid Hurwicz and Stanley Reiter (2006). *Designing Economic Mechanisms*.

En la mayoría de los mercados del mundo real, los vendedores no tienen un conocimiento perfecto de la demanda del mercado. En cambio, los vendedores suelen tener sólo información estadística sobre la demanda del mercado. Sólo los compradores mismos saben exactamente cuánto están dispuestos a comprar del bien a un precio determinado. En este capítulo, se revisará el problema del monopolio bajo esta circunstancia más típica.

Tal vez la situación más simple donde los elementos anteriores están presentes se produce cuando un objeto único se pone a *subasta*. Allí, el vendedor ignora típicamente los valores de los compradores pero puede no obstante tener cierta información sobre la distribución de valores entre ellos. En tal situación, hay una serie de formatos estándar de subasta que el vendedor podría utilizar para vender el bien - al primer precio, al segundo precio, subasta Holandesa, subasta Inglesa. ¿Cada una de estas subastas estándar da lugar al mismo ingreso para el vendedor? Si no, ¿cuál es la mejor? ¿Existe un mecanismo de venta no estándar pero aún mejor para el vendedor? Para responder a estas y otras preguntas, introduciremos y emplearemos algunas de las herramientas de la teoría del diseño de mecanismos.

Diseño de mecanismos es una teoría general sobre cómo y cuándo el diseño de instituciones apropiadas puede lograr objetivos particulares. Esta teoría es especialmente relevante cuando el diseñador requiere información poseída sólo por otros para lograr su objetivo. La sutileza en diseñar un mecanismo acertado reside en asegurar que el mecanismo dé a los que poseen la información necesaria el *incentivo para revelarla* al diseñador. Este capítulo ofrece una introducción a la teoría de Diseño de mecanismos. Empezaremos por considerar el problema de diseñar un mecanismo de venta que maximice los ingresos. Luego pasamos al problema de hallar una asignación eficiente de recursos. En ambos casos, el problema de diseño estará sujeto a restricciones de información – los agentes que poseen información privada tendrán que ser incentivados a proporcionar su información de manera veraz.

1. Cuatro tipos de subastas estándar

Consideren que hay un vendedor con un solo objeto para la venta que desea vender el objeto a uno de N compradores por el precio más alto posible. ¿Cómo debe actuar el vendedor para el logro de este objetivo? Una posible respuesta es celebrar una subasta. Muchas subastas distintas se han puesto en uso en un momento u otro, pero nos centraremos en las siguientes cuatro subastas estándar.[3]

- Oferta de primer precio sellada: Cada licitador presenta una oferta sellada al vendedor. El mejor postor gana y paga su oferta por el bien.

[3] Supondremos lo largo del capítulo y a menos que se indique de otro modo que en todas las subastas los empates en las ofertas se rompen al azar: cada licitador en un empate tiene la misma probabilidad de ser considerado ganador.

- Oferta de segundo precio sellada: Cada licitador envía una oferta sellada al vendedor. El mejor postor gana y paga la segunda oferta más alta por el bien.

- Subasta Holandesa o descendente: El vendedor comienza con un precio muy alto y comienza a reducirlo. El primer licitador que levanta la mano gana el objeto al precio actual

- Subasta Inglesa o ascendente: El vendedor comienza con un precio muy bajo (tal vez cero) y comienza a aumentarlo. Cada postor señala cuándo desee abandonar la subasta. Una vez que un licitador ha abandonado, no puede reanudar las ofertas más tarde. Cuando sólo queda uno, es el ganador y paga el precio actual.

¿Podemos decidir entre estas cuatro cuál es la mejor para el vendedor? Para tener una idea de este problema, hay que empezar con un modelo.

2. Modelo de Valores Privados Independientes

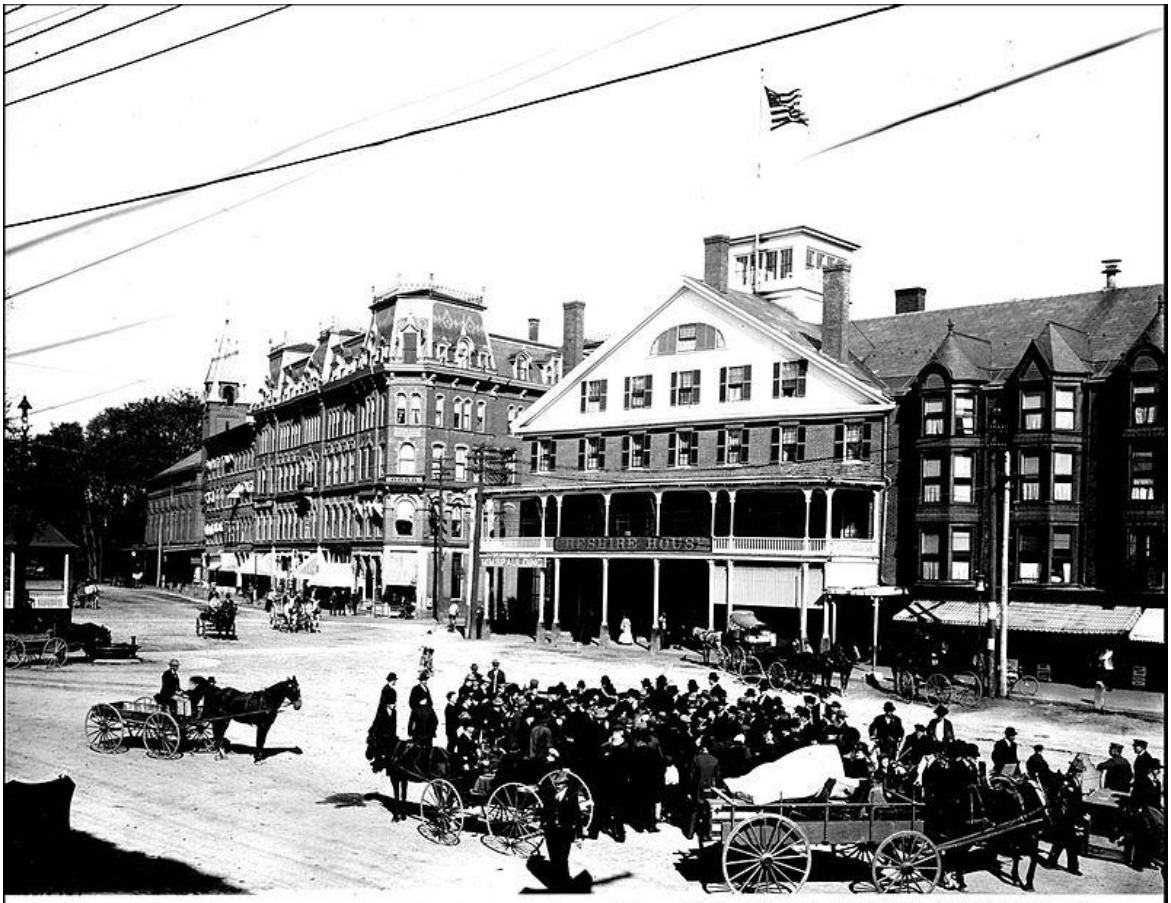
Un único vendedor neutral al riesgo desea vender un objeto indivisible a uno de N compradores neutrales al riesgo. El vendedor valúa en cero pesos el objeto.[4] El valor del comprador i por el objeto, v_i, se extrae del intervalo [0, 1] de acuerdo con la función de distribución $F_i(v_i)$ con función de densidad $f_i(v_i)$.[5] Asumiremos que los valores de los compradores son mutuamente independientes. Cada comprador conoce su propio valor pero no los valores de los otros compradores. Sin embargo, las funciones de densidad, $f_1,\ldots, f_N$, son información pública y así son conocidas por el vendedor y todos los compradores. En particular, si bien el vendedor desconoce los valores exactos de los compradores, conoce la distribución a partir de la cual se extrae cada valor. Si el valor del comprador i es v_i, entonces si gana el objeto y paga p, su ganancia (es decir, la utilidad de von Neumann-Morgenstern) es v_i-p, mientras que su ganancia es -p si debe pagar p pero no gana el objeto.[6]

A éste se lo conoce como el modelo de "valores privados independientes". *Independiente* se refiere al hecho de que la *información privada* de cada comprador (en este caso, la evaluación o "valor" de cada comprador) es independiente de la información privada de cualquier otro comprador. *Valor privado* se refiere al hecho de que una vez que un comprador emplea su propia información privada para evaluar el valor del objeto, esta evaluación no se vería afectada si posteriormente conociera la información privada de otro comprador, es decir, la información *privada* de cada comprador es suficiente para determinar su *valor*.[7]

---

[4] Esto equivale a suponer que el objeto ya se ha producido y que el valor de uso del vendedor es cero.
[5] Recordemos que $F_i(v_i)$ denota la probabilidad de que el valor de i sea menor o igual que v_i, y que $f_i(v_i) = F_i'(v_i)$. Esta última relación puede expresarse de forma equivalente como $F_i(v_i) = \int_0^{v_i} f_i(x)\,dx$. En consecuencia, a veces nos referiremos a f_i y a veces a F_i, ya que cada una determina a la otra.
[6] Aunque tal resultado no es posible en ninguna de las cuatro subastas anteriores, hay otras subastas (por ejemplo, subastas de *todos pagan*) en las que se deben realizar pagos, independientemente de si se gana o no el objeto.
[7] Existen modelos más generales en los que los compradores con información privada podrían obtener información adicional sobre el valor del objeto si conocieran la información privada de otro comprador, pero no consideraremos tales modelos aquí.

A lo largo de este capítulo, vamos a suponer que el entorno en el que se encuentra nuestro monopolista está representado por el modelo de valores privados independientes. Ahora podemos comenzar a analizar cómo varían los beneficios del vendedor con diferentes formatos de subasta. Tengan en cuenta que con la decisión de producción por detrás y su propio valor igual a cero, la maximización de beneficios es equivalente a la maximización del ingreso.



STREET AUCTIONS WERE COMMON IN THE 1890'S. THIS ONE IS PICTURED IN FRONT OF THE FAMED CHESHIRE HOUSE.

Antes de poder determinar los ingresos del vendedor en cada una de las cuatro subastas estándar, debemos entender el comportamiento de las ofertas de los compradores en los diferentes formatos de subasta. Empecemos con la subasta de primer precio.

2.1 Comportamiento de oferta en una subasta de primer precio sellada

Para entender el comportamiento de la oferta en una subasta de primer precio, por simplicidad, supondremos que los compradores son *ex ante* simétricos. Es decir, suponemos que para todos los compradores i = 1,..., N, $f_i(v) = f(v)$ para todo $v \in [0, 1]$.

Claramente, la dificultad principal en la determinación de los ingresos del vendedor está en determinar cómo los compradores, que de ahora en más llamaremos postores o licitadores, harán una oferta. Pero tengan en cuenta que si ustedes son uno de los postores, entonces como preferirían ganar el bien a un precio más bajo en lugar de uno más alto, querrán hacer una oferta baja cuando los demás están haciendo una oferta baja y ustedes querrán pujar más alto cuando las otras pujas sean más altas. Por supuesto, ustedes no saben las ofertas que los otros presentan debido a la regla de oferta sellada. *Sin embargo, su oferta óptima dependerá de cómo pujan los otros.* Por lo tanto, los postores se hallan en un escenario estratégico en el que la acción óptima (oferta) de cada postor depende de las acciones de los demás. En consecuencia, para determinar el comportamiento de los postores, emplearemos herramientas de teoría de los juegos ya desarrolladas.

Consideremos el problema de cómo presentar una oferta desde el punto de vista del postor i. Supongamos que el valor de i del postor es v_i. Dado este valor, el postor debe presentar una oferta sellada, b_i. Debido a que b_i dependerá en general del valor de i, escribamos $b_i(v_i)$ para indicar la oferta del postor i cuando su valor es v_i. Ahora, debido a que el licitador i debe estar preparado para presentar una oferta $b_i(v_i)$ para cada uno de sus valores potenciales $v_i \in [0, 1]$, podemos ver la *estrategia* del licitador i como una *función de oferta* $b_i: [0, 1] \rightarrow R^+$ un mapa de cada uno de sus valores en una puja no negativa (posiblemente diferente).

Antes de discutir los pagos del juego, será útil concentrar nuestra atención en una clase natural de estrategias de pujas. Parece muy natural esperar que los licitadores con valores más altos realicen ofertas más altas. Por lo tanto, vamos a restringir la atención a funciones de licitación *estrictamente crecientes*. A continuación, como los oferentes son ex ante simétricos, también es lícito suponer que licitadores con el mismo valor presentarán la misma oferta. Con esto en mente, nos enfocaremos en encontrar una *función de licitación* estrictamente creciente, $b^*: [0, 1] \rightarrow R^+$, que sea óptima para su empleo por cada licitador, dado que todos los otros postores también emplean esta función de licitación. Es decir, deseamos encontrar un equilibrio de Nash simétrico en funciones de licitación estrictamente crecientes.

Ahora, supongamos que encontramos un equilibrio de Nash simétrico dado por la función de puja estrictamente creciente $b^*(\cdot)$. Por definición, ella debe maximizar la rentabilidad de un postor, digamos i, con valor v para pujar $b^*(v)$ dado que los otros licitadores emplean la misma función de puja $b^*(\cdot)$. Debido a esto, podemos emplear útilmente lo que a primera vista podría parecer ser un ejercicio bastante misterioso.

El ejercicio misterioso pero útil es éste: imaginen que el licitador no pueda asistir a la subasta y que envía a un amigo para hacer una oferta por él. El amigo conoce la función de licitación de equilibrio $b^*(\cdot)$, pero no conoce el valor del licitador i. Ahora, si el valor del licitador i es v, el licitador querría que su amigo sometiera la oferta $b^*(v)$ en su nombre. Su amigo puede hacer esto por él una vez que el licitador lo llame y le diga su valor. Claramente, el postor no tiene ningún incentivo en mentirle a su amigo sobre su valor. Es decir, entre todos los valores $r \in [0, 1]$ que el postor i con valor v puede informar a su amigo, su pago se maximiza informando su verdadero valor, v, a su amigo. Esto se debe a que al informar el valor r

a su amigo resulta en que su amigo presentará la oferta $b^*(r)$ en su nombre. Pero si el postor i estuviera allí él presentaría la oferta $b^*(v)$.

Vamos a calcular el pago esperado del postor i de reportar un valor arbitrario, r, a su amigo cuando su valor es v, dado que todos los otros licitadores emplean la función de licitación $b^*(\cdot)$. Para calcular esta ganancia esperada, es necesario notar sólo dos cosas. Primero, el licitador ganará solamente cuando la oferta sometida por él sea la más elevada. Es decir, cuando $b^*(r) > b^*(v_j)$ para todos los postores $j \neq i$. Como $b^*(\cdot)$ es estrictamente creciente esto ocurre precisamente cuando r excede los valores de todos los N - 1 otros licitadores. Haciendo que F denote la función de distribución asociada con f, la probabilidad de que esto ocurra es $(F(r))^{N-1}$ que denotaremos $F^{N-1}(r)$. En segundo lugar, el licitador sólo paga cuando gana y luego paga su oferta, $b^*(r)$. Por lo tanto, la recompensa esperada del licitador i de reportar el valor r a su amigo cuando su valor es v, dado que todos los otros licitadores emplean la función de licitación $b^*(\cdot)$, puede escribirse

[1] $$u(r, v) = F^{N-1}(r)\,(v - b^*(r)).$$

Ahora, como ya hemos comentado, como $b^*(\cdot)$ es un equilibrio, la oferta de maximización de la recompensa esperada del licitador i cuando su valor es v debe ser $b^*(v)$. En consecuencia, [1] debe maximizarse cuando $r = v$, es decir, cuando el licitador i reporta su verdadero valor, v, a su amigo. Por lo tanto, si diferenciamos el lado derecho con respecto a r, la derivada resultante debe ser cero cuando $r = v$. Diferenciando,

[2] $$d\,[F^{N-1}(r)\,(v - b^*(r))]/dr = (N-1)\,F^{N-2}(r)\,f(r)\,(v - b^*(r)) - F^{N-1}(r)\,b^*(r).$$

Evaluando el lado derecho en r = v, donde es igual a cero, y reorganizando los términos, tenemos,

[3] $$(N-1)F^{N-2}(v)f(v)b^*(v) + F^{N-1}(v)b^*(v) = (N-1)\,v\,f(v)F^{N-2}(v).$$

Observando de cerca el lado izquierdo de [3], vemos que es sólo la derivada del producto $F^{N-1}(v)\,b(v)$ con respecto a v. Con esta observación, podemos reescribir [3] como

[4] $$dF^{N-1}(v)b^*(v)/dv = (N-1)vf(v)F^{N-2}(v).$$

Ahora, como [4] debe verificarse para cada v, debe ser el caso que

$$F^{N-1}(v)\,b^*(v) = (N-1)\int_0^v xf(x)F^{N-2}(x)\,dx + constante.$$

Teniendo en cuenta que un licitador con valor cero debe ofertar cero, concluimos que la constante anterior debe ser cero. Por lo tanto, debe ser el caso que

$$b^*(v) = [N-1/F^{N-1}(v)]\int_0^v xf(x)F^{N-2}(x)\,dx,$$

que puede escribirse en forma más sucinta así:

[5] $$b^*(v) = [1/F^{N-1}(v)]\int_0^v x\,dF^{N-1}(x).$$

Hay dos cosas a resaltar acerca de la función de puja [5]. En primer lugar, como se supuso, es estrictamente creciente en v. En segundo lugar, se ha determinado unívocamente. Por lo tanto, en conclusión, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 1 *Equilibrio Simétrico de una Subasta de Primer Precio*

Si N postores tienen valores privados independientes extraídos de la distribución común F, entonces licitar

$$b^*(v)= [1/F^{N-1}(v)] \int_0^v x dF^{N-1}(x)$$

siempre que el valor de uno sea v constituye un equilibrio de Nash simétrico de una subasta de oferta sellada de primer precio. Además, éste es el único equilibrio de Nash simétrico.[8]

Como $F^{N-1}(\cdot)$ es la función de distribución del valor más alto entre los *N-1* competidores de un postor, la estrategia de oferta mostrada en el teorema [1] dice que cada postor ofrece la expectativa del valor del segundo mejor postor condicional a que su propio valor sea el más alto. Pero, debido a que los postores utilizan la misma función de licitación estrictamente creciente, tener el valor más alto equivale a tener la oferta más alta y por lo tanto es equivalente a ganar la subasta. Por lo tanto, podemos decir:

En el equilibrio simétrico único de una subasta de primer precio sellada, cada postor ofrece la expectativa del valor del segundo postor más alto condicionado a ganar la subasta.

La idea de que uno debe hacer una oferta condicionada a ganar es muy intuitiva en una subasta de primer precio debido a la característica de que la oferta de uno sólo importa cuando uno gana la subasta. Debido a que esta característica está presente en otras subastas también, esta idea debe ser considerada como *una de las ideas básicas* de nuestro análisis estratégico.

2.2 Comportamiento de oferta en una Subasta Holandesa

En una subasta holandesa, cada postor tiene una sola decisión que tomar, a saber, "¿A qué precio debo levantar la mano para indicar que estoy dispuesto a comprar el bien a ese precio?" Además, el postor que elige el precio más alto gana la subasta y paga este precio. En consecuencia, sustituyendo la palabra «precio» por «oferta» en la frase anterior, ¡vemos que esta subasta equivale a una subasta de primer precio! Así, podemos concluir inmediatamente lo siguiente:

Teorema 2 *Equilibrio Simétrico en una Subasta Holandesa*

Si N postores tienen valores privados independientes extraídos de la distribución común, F, entonces alzar la mano cuando el precio alcanza

$$[1/F^{N-1}(v)] \int_0^v x dF^{N-1}(x)$$

siempre que el valor de uno sea v constituye un equilibrio de Nash simétrico de una subasta holandesa. Además, este es el único equilibrio de Nash simétrico.

[8] Estrictamente hablando, no hemos demostrado que éste sea un equilibrio. Hemos demostrado que si existe un equilibrio simétrico, entonces éste debe serlo. Ustedes como ejercicio pueden tratar de demostrar que éste es de hecho un equilibrio. También puede preguntarse acerca de la existencia de equilibrios asimétricos. Se puede demostrar que no hay ninguno, aunque no lo haremos aquí.

Claramente entonces, las subastas de primer precio y Holandesa recaudan exactamente el mismo ingreso para el vendedor, ex post (es decir, para cada realización de los valores de los postores $v_1,\ldots, v_N$).

2.3 Comportamiento de oferta en una subasta de segundo precio sellada

Uno podría preguntarse por qué molestarse en considerar una subasta de segundo precio en absoluto. ¿No es obvio que una subasta de primer precio debería generar mayores ingresos para el vendedor? Después de todo, en una subasta de primer precio, el vendedor recibe la oferta *más alta*, mientras que en una subasta de segundo precio recibe sólo la *segunda oferta más alta*.

Si bien esto puede sonar convincente, descuida un punto crucial: *los licitadores harán una oferta diferente en las dos subastas*. En una subasta de primer precio, un postor tiene un incentivo para aumentar su oferta a fin de aumentar sus posibilidades de ganar la subasta, pero tiene un incentivo para reducir su oferta para bajar el precio que paga cuando gana. En una subasta de segundo precio, el segundo efecto está ausente porque cuando un licitador gana, la cantidad que paga es independiente de su oferta. Por lo tanto, debemos esperar que los oferentes hagan una *oferta más agresiva* en una subasta de segundo precio que en una subasta de primer precio. Por lo tanto, existe la posibilidad de que una subasta de segundo precio genere mayores ingresos esperados para el vendedor que una subasta de primer precio. Cuando reconocemos que el comportamiento de la oferta cambia con el cambio en el formato de la subasta, la pregunta de qué subasta genera más ingresos no es tan obvia, ¿verdad?

Por fortuna, analizar el comportamiento de la oferta en una subasta de segundo precio y sellada es muy sencillo. A diferencia de nuestro análisis de la subasta de primer precio, no necesitamos restringir la atención al caso de postores simétricos. Es decir, vamos a permitir que las funciones de densidad $f_1,\ldots, f_N$, de las cuales los valores de los licitadores son extraídos independientemente, difieran (de hecho, puede demostrarse que ni siquiera se requiere postular independencia).

Consideren al licitador i con el valor v_i, denotando B la oferta más alta presentada por los otros postores. Por supuesto, B es desconocida para el licitador i porque las ofertas están selladas. Ahora, si el licitador ganara la subasta, su oferta sería la más alta y B sería entonces la segunda oferta más alta. En consecuencia, el licitador tendría que pagar B por el objeto. En efecto, entonces, el precio que el licitador debe pagar por el objeto es la oferta más alta, B, presentada por los otros postores.

Ahora, como el valor del licitador i es v_i, él estrictamente querría ganar la subasta cuando su valor supere el precio que tendría que pagar, es decir, cuando $v_i > B$; y desearía estrictamente perder cuando $v_i < B$. Cuando $v_i = B$ está indiferente entre ganar y perder. ¿Puede el postor licitar de una manera que garantice que ganará cuando $v_i > B$ y que perderá cuando $v_i < B$, aunque no conozca B? La respuesta es sí. **¡Él puede garantizar precisamente esto simplemente haciendo una oferta de su valor, v_i!**

Licitando v_i, el postor i es el mejor postor, y por lo tanto gana, cuando $v_i > B$, y no es el mejor postor, y así pierde, cuando $v_i < B$. Por consiguiente, la oferta de su valor es una oferta de pago para el licitador i *independientemente de las ofertas presentadas por los otros licitadores* (recordar que B es la oferta más alta entre las ofertas arbitrarias presentadas por los

demás). Por otra parte, debido a que si licita por debajo de su valor corre el riesgo de perder la subasta cuando se hubiera preferido estrictamente ganarla, y si licita por encima de su valor corre el riesgo de ganar la subasta con un precio por encima de su valor, licitar por su propio valor constituye una estrategia débilmente dominante. Por lo tanto, podemos afirmar lo siguiente.

Teorema 3 *Equilibrio en una Subasta de Segundo Precio*

Si N postores tienen valores privados independientes, entonces la oferta de su valor es la única estrategia de oferta débilmente dominante para cada postor en una subasta de segundo precio y sellada.

2.4 Comportamiento de oferta en una subasta Inglesa

En contraste con las subastas que hemos considerado hasta ahora, en una subasta inglesa hay potencialmente muchas decisiones que un postor tiene que tomar. Por ejemplo, cuando el precio es muy bajo, él debe decidir a qué precio él abandonaría cuando nadie todavía se cayó afuera. Pero, si algún otro postor se retira en primer lugar, entonces debe decidir a qué precio abandonar dado el resto de los postores activos, y así sucesivamente. A pesar de esto, existe una estrecha relación entre las subastas Inglesas y las subastas de segundo precio.

En una subasta inglesa, como en una subasta de segundo precio, resulta ser una estrategia dominante que un postor abandone cuando el precio alcanza su valor, independientemente de qué ofertantes permanezcan activos. La razón es bastante sencilla. Un licitador i con valor v_i, dado el historial de juego y el precio actual $p<v_i$, considera que la deserción no puede empeorar si planea permanecer activo un poco más y hasta que el precio alcance su valor, v_i. Al hacerlo, lo peor que puede pasar es que termine por caer cuando el precio realmente alcanza su valor. Su recompensa sería entonces cero, como lo sería si abandonara ahora al precio p. Sin embargo, podría suceder, si se mantuviera activo, que todos los demás licitadores abandonen antes de que el precio llegue a v_i. En este caso, el licitador quedaría estrictamente mejor por haber permanecido activo, ya que entonces gana el objeto a un precio estrictamente inferior a su valor v_i, obteniendo un beneficio positivo. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

Teorema 4 *Equilibrio en una Subasta Inglesa*

Si N licitadores tienen valores privados independientes, entonces abandonar cuando el precio alcanza su valor es la única estrategia de oferta débilmente dominante para cada postor en una subasta inglesa.[9]

Dado este resultado, es fácil ver que el postor con el valor más alto ganará en una subasta inglesa. Pero, ¿qué precio pagará por el objeto? Eso, por supuesto, depende del precio al que su *último competidor restante* abandona la subasta. Pero su último competidor restante será el postor con el *segundo valor más alto*, y él, como todos los postores, abandonará cuando el precio alcance su valor. En consecuencia, el licitador con el valor más alto gana y paga un precio igual al segundo valor más alto. Por lo tanto, vemos que el resultado de la subasta inglesa es idéntico al de la subasta de segundo precio. En particular, las subastas inglesa y de segundo precio generan exactamente los mismos ingresos para el vendedor, ex post.

[9] Al igual que en el caso de la subasta de segundo precio, este resultado de dominancia débil no se basa en la independencia de los valores del ofertante. Se mantiene incluso si los valores están correlacionados. Sin embargo, es importante que los valores sean *privados*.

2.5 Comparación de las recaudaciones

Debido a que las subastas de primer precio y las subastas holandesas aumentan los mismos ingresos ex post y las de segundo precio y las subastas inglesas aumentan los mismos ingresos ex post, sólo queda por comparar los ingresos generados por las subastas de primero y segundo precio. Es evidente que estas subastas no necesitan recaudar los mismos ingresos ex post. Por ejemplo, cuando el valor más alto es bastante alto y el segundo más alto es bastante bajo, ejecutar una subasta de primer precio producirá más ingresos que una subasta de segundo precio. Por otro lado, cuando los valores primero y segundo más altos se acercan, una subasta de segundo precio generará mayores ingresos que una subasta de primer precio.

Por supuesto, cuando el vendedor debe decidir cuál de las dos formas de subasta emplear, no conoce los valores de los postores. Sin embargo, sabiendo cómo postulan los licitadores como funciones de sus valores y conociendo la distribución de los valores de los licitadores, el vendedor puede calcular los ingresos esperados asociados con cada subasta. Por lo tanto, la pregunta es, ¿qué subasta produce el mayor ingreso esperado, una subasta de primero o de segundo precio? Debido a que nuestro análisis de la subasta de primer precio involucró licitadores simétricos, debemos asumir la simetría aquí para comparar los ingresos esperados generados por una subasta de primer precio frente a una subasta de segundo precio. Así, en lo que sigue, $f(\cdot)$ denotará la densidad común del valor de cada licitador y $F(\cdot)$ denotará la función de distribución asociada.

Comencemos por considerar los ingresos por la recaudación esperada, R^{SPP}, generados por una subasta de primer precio (SPP). Debido a que la oferta más alta gana una subasta de primer precio y como el postor con el valor más alto envía la oferta más alta, si v es el valor más alto entre los N valores de los licitadores, el ingreso del vendedor es $b^*(v)$. Por lo tanto, si el valor más alto se distribuye de acuerdo a la densidad $g(v)$, los ingresos esperados del vendedor se pueden escribir

$$R^{SPP} = \int_0^1 b^*(v)\, g(v)\, dv.$$

Como la densidad g del máximo de N variables aleatorias independientes con densidad común f y distribución F es NfF^{N-1},[10] tenemos

[6] $$R^{SPP} = N \int_0^1 b^*(v)\, f(v)\, F^{N-1}(v)\, dv.$$

Hemos visto que en una subasta de segundo precio, como cada licitador ofrece su valor, el vendedor recibe como precio el segundo valor más alto entre los N valores de los licitadores. Por lo tanto, si $h(v)$ es la densidad del segundo valor más alto, el ingreso esperado del vendedor, R^{SSP}, en una subasta de segundo precio se puede escribir

$$R^{SSP} = \int_0^1 v\, h(v) dv.$$

[10] Para ver esto, tengan en cuenta que el valor más alto es menor o igual que v si y sólo si todos los N valores lo son, y que esto ocurre con probabilidad $F^N(v)$. Por lo tanto, la función de distribución del valor más alto es F^N. Debido a que la función de densidad es la derivada de la función de distribución, sigue el resultado.

Debido a que la densidad h, de la segunda más alta de N variables aleatorias independientes con densidad común f y función de distribución F es $N(N-1)F^{N-2}f(1-F)$,[11] tenemos

[7] $$R^{SSP} = N(N-1)\int_0^1 vF^{N-2}(v)f(v)(1-F(v))dv.$$

Vamos a comparar ahora las dos. De [6] y [7] se tiene que

$$R^{SPP} = N\int_0^1 [[1/F^{N-1}(v)]\int_0^v xdF^{N-1}(x)]f(v)F^{N-1}(v)\,dv =$$

$$= N(N-1)\int_0^1[\int_0^v x F^{N-2}(x)f(x)\,dx]f(v)\,dv$$

$$= N(N-1)\int_0^1[\int_0^v x F^{N-2}(x)f(x)f(v)\,dx]\,dx\,dv$$

$$= N(N-1)\int_0^1[\int_x^1 x F^{N-2}(x)f(x)f(v)\,dx]\,dx\,dv$$

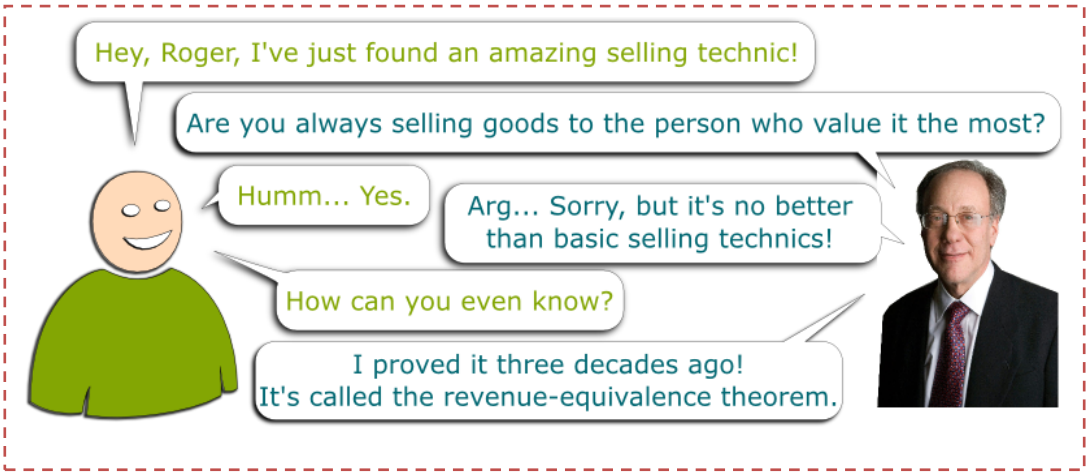
$$= N(N-1)\int_0^1 x F^{N-2}(x)f(x)(1-F(x))\,dx$$

$$= R^{SSP},$$

donde la cuarta igualdad se sigue de intercambiar el orden de integración (es decir, de $dxdv$ a $dvdx$), y la igualdad final sigue de [7].

Sorprendentemente, ¡las subastas de primero y segundo precio generan la misma recaudación esperada, independientemente de la distribución común de los valores de los licitadores! Por lo tanto, podemos afirmar lo siguiente:

Si N postores tienen valores privados independientes extraídos de una distribución común, F, los cuatro formatos de subasta estándar (primer precio, segundo precio, holandés e inglés) generan los mismos ingresos esperados para el vendedor.



[11] Una manera de ver esto es tratar a la densidad de probabilidad como una probabilidad. Entonces la probabilidad (densidad) de que el valor de un determinado licitador sea v es $f(v)$ y la probabilidad de que exactamente uno de los restantes $N-1$ valores de los otros licitadores esté por encima de esto es $(N-1)F^{N-2}(v)\,1-F(v))$. En consecuencia, la probabilidad de que el valor de este licitador en particular sea v y sea el segundo más alto es $(N-1)f(v)F^{N-2}(v)(1-F(v))$. Debido a que hay N licitadores, la probabilidad (es decir, la densidad) de que el segundo valor más alto sea v es entonces $N(N-1)f(v)F^{N-2}(v)(1-F(v))$.

Nota sobre la literatura Estos temas ya han sido tocados en un capítulo previo (véase el capítulo sobre *Bienes Públicos, Externalidades e Incentivos*). Allí hemos apreciado que William Vickrey diseñó el esquema fundamental de las subastas de segundo precio; posteriormente, Clarke y Groves complementaron su tratamiento introduciendo el famoso impuesto de Clarke, que permite internalizar las externalidades asociadas a ciertos problemas sociales, de manera de preservar el cálculo económico, logrando la *compatibilidad con los incentivos de los agentes*. Esto dio lugar al conocido mecanismo *VCG* (por Vickrey-Clarke-Groves) que veremos más adelante.

Mientras que la subasta de VCG estaba totalmente determinada a principios de los años setenta, fue sólo en 1981 que el gigante de la economía matemática, Roger Myerson, resolvería el problema de diseño de subastas de optimización de ingresos en el caso de subastas de un solo bien.[12] ¡De hecho, el trabajo seminal 1981 de Myerson[13] es lo que le valió el Premio Nobel de Economía! Sólo hablaré de su teorema más importante. Se trata de un resultado asombroso. Se llama *teorema de equivalencia de ingresos*. Aproximadamente, afirma que los ingresos esperados del vendedor están totalmente determinados por la regla de asignación del bien. En particular, todas las subastas que hemos discutido hasta el momento terminan dando el bien a la persona que más lo valora. Por lo tanto, todas tienen la misma regla de asignación. Por lo tanto, gracias al teorema de equivalencia de ingresos de Myerson, podemos afirmar que todas son equivalentes en términos de ingresos.

El teorema de equivalencia de ingresos – que no demostraremos aquí – proporciona una explicación de la aparente coincidencia de la igualdad de ingresos esperados entre las cuatro subastas estándar. Esto se debe a que, con postores simétricos, cada una de las cuatro subastas estándar tiene la misma función de asignación de probabilidad (es decir, el objeto se asigna al licitador con el valor más alto) y en cada una de las cuatro subastas estándar un licitador con valor cero recibe una utilidad esperada igual a cero.

El teorema de equivalencia de ingresos es muy general y nos permite agregar subastas adicionales a la lista de aquellas que producen el mismo ingreso esperado que las cuatro estándar. Por ejemplo, una subasta de primer precio y de "todos pagan", en la que la más alta entre todas las ofertas selladas gana, pero cada licitador paga una cantidad igual a su oferta, también produce el mismo ingreso esperado bajo la simetría de postores que las cuatro subastas estándar.

3. Diseño de un Mecanismo de maximización del ingreso

Ahora comprendemos mejor las cuatro subastas estándar, sus equilibrios, sus ingresos esperados, y la relación entre ellas. Pero estas subastas, donde cada una genera el mismo ingreso esperado (bajo simetría del licitador), ¿maximizan los ingresos esperados del vendedor? ¿O hay un mejor mecanismo de venta para el vendedor? Si hay un mejor mecanismo de venta ¿qué forma tendría? ¿Los postores presentan ofertas selladas? ¿Pueden hacer una oferta secuencial? ¿Qué hay de una combinación de los dos? ¿Es una subasta el mejor mecanismo de venta?

El Principio de Revelación

[12] Sigo en estos párrafos a Lê, A Mathematical Guide to Sellling.
[13] Roger B. Myerson, Optimal Auction Design, Mathematics of Operation Research, February 1981.

Ya hemos introducido en el capítulo 43 el *Principio de Revelación*. Al parecer, es probable que encontrar un mecanismo de venta que maximice los ingresos sea una tarea difícil. Dada la libertad de elegir cualquier procedimiento de venta, ¿por dónde empezar? La observación clave es recordar cómo se pudo construir un mecanismo de venta directa incentivo-compatible desde el equilibrio de una subasta de primer precio y cómo el resultado de la subasta de primer precio fue replicado exactamente en el equilibrio veraz del mecanismo directo. Resulta ser que el mismo tipo de construcción se puede aplicar a cualquier procedimiento de venta. Es decir, dado un procedimiento de venta arbitrario y un equilibrio de Nash en el que cada postor emplea una estrategia que traza su valor en el comportamiento de maximización de pagos bajo ese procedimiento de venta, podemos construir un mecanismo de venta directa incentivo-compatible equivalente. La asignación de probabilidad y las funciones de costo correspondientes asignan cada vector de valores a las probabilidades y costos que cada licitador experimentaría de acuerdo con las estrategias de equilibrio en el procedimiento de venta original. Así construido, este mecanismo de venta directa es incentivo-compatible y produce la misma asignación (probabilística) del objeto y los mismos costos esperados para cada licitador, así como los mismos ingresos esperados para el vendedor.

En consecuencia, si algún procedimiento de venta produce el ingreso esperado del vendedor igual a R, también lo hace un mecanismo de venta directa incentivo-compatible. Pero esto significa que *ningún mecanismo de venta entre todos los mecanismos de venta concebibles genera más ingresos para el vendedor que el mecanismo de venta directa que maximiza los ingresos y es incentivo-compatible*. Por lo tanto, podemos restringir nuestra búsqueda de un procedimiento de venta que maximice los ingresos al conjunto (manejable) de mecanismos de venta directa incentivo-compatibles. De esta manera, se simplifica considerablemente el problema sin perder nada. Esta técnica simple pero muy importante para reducir el conjunto de mecanismos al conjunto de mecanismos directos incentivo-compatibles es un ejemplo del *principio de revelación*. Este principio se usa una y otra vez en la teoría del diseño de mecanismos y lo veremos nuevamente en acción en la sección siguiente al considerar el problema de lograr resultados eficientes en un entorno privado de información.

El principio de revelación afirma que cualquier equilibrio racional de la conducta individual en cualquier institución social debe ser equivalente a un plan de coordinación compatible respecto a los incentivos. Dadas cualesquiera declaraciones informativas de los individuos, el plan compatible respecto a los incentivos equivalente recomienda los resultados de desobediencia y mentira simulados en el mecanismo o institución original. Así, sin pérdida de generalidad, un mediador fidedigno puede planificar para lograr que la sinceridad y la obediencia sean la mejor política para todos.[14]

Para demostrar el principio de revelación, supóngase que se nos da un mecanismo de coordinación general y un equilibrio que describe las estrategias individuales racionales para informar fraudulentamente y actuar de forma desobediente en este mecanismo. Precisamos describir la forma en la que el mediador implementaría el plan de mediación equivalente compatible respecto a los incentivos, en el que la sinceridad y la obediencia es un equilibrio. Cuando el mediador ha obtenido una declaración confidencial de la información privada de cada individuo, el plan de mediación equivalente compatible respecto a los incentivos calcularía en primer lugar la declaración fraudulenta que cada uno habría enviado en dicho equilibrio, posteriormente calcularía la conducta que dicho mecanismo habría indicado para cada

[14] Roger B. Myerson, *Perspectivas sobre el diseño de mecanismos en la teoría económica*, Revista Asturiana de Economía, 44, 2009.

individuo sobre la base de dichas declaraciones, a continuación calcularía la acción desobediente que cada individuo habría elegido realmente en dicho equilibrio, y finalmente recomendaría de forma confidencial a cada individuo que debería elegir la acción calculada. Si bajo dicho plan algún individuo tuviera algún incentivo para ser fraudulento o desobediente respecto al mediador, entonces habría tenido también un incentivo para ser fraudulento o desobediente respecto a sí mismo bajo su estrategia de equilibrio dada en el mecanismo dado. Pero en un equilibrio racional nadie puede ganar engañándose a sí mismo o desobedeciendo su propia estrategia óptima.[15]

4. Diseño de Mecanismos Eficientes en términos de asignación de recursos

Ahora prestamos atención alejándonos de la maximización de beneficios y hacia la eficiencia de asignación. La pregunta básica es cómo lograr un resultado eficiente de Pareto cuando porciones críticas de información son mantenidas en privado por los individuos en la sociedad. Tal información puede incluir, por ejemplo, preferencias individuales, costos de producción, ingresos, etc.

Estado social Vamos a introducir una amplia colección de circunstancias al permitir que X denote el conjunto de estados sociales. Para simplificar las cosas, suponemos que X es finito. Una vez más, los miembros de X pueden ser asignaciones en una economía de intercambio o de producción, candidatos que van a ser elegidos, etc. También distinguimos un bien llamado "dinero", cuyo papel será evidente en breve. Los individuos se preocupan por el estado social $x \in X$, así como sobre cuánto dinero tienen. Luego, el estado social no describe completamente todo lo que es útil para los individuos. Para cualquier estado social fijo, un individuo puede usar su dinero para comprar mercancías deseables que son independientes y no tienen efecto sobre el estado social.[16]

Tipos Hay N individuos en la sociedad. Para captar la idea de que podrían tener elementos críticos de información privada, introducimos un conjunto de posibles "tipos" para cada individuo. Sea T_i el conjunto finito de tipos de individuos i. Como en nuestro análisis del capítulo 31 de los juegos bayesianos, introducimos probabilidades sobre los tipos de los jugadores. En particular, asumimos aquí que hay una hipótesis apropiada, q, donde $q\ (t) > 0$ es la probabilidad de que el vector de tipos de los N individuos sea $t = (t_1,\ldots, t_N) \in T = X_{i=1}^{N} T_i$. Además, suponemos que los tipos son independientes, de modo que $q\ (t) = q_1\ (t_1) \cdots q_N\ (t_N)$. En consecuencia, ningún tipo de individuo proporciona información sobre los tipos de los demás individuos.[17]

4.1 Utilidad cuasi-lineal y valores privados

Para el resto de este capítulo, restringiremos el dominio de preferencias individuales a las que pueden ser representadas por funciones de utilidad cuasi-lineales. Es decir, si el individuo tiene m pesos y $x \in X$ es el estado social, su utilidad de von Neumann-Morgenstern es

---

[15] El enunciado del Principio de Revelación puede ser consultado en Roger B. Myerson, *Optimal Coordination Mechanisms in Generalized Principal-Agent Problems*, J. Math. Econ. 10, 1982.

[16] También es posible interpretar el "dinero" como una mercancía separada que los individuos desean directamente. Pero seguiremos con la interpretación monetaria.

[17] Ninguno de nuestros análisis aquí depende de espacios de tipo finito. En particular, todas las fórmulas y conclusiones son válidas cuando, por ejemplo, cada T_i es un cubo euclidiano y cada $q_i\ (t_i)$ es la densidad de probabilidad de que el tipo i sea t_i. En ese caso, las sumas sobre T, T_{-i} y T_i se convierten en integrales.

$$v_i(x, t_i) + m$$

donde su tipo es $t_i \epsilon T_i$.

Como interpretamos m como <u>*dinero*</u>, $v_i\ (x, t_i)$ se interpreta correctamente como el valor, en pesos, que ese individuo i atribuye al estado social x cuando su tipo es t_i. Además, tengan en cuenta que el valor del individuo i para el estado social x ∈ X depende sólo de su tipo t_i y no de los tipos de los otros individuos. Por lo tanto, cada individuo tiene valores privados. En consecuencia, al igual que en la Sección 2, se trata de un modelo independiente con valores privados.[18] Veamos un <u>*ejemplo*</u>.

Tomen el caso de una pequeña ciudad con N individuos. La ciudad ha sido seleccionada por el estado para recibir una nueva piscina (P) o un nuevo puente (U) y debe decidir qué quiere. Así, hay dos estados sociales, P y U, y por lo tanto el conjunto de estados sociales es X = {P, U}. Cada individuo i en la ciudad tiene preferencias cuasi-lineales y tiene información privada t_i sobre el valor que atribuye a la piscina y al puente. Específicamente, los valores que el individuo i asigna a la piscina (P) y el puente (U) vienen dados por,

$$v_i\ (x, t_i) = \begin{cases} t_i + 5, & si\ x = P \\ 2t_i, & si\ x = U. \end{cases}$$

donde su tipo t_i tiene la misma probabilidad de asumir cualquiera de los valores 1, 2, ..., 9 y donde los tipos son independientes entre individuos.

Por lo tanto, es probable que cada individuo prefiera estrictamente la piscina al puente (es decir, $t_i \in \{1, 2, 3, 4\}$), tanto como prefiera estrictamente el puente a la piscina (es decir, $t_i \in \{6, 7, 8, 9\}$). Sólo el individuo sabe cuál es el caso y cuánto prefiere un estado social sobre el otro, y cuanto más extremo sea el tipo de un individuo, más preferirá uno de los estados sociales al otro. □

<u>*La cuasi-linealidad es un supuesto fuerte*</u>. Esto implica que hay una tasa común a la que la utilidad puede ser sustituida entre individuos independientemente del estado social y de los tipos individuales. Su ventaja es que produce una caracterización conveniente de estados sociales eficientes. Para ver esto con mayor claridad, supongamos que los individuos no tienen información privada, es decir, supongamos que no hay tipos. La función de utilidad de i individual es simplemente $v_i\ (x) + m$. A pesar de que las personas se preocupan tanto por el estado social como por la cantidad de dinero que tienen, resulta que la cantidad de dinero con que terminan es más o menos irrelevante para determinar qué estados sociales son compatibles con la eficiencia de Pareto. De hecho, enunciamos lo siguiente:

Con preferencias cuasi-lineales, un estado social $x^* \in X$ es Pareto eficiente si y sólo si maximiza la suma de las partes no monetarias de las utilidades individuales, es decir, si y sólo si resuelve

[8] $$Máx_{x \epsilon X} \sum_{i=1}^{n} v_i\ (x).$$

La demostración está en Jehle & Reny.

[18] De hecho, el modelo de objeto único de la Sección 2 es en sí mismo un caso especial de un modelo cuasi-lineal de valores privados independientes.

4.2 Eficiencia Pareto ex post

Hay varios estadios en los que los economistas suelen pensar en la Pareto-eficiencia, la etapa *previa* a la identificación de los tipos, la etapa *intermedia*, donde cada uno conoce sólo su propio tipo, y la etapa *ex post*, cuando todos los tipos son conocidos por todos los individuos.

En general, cuanta más incertidumbre haya, mayor será el alcance de un seguro mutuamente beneficioso. Por lo tanto, esperamos que la Pareto-eficiencia ex ante implique la Pareto-eficiencia intermedia que implique la Pareto-eficiencia ex post. Nos centraremos aquí sólo en esta última, la Pareto-eficiencia ex post.

Como las preferencias individuales sobre los estados sociales son una función de los tipos individuales, $t_1,\ldots, t_N$, lograr resultados Pareto-eficientes ex post normalmente requerirá que el estado social dependa de los tipos individuales. Con esto in mente, introducimos una función $x: T \rightarrow X$, la *función de asignación*. Así, una función de asignación especifica, para cada vector de tipos individuales, un estado social en X. Análogamente al enunciado [8], la Pareto-eficiencia ex post de una función de asignación se caracteriza por la maximización de la suma de las utilidades individuales. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Pareto-eficiencia ex post *Una función de asignación $x: T \rightarrow X$ es Pareto-eficiente ex post si para cada $t \in T$, $x(t) \in X$ resuelve,*

$$\text{Máx}_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} v_i(x, t_i).$$

donde la maximización es sobre todos los estados sociales. Entonces decimos también que $x^*(t)$ es un estado social ex post eficiente dado $t \in T$.

4.3 Mecanismos directos, compatibilidad-incentivos y principio de revelación

Nuestra pregunta de interés es *si siempre es posible lograr una asignación ex post eficiente*, a pesar de que las utilidades individuales sean información privada. ¿Cómo podemos lograr este objetivo? Las posibilidades son en realidad bastante desalentadoras. Por ejemplo, podríamos pedir a los individuos que anuncien públicamente uno por vez su tipo (por supuesto, podrían mentir). Podríamos entonces preguntar si alguien cree que alguien mintió acerca de su tipo, castigando adecuadamente (mediante impuestos) a aquellos cuyos anuncios sean puestos en duda por un número suficiente de otros - esperando que esto pudiera alentar los informes honestos. Por otro lado, es posible que no pidamos a las personas que informen sus tipos en absoluto. En lugar de eso, podríamos pedirles que voten directamente por el estado social que desearían implementar. Pero ¿qué sistema de votación deberíamos emplear? ¿La regla de la mayoría? ¿Mayoría por parejas con empates resueltos al azar? ¿Los votos deben ser por votación secreta? ¿O públicos y secuenciales? Como pueden ver, podríamos seguir y seguir. Hay infinitas posibilidades para diseñar un sistema, o mecanismo, en la búsqueda de nuestro objetivo.

Por fortuna, aquí se aplica el *principio de revelación* que nos permite limitar nuestra búsqueda al conjunto de mecanismos directos incentivo-compatibles. Antes de discutir esta aplicación del principio de revelación, es útil dar dos definiciones.

Mecanismo directo *Un mecanismo directo consiste en una colección de funciones de asignación de probabilidad, $p^x(t_1,\ldots, t_N)$, una para cada $x \in X$, y N funciones de costo $c_1(t_1,\ldots, t_N), \ldots, c_N(t_1,\ldots, t_N)$. Para cada vector de tipos $(t_1, \ldots, t_N) \in T$ informado por los N*

individuos, $p^x(t_1, \ldots, t_N) \in [0, 1]$ denota la probabilidad de que el estado social sea $x \in X$ y $c_i(t_1, \ldots, t_N) \in R$ denota el costo del individuo i, es decir, la cantidad que debe pagar. Debido a que se debe escoger algún estado social, $\sum_{x \in X} p^x(t_1, \ldots, t_N) = 1$ para cada $(t_1, \ldots, t_N) \in T$.

Dado un mecanismo directo, $p, c_1, \ldots, c_N$, es útil definir, $u_i(r_i, t_i)$ como la utilidad esperada del individuo i de reportar que su tipo es $r_i \in T_i$ cuando su verdadero tipo es $t_i \in T_i$ y dado que todos los demás individuos siempre reportan sus tipos verazmente. Es decir,

$$u_i(r_i, t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} q_{-i}(t_{-i}) \left(\sum_{x \in X} p^x(r_i, t_{-i})\, v_i(x, t_i) - c_i(r_i, t_{-i}),\right.$$

donde $q_{-i}(t_{-i}) = \Pi_{j \neq i}\, q_j(t_j)$. Podemos simplificar la fórmula definiendo:

[9] $$p^{*x}_i(r_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} q_{-i}(t_{-i}) p^x(r_i, t_{-i}),$$

$$c^*_i(r_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} q_{-i}(t_{-i}) c_i(r_i, t_{-i}).$$

Por consiguiente,

[10] $$u_i(r_i, t_i) = \sum_{x \in X} p^{*x}_i(r_i)\, v_i(x, t_i) - c^*_i(r_i).$$

Mecanismo directo incentivo-compatible *Un mecanismo directo es incentivo-compatible si cuando los otros individuos siempre reportan sus tipos con veracidad, la utilidad esperada de cada individuo es maximizada siempre reportando su tipo con veracidad, es decir, el mecanismo es incentivo-compatible si para cada individuo i y para cada uno de sus tipos $t_i \in T_i$, $u_i(r_i, t_i)$ tal como se define en [10] se maximiza en $r_i \in T_i$ cuando $r_i = t_i$. O puesto de otra manera, el mecanismo es incentivo-compatible si se trata de un Equilibrio de Bayes-Nash (EBN) que cada individuo informe siempre su tipo de manera veraz.*[19]

Uso del principio de revelación Con estas definiciones a mano, vale la pena discutir informalmente cómo el principio de revelación nos permite reducir nuestra búsqueda al conjunto de mecanismos directos incentivo-compatibles. Por lo tanto, supongamos que logramos diseñar un juego de forma extensiva, posiblemente bastante complejo, para que los individuos de la sociedad jueguen, donde los beneficios de los individuos en los nodos finales están definidos por la utilidad que reciben en algún estado social y la distribución de ingresos en ese nodo final. Debido a que las estrategias que eligen adoptar pueden depender de sus tipos, cualquier "equilibrio" que jueguen (es decir, Nash, perfecto en el sub-juego, secuencial) será un equilibrio Bayes-Nash de la forma estratégica del juego. Supongamos que en algún equilibrio Bayes-Nash tal, es siempre seguro que ocurra un estado social eficiente ex post. Entonces diríamos que el juego de forma extensiva en cuestión (=mecanismo) *implementa* exitosamente un resultado ex post eficiente. Según el principio de revelación, un mecanismo directo incentivo-compatible puede hacer precisamente lo mismo. Veamos cómo. En lugar de hacer que los individuos jueguen sus estrategias ellos mismos, diseñen un nuevo mecanismo (directo) que simplemente juegue las estrategias de ellos luego de que informen sus tipos. En consecuencia, si los otros individuos siempre informan honestamente, entonces, desde su perspectiva, es como si ustedes estuvieran participando en el juego de forma extensiva original contra ellos. Pero en ese juego, para ustedes era óptimo realizar las

[19] Como los espacios del tipo Ti son finitos aquí, se aplica la definición ya dada en el capítulo 31 de un equilibrio Bayes-Nash. Si los espacios de los tipos son infinitos, simplemente definiríamos el equilibrio veraz como un equilibrio Bayes-Nash.

acciones especificadas por su estrategia condicional a su tipo real. Por lo tanto, será óptimo que ustedes informen su tipo verazmente en el nuevo mecanismo directo para que esas mismas acciones se lleven a cabo en su nombre. Por lo tanto, el nuevo mecanismo directo será incentivo-compatible y siempre producirá el mismo estado social ex post eficiente y la distribución del ingreso que el antiguo. ¡Eso es todo!

Terminológicamente, decimos que un mecanismo directo incentivo-compatible es eficiente ex post si asigna probabilidad uno a un conjunto de estados sociales ex post eficientes dado cualquier vector de tipos declarados $t \in T$, es decir, si para todo $t \in T$, $p^x(t) > 0$ implica que $x \in X$ es ex post eficiente cuando el vector de tipos es t.

4.4 Mecanismo Vickrey-Clarke-Groves

Ahora introducimos uno de los mecanismos directos más importantes en la teoría del diseño de mecanismos, el mecanismo Vickrey-Clarke-Groves (VCG). Como veremos, desempeña un papel central en la teoría que desarrollaremos aquí. En particular, solucionará el problema ex post de asignación eficiente que hemos establecido hasta ahora.

Una característica interesante del mecanismo VCG es que puede ser pensado como una generalización de una subasta de segundo precio. Recordemos que en una subasta de segundo precio para un solo bien, el mejor postor gana y paga la segunda oferta más alta. Como es sabido, por lo tanto, es una estrategia dominante para cada licitador ofertar su valor, por lo que el licitador con mayor valor gana y paga el segundo valor más alto. Esta subasta se describe a veces como una en la que el ganador *paga su externalidad*. La razón es que si el ganador no estuviera presente, habría ganado el licitador con el segundo valor más alto. Así, el licitador ganador, en virtud de su presencia, impide que se realice el segundo valor más alto: impone una externalidad. Por supuesto, paga por el bien precisamente la cantidad de la externalidad que impone, y el resultado final es eficiente.

William Spencer Vickrey, Canada, 1914-1996
Nobel 1996
Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders, Journal of Finance, 1961

La idea de "pagar la propia externalidad" se generaliza muy bien a nuestra situación actual de la siguiente manera. Sea $x: T \rightarrow X$ una función de asignación ex post eficiente. Es decir, para cada $t \in T$, sea $x^*(t)$ una solución a,

$$Max_{x \epsilon X} \sum_{i=1}^{n} v_i(x, t_i).$$

Tal solución siempre existe porque X es finito. Si hay múltiples soluciones elijan cualquiera de ellas. Por lo tanto, la función de asignación eficiente ex post $x^*(\cdot)$ está bien definida y permanecerá fija por el resto de este capítulo.

Pensemos en la externalidad impuesta por cada individuo i sobre los individuos restantes bajo el supuesto de que se puede lograr la eficiencia ex post. El truco para calcular la externa-

lidad de un individuo es pensar en la diferencia que su presencia conlleva para la utilidad total de los demás.

Cuando el individuo i está presente y el vector de tipos es $t \in T$, el estado social es $x^*(t)$ y la utilidad total de los otros es,

$$\sum_{j \neq i} v_j(x^*(t), t_j).$$

Eso fue sencillo. Pero, ¿cuál es la utilidad total de los demás cuando el individuo i *no* está presente? Esto también es directo si asumimos que en ausencia del individuo i - es decir, si la sociedad consiste sólo de los N - 1 individuos j ≠i - el estado social se elige de una manera ex post eficiente *con respecto a los que quedan*.

Edward Hedrick Clarke 1939-2013
Multipart Pricing of Public Goods, Public Choice 11(1), 1971

Para cada $t\text{-}i \in T\text{-}i$, hacemos que $x^{\sim i}(t\text{-}i) \in X$ resuelva,

$$Máx_{x \in X} \sum_{j \neq i} v_j(x, t_j).$$

O sea, $x^{\sim i}: T_{-i} \rightarrow X$ es una función de asignación eficiente ex post en la sociedad sin el individuo i.

Ahora es un asunto sencillo calcular la diferencia que la presencia de i significa para la utilidad total de los otros. Evidentemente, cuando el vector de tipos es $t \in T$, la diferencia en la utilidad de los otros cuando i no está presente en comparación con cuando está presente es

$$\sum_{j \neq i} v_j(x^{\sim i}(t_{-i}), t_j) - \sum_{j \neq i} v_j(x^*(t), t_j).$$

Llamemos a esta diferencia *la externalidad impuesta por el individuo i*. Observen que la externalidad es siempre no negativa y es típicamente positiva porque, por definición, $x^{\sim i}(t_{-i}) \in X$ maximiza la suma de utilidades de los individuos j≠i cuando su vector de tipos es t_{-i}. *Deben convencerse de que, en el caso de un solo bien, la externalidad de cada individuo es cero, excepto para el individuo de mayor valor, cuya externalidad es el segundo valor más alto, tal como debe ser*.

Mecanismo Vickrey-Clarke-Groves

Cada individuo comunica simultáneamente su tipo al diseñador. Si el vector de tipos declarado es t ∈ T, se elige el estado social $x^*(t)$. Además, cada individuo i es gravado a un costo monetario igual a

$$c^{VCG}_i(t) = \sum_{j \neq i} v_j(x^{\sim i}(t_{-i}), t_j) - \sum_{j \neq i} v_j(x^*(t), t_j).$$

Es decir, cada individuo paga su externalidad basado en los tipos informados. Las expresiones c^{VCG}_i se denominan funciones de costo VCG.

Un ejemplo de su funcionamiento

Sea la situación del ejemplo de la sub-sección 4.1. Si el vector de tipos reportados es t ∈ T, entonces será eficiente para la ciudad construir el puente si $\sum_i v_i (U, t_i) > \sum_i v_i (P, t_i)$.[20] Dada la definición de los v_i, esto conduce a la siguiente función de asignación eficiente ex post. Para cada $t \in T$,

$$x^*(t) \begin{cases} = U, \text{ si } \sum_{i=1}^{N} (t_i - 5) > 0 \\ = P, \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Theodore Francis Groves Jr.
Incentive in Teams, Econometrica, Jul. 1973

De acuerdo con el mecanismo VCG, si el vector informado de tipos es t∈T, entonces el estado social es $x^*(t)$. Queda por describir el costo, $c^{VCG}_i(t)$, que debe pagar el individuo. Pensemos en la externalidad que el individuo impone a los demás. Supongamos, por ejemplo, que los otros informen tipos muy altos, por ejemplo, $t_j = 9$ para todo $j \neq i$. Luego, si hay al menos otros dos individuos, el puente será construido independientemente del reporte de i. De hecho, el puente se construirá independientemente de si el individuo i está presente. Por lo tanto, la externalidad del individuo i, y también su costo, es cero en este caso. Del mismo modo, la externalidad de i y el costo será cero cuando su presencia no cambie el resultado. Con esto en mente, vamos a decir que el individuo i es *pivote* para el estado social $x \in \{P, U\}$ en el vector de tipos $t \in T$ cuando, dados los reportes t, su presencia cambia el estado social de x' a x. Por ejemplo, el individuo i es pivote para U en $t \in T$ si $\sum_{j=1}^{N} (t_j - 5) > 0$ y $\sum_{j \neq i} (t_j - 5) \leq 0$, porque la primera desigualdad (estricta) implica que el estado social es U cuando está presente y la segunda desigualdad (débil) implica que es P cuando está ausente. En esta circunstancia, la externalidad y el costo de i es $c^{VCG}_i(t) = \sum_{j \neq i} (t_j + 5) - \sum_{j \neq i} 2t_j$, es decir, la diferencia entre la utilidad total de los demás cuando está ausente y su utilidad total cuando está presente. En conjunto, entonces, $c^{VCG}_i(t)$ es como sigue,

$$c^{VCG}_i(t) \begin{cases} = \sum_{j \neq i} (5 - t_j), \text{ si i es pivote para U en } t \in T; \\ = \sum_{j \neq i} (t_j - 5), \text{ si i es pivote para P en } t \in T; \\ = 0, \text{ en los otros casos. } \square \end{cases}$$

El mecanismo resultante "Vickrey-Clarke-Groves" luego, puede motivar a los agentes a elegir la asignación socialmente eficiente del bien público, incluso si los agentes tienen valoraciones privadas conocidas. En otras palabras, puede resolver la "tragedia de los bienes comunes" bajo ciertas condiciones, en particular la utilidad cuasi-lineal o si no se requiere un balance presupuestario.

Hasta ahora todo bien, pero ¿conseguirá el mecanismo VCG implementar realmente un resultado ex post eficiente? Por construcción, el mecanismo elige un resultado ex post eficiente basado en el vector informado de tipos. Sin embargo, los individuos son libres de mentir

[20] Suponemos que la piscina de natación se construirá si las dos sumas son iguales.

acerca de sus tipos y, si lo hacen, el resultado típicamente *no* será ex post eficiente con respecto al vector de los tipos *reales*. Por lo tanto, para que este mecanismo funcione, debe inducir a los individuos a reportar sus tipos verazmente. El resultado siguiente establece que el mecanismo VCG así lo hace.

Teorema 5 *El reporte veraz es dominante en el mecanismo VCG*

En el mecanismo VCG es una estrategia débilmente dominante que cada individuo informe su tipo de manera veraz. Por lo tanto, el mecanismo VCG es incentivo-compatible y eficiente ex post.

Dem.) Debemos demostrar que la información veraz es una estrategia débilmente dominante para un individuo arbitrario i. Supongamos entonces que los otros reportan $t_{-i} \in T_{-i}$, que no necesita ser veraz. Supongamos también que el tipo i de cada individuo es $t_i \in T_i$ y que reporta $r_i \in T_i$. Su utilidad sería entonces,[21]

[P.1] $$v_i\,(x^*(r_i, t_{-i}), t_i) - c^{VCG}{}_i\,(r_i, t_{-i}).$$

Obsérvese que $x^*(\cdot)$ y $c^{VCG}\,(\cdot)$ se evalúan al tipo informado por i, r_i, mientras que $v_i\,(x, \cdot)$ se evalúa al tipo real de i, t_i. Debemos demostrar que [P.1] se maximiza cuando el individuo i hace un reporte veraz, es decir, cuando $r_i = t_i$.

Sustituyendo la definición de $c^{VCG}{}_i\,(r_i, t_{-i})$ en [P.1], la utilidad de i puede escribirse como,

[P.2] $$v_i(x^*(r_i,t_{-i}), t_i)-c^{VCG}{}_i(r_i, t_{-i})=v_i(x^*(r_i,t_{-i}), t_i)-\left(\textstyle\sum_{j\neq i} v_j\,(x^{\sim i}(t_{-i}), t_j)-\sum_{j\neq i} v_j(x^*(r_i,t_{-i}), t_j)\right)$$

$$=\textstyle\sum_{j=1}^{N} v_j(x^*(r_i,t_{-i}),t_j) - \sum_{j\neq i} v_j(x^{\sim j}(t_{-i}), t_j).$$

Por lo tanto, debemos mostrar que fijando $r_i = t_i$ se maximiza el lado derecho de la segunda igualdad [P.2]. Para ver por qué esto es así, tengan en cuenta que r_i aparece sólo en la primera suma allí y por lo tanto basta con demostrar que,

[P.3] $$\textstyle\sum_{j=1}^{N} v_j(x^*(t_i, t_{-i}), t_j) \geq \sum_{j=1}^{N} v_j(x^*(r_i, t_{-i}), t_j),\ \text{para todo } t_{-i} \in T_{-i}.$$

Mas, por definición de $x^*(t_i, t_{-i})$,

$$\textstyle\sum_{j=1}^{N} v_j(x^*(t_i, t_{-i}), t_j) \geq \sum_{j=1}^{N} v_j(x, t_j),\ \text{para todos los } x \in X.$$

Luego, en particular, se satisface [P.3] por cuanto $x^*(r_i, t_{-i}) \in X$ para todos los $r_i \in T_i$. ■

Caben diversas observaciones. Primero, como el costo de cada individuo, $c^{VCG}{}_i\,(t)$, es siempre no negativo, *el mecanismo nunca corre con déficits y normalmente tiene un superávit*.

En segundo lugar, cabe preguntarse si un individuo preferiría evitar pagar su costo no participando en el mecanismo. Para abordar adecuadamente esta pregunta, debemos especificar qué pasaría si un individuo decidiera no participar. Una especificación obvia es suponer que el mecanismo VCG se aplicaría como de costumbre, pero sólo a aquellos que sí participan. Con esto en mente, podemos mostrar que en equilibrio todos los N individuos participarán.

[21] Podemos ignorar con seguridad el nivel inicial de ingresos de i, ya que simplemente agrega una constante a todos nuestros cálculos de utilidades.

Si todos los individuos participan y reportan sinceramente (estrategia dominante), entonces el retorno del individuo i cuando el vector de tipos es t será,

[11] $$v_i\,(x^*(t), t_i) - c^{VCG}{}_i\,(t) = \sum_{j=1}^{N} v_j\,(x^*(t), t_j) - \sum_{j\neq i} v_j(x^{\sim i}\,(t_{-i}), t_j).$$

Por otro lado, si el individuo i decide no participar, evita pagar el costo $c^{VCG}{}_i\,(t)$, pero el estado social se convierte en $x^{\sim i}(t_{-i})$, es decir, un estado social ex post eficiente para los N - 1 individuos participantes que reportan sus tipos. En consecuencia, si el individuo elige no participar, su utilidad será

[12] $$v_i\,(x^{\sim i}\,(t_{-i}), t_i).$$

Por definición de $x^*(t)$,

$$\sum_{j=1}^{N} v_j\,(x^*(t), t_j) \geq \sum_{j=1}^{N} v_j\,(x^{\sim i}\,(t_{-i}), t_j),$$

debido a que $x^{\sim i}\,(t_{-i}) \in X$. Reacomodando, se llega a que

$$\sum_{j=1}^{N} v_j\,(x^*(t), t_j) - \sum_{j\neq i} v_j\,(x^{\sim i}(t_{-i}), t_j) \geq v_i\,(x^{\sim i}(t_{-i}), t_i).$$

Por [11], la utilidad de i de participar, excede [12], su utilidad de no participar. *Por lo tanto, en equilibrio todos los individuos participarán voluntariamente en el mecanismo VCG*.

En tercer lugar, la dominancia de la veracidad en el mecanismo VCG podría parecer que contradice el teorema de Gibbard-Satterthwaite.[22] De hecho, la función $x^*(\cdot)$ mapea vectores de tipos (que indexan funciones de utilidad individuales) en opciones sociales de tal manera que ningún individuo pueda ganar informando falsamente. Es decir, $x^*(\cdot)$ es a prueba de comportamientos estratégicos. Por otra parte, como no hemos asumido nada sobre el rango de $x^*(\cdot)$, el rango podría muy bien ser todo X (si no, simplemente hay que eliminar los elementos de X que están ausentes del rango). En ese caso, $x^*(\cdot)$ es una función de elección social a prueba de estrategias. ¡*Pero ciertamente no es dictatorial*! (Consideremos, por ejemplo, el caso de un solo bien). Pero, por supuesto, no hay contradicción porque, a diferencia de lo que ocurre en el capítulo 42, hemos restringido el dominio de las preferencias a las cuasilineales. *Esta restricción nos permite evitar la conclusión negativa del teorema de Gibbard-Satterthwaite*.

4.5 Logro de un presupuesto balanceado: mecanismos de externalidades esperadas

Como ya se señaló, el mecanismo de VCG tiene un superávit porque el costo de cada individuo es no negativo, y a veces positivo, independientemente del vector de tipos reportado. Pero, ¿qué sucede con los ingresos que se generan? ¿Importa? De hecho, sí.

Supongan, por ejemplo, que no hay otros individuos en la sociedad sino los N individuos que participan en el mecanismo VCG. Entonces cualquier ingreso generado debe ser redistribuido o destruido.

Si una porción de los ingresos se destruye, el resultado global, que consiste del estado social más la cantidad de dinero que cada individuo posee no será claramente Pareto-eficiente ex post. Por lo tanto, destruir cualquier porción del ingreso simplemente no es una opción. Por

[22] El teorema de Gibbard-Satterthwaite lo hemos visto muy por arriba en el capítulo 42 (*Nueva Economía Institucional y Elección Pública: Congresos, Burocracias y Presidentes*).

lo tanto, la única opción consistente con nuestro objetivo es redistribuir los ingresos entre los N individuos. *Pero esto también causa problemas*.

Si los ingresos se redistribuyen entre los N individuos, entonces los costos, $c^{VCG}_i(t)$, ya no serán los costos correctos. En lugar de ello, se exageran los costos reales porque no tienen en cuenta los ingresos redistribuidos. En consecuencia, no está del todo claro que, una vez que los individuos tengan en cuenta su parte de los ingresos que se generan, seguirá siendo una estrategia dominante reportar sus tipos de manera veraz. Y, por supuesto, si los individuos mienten sobre sus tipos, el estado social elegido normalmente no será ex post eficiente. Este es un problema potencialmente serio. Por fortuna, como las utilidades individuales son cuasi lineales y los tipos individuales son independientes, este problema puede resolverse siempre y cuando los ingresos se redistribuyan de una manera suficientemente cuidadosa.

Antes de pasar a la solución, noten que si los ingresos generados se redistribuyen entre los N individuos, entonces la suma de los pagos reales (netos) hechos por todos debe ser cero. Por ejemplo, si sólo hay dos individuos, y uno de ellos finalmente termina pagando un peso, entonces el otro individuo debe recibir ese peso, porque simplemente no hay ningún otro lugar al que pueda ir. Por lo tanto, lo que realmente buscamos son mecanismos donde los costos siempre suman cero. Estos mecanismos se denominan de *presupuesto equilibrado*.

Funciones de costo de presupuesto equilibrado *Las funciones de costo, $c_1,\ldots, c_N$, son de presupuesto equilibrado si suman cero independientemente del vector de tipos informado, es decir, si $\sum_{i=1}^{N} c_i(t)= 0$ para todo $t \in T$. Si las funciones de costo de un mecanismo directo son de presupuesto equilibrado, entonces decimos que el mecanismo también es de presupuesto equilibrado.*

Por lo tanto, un mecanismo de presupuesto equilibrado no sólo no pierde dinero, sino que es totalmente autosuficiente, ya que no requiere de dinero del exterior. Ahora ajustaremos los costos VCG para que resulten en un mecanismo de presupuesto equilibrado.

Cuando el vector de tipos reportados es $t \in T$ el costo VCG de la persona i, $c^{VCG}_i(t)$, es su externalidad. Vamos a definir la cantidad

[13] $$c^{\diamond VCG}_i(t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} q_{-i}(t_{-i})\, c^{VCG}_i(t_i, t_{-i}) =$$

$$= \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} q_{-i}(t_{-i}) \left(\sum_{j\neq i} v_j(\tilde{x}^{\,i}(t_{-i}), t_j) - \sum_{j\neq i} v_j(x^*(t), t_j) \right),$$

como la externalidad esperada de i cuando su tipo es ti. Resulta que estas externalidades esperadas pueden utilizarse para definir los costos de manera de conseguir eficiencia ex post y presupuesto equilibrado.

Teorema 6 *Mecanismo de Externalidades esperadas con Presupuesto Equilibrado*

Consideren el mecanismo en el que, cuando el vector de tipos informados es $t \in T$, se elige el estado social ex post $x^*(t)$ y el costo del individuo i es, $c^{\diamond VCG}_i(t_i) - c^{\diamond VCG}_{i+1}(t_{i+1})$ definidos según la ecuación [13] e $i + 1 = 1$ cuando $i = N$. Entonces, este mecanismo, llamado mecanismo de externalidades esperadas con presupuesto equilibrado, es incentivo-compatible, eficiente ex post y equilibrado en el presupuesto. Además, en un equilibrio veraz, cada individuo está voluntariamente dispuesto a participar independientemente de su tipo.

Las funciones de costo en el Mecanismo de Externalidades esperadas con Presupuesto Equilibrado pueden describirse como sigue. *Dispongan a los N individuos en el sentido de las agujas del reloj en torno a una mesa circular*. El mecanismo requiere que cada individuo pague a la persona que está a su derecha su externalidad esperada, $c^{\diamond VCG}{}_i\ (t_i)$, dado su tipo informado, t_i. Mecanismos como éste son llamados a veces mecanismos de externalidades esperadas. Hay dos puntos que vale la pena enfatizar. Primero, $c^{\diamond VCG}{}_i\ (t_i) - c^{\diamond VCG}{}_{i+1}\ (t_{i+1})$ es el costo real del individuo i cuando el vector de tipos reportados es t ∈ T. *No es su costo esperado*. Segundo, como el individuo paga su externalidad esperada a una persona y recibe la externalidad esperada de otra persona, su costo real es menor que su externalidad esperada. Por lo tanto, su costo esperado en el nuevo mecanismo es menor que en el mecanismo VCG original.

Sugiero que estudien la demostración que aparece en Jehle y Reny (pág. 467-468).

Nota sobre la bibliografía Claude d'Aspremont y Louis-André Gérard-Varet trataron este problema en *Incentives and Incomplete Information* (1977). Analizaron el problema de incentivos para la revelación correcta de información en un modelo de decisión colectiva como un juego con información incompleta. A tal fin usaron dos enfoques de información incompleta, uno primero donde las creencias individuales no se introducen y un segundo donde sí lo están. En el primer enfoque recuerdan que los mecanismos para los cuales la solución al problema de incentivos se encuentra en estrategias dominantes conducen en general a un problema presupuestario para el organismo central. Para estos mecanismos demuestran una propiedad de unicidad. En el segundo enfoque muestran que si se impone una condición de compatibilidad a las creencias individuales y si se da una solución bayesiana al problema de incentivos, entonces es posible evitar el problema presupuestario. Este tipo de mecanismos fue también estudiado por Kenneth J. Arrow (*The Property Rights Doctrine and Demand Revelation under Incomplete Information*, 1979). En este documento, Arrow formaliza varios aspectos. Comienza analizando el proceso de negociación que llevaría a la asignación eficiente de recursos si los agentes conocieran las funciones de utilidad de los demás. Formaliza luego el proceso de negociación como un proceso llamado de *revelación de la demanda* bajo información incompleta. También muestra cómo estos procesos pueden ser aplicados a un juego de revelación de la demanda con la propiedad de que la revelación veraz es un equilibrio de Nash y todos los pagos laterales entre los actores resultan en un balance presupuestario.

Tengan en cuenta que el teorema [6] no dice que el reporte veraz sea una estrategia débilmente dominante en el nuevo mecanismo de equilibrio presupuestario. Dice solamente que decir la verdad es un equilibrio Bayes-Nash. En consecuencia, aunque obtenemos un presupuesto equilibrado (y, por lo tanto, eficiencia plena) cuando ajustamos las funciones de costo del mecanismo VCG, perdemos la propiedad, por lo demás muy agradable, de un equilibrio en estrategias dominantes. De hecho, hay teoremas que indican que es imposible lograr ambos en una amplia variedad de circunstancias. Esto fue tratado por Jerry Green & Jean-Jacques Laffont en *Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods* (1977). Bengt Holmstrom, en *Groves' Scheme on Restricted Domains* (1979) demostró que el esquema de Groves requiere convexidad del dominio.

En clase veremos ejemplos de circunstancias similares a las aquí expuestas.

El teorema [6] proporciona una respuesta afirmativa a la pregunta de si se puede diseñar un mecanismo que asegure un resultado ex post eficiente en un contexto de utilidad cuasi-

lineal, y valores privados independientes. Por lo tanto, hemos recorrido un largo camino. Pero hay situaciones importantes que nuestro análisis hasta ahora no cubre y ahora es el momento de abordarlas.

4.6 Derechos de propiedad, opciones externas y restricciones de racionalidad individual

Hasta ahora se supuso implícitamente que, por un lado, los individuos no pueden ser obligados a ceder su ingreso y, por otro lado, no tienen derechos de propiedad sobre los estados sociales. Estas suposiciones implícitas aparecen en el análisis cuando consideramos si los individuos están dispuestos a participar en el mecanismo.[23] De hecho, supusimos que cuando un individuo elige no participar, dos cosas son ciertas. En primer lugar, sus ingresos no cambian, lo que implica que no puede ser obligado a cederlo. En segundo lugar, el conjunto de estados sociales a disposición de los individuos restantes también está sin cambios, lo que implica que el individuo mismo no tiene ningún control - es decir, no tiene derechos de propiedad - sobre ellos.

Suponer que "no hay derechos de propiedad sobre los estados sociales" a veces tiene perfecto sentido. Por ejemplo, cuando el mecanismo es una subasta y los N individuos participantes son postores, es natural suponer que ningún postor tenga ningún efecto sobre la disponibilidad del bien si decide no participar. Pero ¿qué pasa si incluimos al vendedor como uno de los individuos que participan del mecanismo? Típicamente no tendrá sentido suponer que el bien permanecerá disponible para los postores si el vendedor decide no participar.[24] O bien, consideren una situación en la que un propietario de la empresa tiene tecnología para producir un bien (a cierto costo) que un consumidor pueda valorar. En este caso también, el conjunto de estados sociales no es el mismo para el consumidor solo como lo es con el consumidor y el propietario de la empresa juntos. O, supongan que uno está interesado en disolver una asociación (por ejemplo, un bufete de abogados, un matrimonio, etc.) de manera eficiente, donde cada socio tiene derechos sobre la propiedad que es propiedad conjunta. Para cubrir éstas y otras situaciones importantes debemos generalizar nuestro modelo.

La clave para incorporar los derechos de propiedad sobre los estados sociales es ser más flexible sobre las decisiones individuales de participación. Para movernos en la dirección correcta, consideren una situación que involucre a un vendedor que posee un objeto y un comprador potencial. El valor del vendedor para el objeto es un cierto $v_s \in [0, 1]$ conocido sólo por el vendedor, y el valor del comprador para el objeto es cierto $v_b \in [0, 1]$ conocido sólo por el comprador. Si queremos dar al vendedor derechos de propiedad sobre el objeto, entonces no podemos forzarlo a cambiarlo. En consecuencia, el vendedor participará en un mecanismo sólo si espera recibir utilidad por lo menos v_s al hacerlo, porque puede lograr esta utilidad al no participar y mantener el objeto para sí mismo. La característica notable de este ejemplo es que el valor para el vendedor de no participar depende no trivialmente de su tipo privado, y ahora incorporaremos esta idea en nuestro modelo general.

Para cada individuo i, y para cada $t_i \in T_i$, indiquemos con $IR_i(t_i)$ la utilidad esperada de i cuando no participa en el mecanismo y su tipo es t_i. Así, en el ejemplo del párrafo anterior,

[23] Participar en el mecanismo, como siempre, implica el compromiso de respetar su resultado.
[24] Tengan en cuenta que en el tratamiento de las subastas, el vendedor siempre queda mejor participando en la subasta que no. Por lo tanto, este tema también surge allí, pero ya está bien tratado.

haciendo que el individuo 1 sea el vendedor, tenemos $IR_1(v_s) = v_s$ para cada $v_s \in [0, 1]$, y haciendo que el individuo 2 sea el comprador, tenemos $IR_2(v_b) = 0$ para cada $v_b \in [0, 1]$.

Racionalidad individual *Un mecanismo directo incentivo-compatible es individualmente racional si para cada individuo i y para cada $t_i \in T_i$, i la utilidad esperada de participar en el mecanismo y de informar verazmente cuando su tipo es t_i es al menos $IR_i(t_i)$ cuando los otros participan y siempre reportan sus tipos de manera veraz.*

Por lo tanto, si un mecanismo directo incentivo-compatible es individualmente racional, será óptimo que cada individuo participe voluntariamente en el mecanismo independientemente de su tipo, porque su utilidad esperada es al menos tan alta cuando participa como cuando no lo hace.

Las restricciones de racionalidad individuales que aparecen en esta definición son restricciones adicionales, por encima y más allá de las restricciones impuestas por la compatibilidad de incentivos y cualquier otra restricción de interés, como la eficiencia ex post. Cuanto más altos sean los valores $IR_i(t_i)$, más difícil será construir un mecanismo ex post incentivo-compatible. Debido a que los derechos de propiedad sobre los estados sociales a menudo aumentan el $IR_i(t_i)$, su presencia puede crear dificultades.

Tengan en cuenta que siempre podemos regresar al modelo de ausencia de derechos de propiedad sobre los estados sociales definiendo $IR_i(t_i) = min_{x \in X} v_i(x, t_i)$ ya que dada nuestra (inofensiva) convención de ingreso inicial cero para cada individuo, ésta es la menor utilidad que se puede esperar cuando el tipo es t_i.

Por último, fíjense que la introducción de las funciones, $IR_i(t_i)$, tiene un beneficio adicional. Nos permiten modelar la posibilidad de que los individuos tengan "opciones externas", incluso si no tienen derechos de propiedad sobre los estados sociales per se. Por ejemplo, supongan que un individuo tiene la oportunidad de participar en uno de varios mecanismos y no tiene derechos de propiedad sobre los estados sociales en ninguno de ellos – piensen en un postor viendo a cuál de varias subastas asistir. Si están diseñando uno de los mecanismos, y $U^k_i(t_i)$ es la utilidad esperada del individuo i de participar en cualquiera de los otros mecanismos k = 1,..., K cuando su tipo es ti, entonces i participará voluntariamente en su mecanismo sólo si su utilidad esperada de hacerlo es por lo menos $max_k U^k_i(t_i)$. En consecuencia, para evaluar correctamente la decisión de participación de i en su mecanismo, definiríamos $IR_i(t_i) = max_k U^k_i(t_i)$.

4.7 Mecanismo IR-VCG: Suficiencia del Excedente Esperado[25]

Para cada individuo i, hacemos que $U^{VCG}_i(t_i)$ sea su utilidad esperada cuando su tipo es t_i en el equilibrio veraz (estrategia dominante) del mecanismo VCG. Por lo tanto,

$$U^{VCG}_i(t_i) = \sum_{t-i \in T-i} \sum_{x \in X} q_{-i}(t_{-i}) v_i(x^*(t_i, t_{-i}), t_i) - c^{\diamond VCG}_i(t_i).$$

Como sabemos ahora, este mecanismo no necesita ser de presupuesto equilibrado ni individualmente racional.

[25] Los autores han seguido en estos puntos a Vijay Krishna and Motty Perry, *Efficient Mechanism Design*, 2000, y también a S. R. Williams (1999), *A Characterization of Efficient, Bayesian Incentive Compatible Mechanisms*.

Primero intentemos lograr la racionalidad individual de la manera más simple posible, es decir, dando una cantidad fija de dinero a cada individuo para que estén dispuestos a participar en el mecanismo VCG sin importar su tipo. Sea Ψ_i la *subvención de participación* dada al individuo i. ¿Cuándo será lo suficientemente grande para que siempre elija participar en el mecanismo VCG? La respuesta, por supuesto, es que debe ser tal que

$$U^{VCG}_i(t_i) + \Psi_i \geq IR_i(t_i), \text{ para todo } t_i \in T_i.$$

O bien, tal que

$$\Psi_i \geq IR_i(t_i) - U^{VCG}_i(t_i) \text{ para todo } t_i \in T_i$$

O, en forma equivalente:

$$\Psi_i \geq \underset{t_i \in T_i}{\text{máx}} \; (IR_i(t_i) - U^{VCG}_i(t_i))$$

En consecuencia, el subsidio *mínimo* de participación que debemos dar al individuo i (y puede ser negativo) para que esté dispuesto a participar en el mecanismo de VCG, independientemente de su tipo, es

[14] $$\psi^*_i = \text{máx}_{t_i \in T_i} (IR_i(t_i) - U^{VCG}_i(t_i)).$$

Usando estos subsidios mínimos de participación, ahora definimos un nuevo mecanismo, llamado *mecanismo VCG individualmente racional*, o simplemente mecanismo IR-VCG. En el mecanismo IR-VCG, cada individuo i informa su tipo y se le da Ψ^*_i pesos, no importa qué tipo informe. Si el vector de informes es t, el estado social es $x^*(t)$ y el individuo i debe además pagar su costo de Vickrey, $c^{VCG}_i(t)$. Consecuentemente, en total, el costo de la persona i es $c^{VCG}_i(t) - \Psi^*_i$.

Debido a que los subsidios de participación, ψ^*_i, se distribuyen independientemente de los informes, no tienen ningún efecto sobre los incentivos de uno para mentir. Por lo tanto divulgar su tipo verazmente sigue siendo una estrategia dominante. Además, por construcción, el mecanismo IR-VCG es individualmente racional y ex post eficiente. Por lo tanto, el mecanismo IR-VCG es incentivo-compatible, ex post eficiente e individualmente racional. El único problema es que podría no ser equilibrado. Para equilibrar el presupuesto, podríamos probar el mismo truco utilizado en el teorema 6, es decir, sentar a los individuos alrededor de una mesa circular y hacer que cada uno pague a la persona a su derecha su costo esperado dado su informe. Pero hay un problema. Debido a que los costos VCG se han reducido por los subsidios de participación, podría ser que el costo esperado de un individuo ahora fuera negativo. Entonces *no estaría pagando* a la persona a su derecha. En su lugar, estaría *tomando dinero* de la persona a su derecha (que también está pagando su costo esperado a la persona a su derecha). Este gasto adicional para él, el individuo a su derecha, podría conducir a una violación de su restricción de racionalidad individual. Si es así, nuestro truco de "mesa circular" equilibra el presupuesto, pero resulta en un mecanismo que ya no es individualmente racional. Por lo tanto, equilibrar el presupuesto cuando los costos esperados son negativos para algunos individuos requiere un método más sofisticado que el descrito en el teorema [6], si de hecho equilibrar el presupuesto es posible en absoluto.

Diremos que un mecanismo directo incentivo-compatible con funciones de costo $c_1,\ldots, c_N$, *tiene un superávit esperado*, si en el equilibrio veraz los ingresos esperados ex ante son no negativos, es decir, si

$$\sum_{i\in T} q(t) \left(\sum_{i=1}^{N} c_i(t)\right) \geq 0.$$

Observen que el mecanismo VCG tiene un superávit esperado porque $c^{VCG}_i(t) \geq 0$ para cada i y cada t. Por otro lado, el IR-VCG puede o no generar un superávit esperado porque reduce el superávit esperado del mecanismo VCG por el monto de los subsidios de participación. Podemos ahora afirmar el siguiente resultado, válido para cualquier mecanismo incentivo-compatible, no solo para los mecanismos particulares que hemos considerado hasta ahora.

Teorema 7 *Realización de un presupuesto balanceado*

Supongan que un mecanismo directo incentivo-compatible con funciones de costo $c_1,\ldots, c_N$ tiene un superávit esperado. Para cada individuo i y cada $t\in T$ reemplácese la función de costo c_i por la función de costo,

$$c^B_i(t) = c^@_i(t_i) - c^@_{i+1}(t_{i+1}) + c^@_{i+1} - 1/N\sum_{j=1}^{N} c^@_j,$$

donde $c^@_i = \sum_{t\in T} q(t)\, c_i(t)$ e $i+1 = 1$ cuando $i=N$. Entonces el mecanismo resultante - con la misma función de asignación de probabilidad - es equilibrado en el presupuesto y sigue siendo incentivo-compatible. Además, el mecanismo resultante es débilmente preferido por cada tipo de cada individuo al mecanismo original. Por lo tanto, si el mecanismo original era individualmente racional, también lo es el nuevo mecanismo con equilibrio presupuestario.

Análogamente al mecanismo de externalidad esperada de presupuesto equilibrado, las funciones de costo, c^B_i, definidas en el teorema [7] pueden ser descritas de manera bastante sencilla. Asienten a los N individuos en orden, de 1 a N, en sentido horario alrededor de una mesa circular. Si el individuo i informa t_i, paga a cada otro individuo la cantidad fija $c^@_{i+1}/N$ y paga al individuo a su derecha la cantidad adicional $c^@_i(t_i)$. ¡Eso es!

Si rastrean cuidadosamente quién paga a quién cuánto cuando el vector de informes es t, hallarán que, al final, el costo neto de la persona i es $c^B_i(t)$. Una vez más, lo bueno de esta forma de ver las funciones de costo c^B_i es que es "obvio" que se equilibra el presupuesto. ¿Por qué? Porque los N individuos simplemente están haciendo pagos entre sí. Por lo tanto, ningún dinero deja el sistema (porque no se generan ingresos) y no se bombea dinero al sistema (porque no se generan pérdidas). Por lo tanto, el presupuesto debe equilibrarse. No daré la demostración, que se puede ubicar como la demostración del Teorema 9.12 a partir de la página 491.

Tomen nota de algunas cosas acerca del Teorema [7]. En primer lugar, proporciona funciones presupuestarias explícitas de costo equilibrado derivadas de las funciones de costo originales que mantienen la compatibilidad de incentivos. En segundo lugar, no sólo conseguimos un presupuesto equilibrado, sino que al mismo tiempo aseguramos que cada individuo, independientemente de su tipo, esté al menos tan bien en el equilibrio veraz del nuevo mecanismo como lo estaba en el viejo. Por lo tanto, si los individuos estaban dispuestos a participar en el antiguo mecanismo, también estarían dispuestos a participar en el nuevo, inde-

pendientemente de su tipo. Por consiguiente, una implicación inmediata del teorema [7] es la siguiente.

Teorema 8 *Excedente esperado IR-VCG: Suficiencia*

Supongan que el mecanismo IR-VCG tiene un superávit esperado, es decir, supongan que,

$$\sum_{t\epsilon T}\sum_{i=1}^{N} q(t)\,(c^{VCG}{}_i\,(t) - \Psi^*{}_i) \geq 0.$$

Entonces, el siguiente mecanismo directo es incentivo-compatible, eficiente ex post, con equilibrio presupuestario, e individualmente racional: Cada individuo informa su tipo. Si el vector de tipos declarado es $t \in T$, entonces el estado social es $x^*(t)$, y el individuo i paga el costo,

$$c^{\diamond VCG}{}_i\,(t_i) - \psi^*{}_i - c^{\diamond VCG}{}_{i+1}(t_{i+1}) + c^{\diamond VCG}{}_{i+1} - 1/N \sum_{j=1}^{N} (c^{\diamond VCG}{}_j - \psi^*{}_j),$$

donde $c^{\diamond VCG}{}_j(t_j)$ está definido por [13] y $c^{\diamond VCG}{}_j = \sum_{tj\in Tj} q_j\,(t_j)\, c^{\diamond VCG}{}_j\,(t_j)$ es el costo VCG esperado ex ante del individuo j.

El teorema [8] (cuya demostración no ofrece dificultades) identifica el excedente esperado en el mecanismo IR-VCG como una condición *suficiente* para la existencia de un mecanismo que satisfaga todas nuestras demandas, es decir, compatibilidad de incentivos, eficiencia ex post, equilibrio presupuestario y racionalidad individual. Además, el teorema [8] explícitamente construye un mecanismo de este tipo.

4.8 Necesidad del excedente esperado del IR-VCG

Hasta este punto en nuestro análisis del modelo cuasi-lineal se supuso que el conjunto de tipos de cada individuo es finito. Esto fue sólo por simplicidad. Todo lo que hemos hecho hasta ahora continúa siendo válido esencialmente sin cambios incluso cuando los conjuntos de tipos son infinitos, por ejemplo, intervalos de números reales ($T_i = [0, 1]$) o productos de intervalos de números reales ($T_i = [0, 1]^K$).

Pero ahora queremos demostrar que un superávit esperado en el mecanismo IR-VCG no sólo es una condición suficiente, sino que es también una condición necesaria para la existencia de un mecanismo individualmente racional, de presupuesto equilibrado, incentivo-compatible y eficiente ex post. Y para hacerlo, debemos abandonar los espacios de tipo finito. Por lo tanto, se hará el supuesto más simple posible que se adapta a nuestros propósitos. Supongan que el espacio de tipos de cada individuo, T_i, es el intervalo unitario [0, 1].[26] Seguiremos suponiendo que el conjunto de estados sociales, X, es finito.

Nuestro objetivo es modesto. Queremos dar al lector una buena idea de por qué un excedente esperado en el mecanismo IR-VCG es también una condición necesaria para el diseño de mecanismos ex post eficientes cuando los conjuntos de tipos son intervalos sin el cuidado que hay que tener con los detalles técnicos más finos que surgen con tipos infinitos. Fortuitamente, la notación permanece en gran medida como ha sido hasta aquí, excepto que las sumas sobre tipos son ahora integrales, y las probabilidades, $q_i\,(t_i)$, son ahora funciones de densidad de probabilidad. Así, por ejemplo, dado un mecanismo directo, $p, c_1,\ldots, c_N$, tenemos ahora para cada individuo i y tipo $t_i \in [0, 1]$,

[26] También se puede permitir que los espacios de tipos sean cubos euclidianos. Pero no lo haremos aquí.

$$p^{@x}_i(t_i) = \int_{T-i} p^x_i(t_i, t_{-i}) q_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}, \text{ para todo } x \in X,$$

$$c^{@}_i(t_i) = \int_{T-i} c_i(t_i, t_{-i}) q_{-i}(t_{-i}) dt_{-i},$$

en lugar de las contrapartes en términos de sumas finitas. Ahora, supongan que el mecanismo directo, $p, c_1,..., c_N$, es incentivo-compatible. Esto implica que $u_i (r_i, t_i)$ se maximiza con respecto a r_i en $r_i = t_i$. Suponiendo diferenciabilidad dondequiera que la necesitamos, esto produce la siguiente condición de primer orden para cada individuo i y cada $t_i \in (0,1)$.

$$\partial u_i(r_i, t_i)/\partial r_i|_{ri=ti} = \sum_{x \in X} p^{xj}_i (t_i) v_i(x, t_i) - c'^{@}_i(t_i),$$

de forma que

[15] $$c'_i (t_i) = \sum_{x \in X} p^{x'}_i (t_i) v_i(x, t_i).$$

En consecuencia, si dos mecanismos, $p, c_{A1},..., c_{AN}$, y $p, c_{B1}, ..., c_{BN}$ tienen la misma función de asignación de probabilidad, entonces la derivada de los costos esperados en el mecanismo A, $c'_{Ai}(t_i)$, debe satisfacer [15] al igual que la derivada de los costos esperados en el mecanismo B, $c'_{Bi}(t_i)$. Por lo tanto, para todo i y todo $t_i \in (0, 1)$,

$$c'_{Ai}(t_i) = \sum_{x \in X} p^{x'}_i (t_i) v_i(x, t_i) = c'_{Bi}(t_i).$$

Es decir, las derivadas de las funciones de costo esperado deben ser idénticas. Pero entonces, dado que se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo, las funciones de costo esperadas deben diferir en una constante porque

$$c_{Ai}(t_i) - c_{Ai}(0) = \int_0^{ti} c'_{Ai}(s)\, ds = \int_0^{ti} c'_{Bi}(s)\, ds = c_{Bi}(t_i) - c_{Bi}(0).$$

Para llegar a esto se supuso diferenciabilidad del mecanismo y también que la derivada del costo esperado se comporta lo suficientemente bien como para aplicar el teorema fundamental del cálculo. Estos supuestos, de hecho, son innecesarios para el resultado siempre que, por ejemplo, exista la derivada $\partial v_i (x, t_i)/\partial t_i$ y sea continua en $t_i \in [0, 1]$ para cada $x \in X$. Además, como [15] depende sólo de las probabilidades esperadas, $p^{x'}_i$, basta que los dos mecanismos tengan las mismas funciones de asignación de probabilidad esperada. Otros resultados que se enuncian sin demostración son los siguientes:

Teorema 9 *Costos que difieren en una constante*

Supongan que para cada individuo i, existe $\partial v_i (x, t_i)/\partial t_i$ y es continua en $t_i \in [0, 1]$ para cada $x \in X$. Si dos mecanismos incentivo-compatibles tienen las mismas funciones de asignación de probabilidad esperada, $p^{x'}_i$, entonces para cada i, las funciones de costo esperado de i en los dos mecanismos difieren en una constante (que puede depender de i).

Teorema 10 *Teorema generalizado de Equivalencia de Ingresos*

Supongan que para cada individuo i, existe $\partial v_i (x, t_i) / \partial t_i$ y es continua en $t_i \in [0, 1]$ para cada $x \in X$. Si dos mecanismos incentivo-compatibles tienen las mismas funciones de asignación de probabilidad esperada, $p^{x'}_i$, y cada individuo es indiferente entre los dos meca-

nismos cuando su tipo es cero, entonces los dos mecanismos generan el mismo ingreso esperado.

El enunciado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 11 *Necesidad del Excedente Esperado IR-VCG*

Supongan que para cada individuo i, existe $\partial v_i(x, t_i)/\partial t_i$ y es continua en $t_i \in [0, 1]$ para cada $x \in X$. Además, supongan que para cada individuo i y para cada $t\text{-}i \in T_{-i}$, existe, para todos, excepto una cantidad numerable $t_i \in T_i$, un único estado social ex post eficiente dado (t_i, t_{-i}). Si existe un mecanismo directo incentivo-compatible, eficiente ex post, de presupuesto equilibrado e individualmente racional, el mecanismo IR-VCG tiene un superávit esperado.

Consideren el ejemplo de un comprador y un vendedor. El vendedor posee un objeto indivisible y tanto el comprador como el vendedor tienen preferencias cuasi-lineales y valores privados por el objeto. Hay dos estados sociales, C (el comprador recibe el objeto) y V (el vendedor recibe el objeto, en cuyo caso no hubo transacción). Indexamos a los dos individuos como i= c para el comprador e i= v para el vendedor. El tipo del comprador, t_c, y el tipo del vendedor, t_v, son obtenidos de manera uniforme e independiente del intervalo [0, 1]. Para cada individuo i, t_i es su valor del objeto. Así, por ejemplo, $v_c\ (C, t_c) = tc$ y $v_c\ (V, t_v) = 0$, y de manera similar para el vendedor. El vendedor tiene derechos de propiedad sobre el objeto y por tanto $IR_s(t_s) = t_s$ porque el vendedor siempre puede optar por no participar en el mecanismo y mantener su objeto. Por otro lado, $IR_b(t_b) = 0$ porque la no participación deja al comprador con cero utilidad.

Se desea saber si existe un mecanismo directo que sea incentivo-compatible, eficiente ex post, con presupuesto equilibrado e individualmente racional. Según los teoremas de la sección 4.7 y el teorema [11], la respuesta es "sí" si y sólo si el mecanismo IR-VCG tiene un superávit esperado. Veremos en clase que las condiciones requeridas no siempre se cumplen. Por lo tanto, cabe concluir que en esta situación no existe un mecanismo incentivo-compatible, eficiente ex post, con presupuesto equilibrado, e individualmente racional.

Este ejemplo es importante porque permite extraer varios *comentarios*. En primer lugar, el ejemplo proporciona una explicación para el fenómeno desconcertante de *huelgas y desacuerdos en situaciones de negociación*. Lo sorprendente de las huelgas es que uno se imagina que cualquier acuerdo alcanzado eventualmente podría haber sido alcanzado sin la huelga, ahorrando a ambas partes tiempo y recursos. Pero el resultado en el ejemplo demuestra que esta "intuición" es simplemente incorrecta. A veces no hay ningún mecanismo que pueda asegurar la eficiencia ex post - las ineficiencias deben aparecer ocasionalmente. Y un ejemplo de tal ineficiencia es el asociado con una huelga.

En segundo lugar, el ejemplo ilustra que *los derechos de propiedad son importantes*. Un resultado famoso en derecho y economía es el *Teorema de Coase*, que dice, aproximadamente, que si el único interés es la eficiencia de Pareto, los derechos de propiedad no importan - por ejemplo, si se da a una pesquería aguas abajo el derecho legal de agua potable o una planta de acero recibe el derecho legal de verter los residuos en la corriente, las dos partes, mediante pagos de transferencia apropiados entre sí, llegarán a un acuerdo de eficiencia paretiana (véase el capítulo 37). Nuestro análisis revela una advertencia importante, a saber, que el Teorema de Coase puede fallar cuando las partes tienen información privada sobre sus preferencias. Si ningún individuo tiene derechos de propiedad sobre los estados sociales,

hallamos que la eficiencia siempre es posible. Sin embargo, cuando se asignan derechos de propiedad (como en el ejemplo del comprador-vendedor), no siempre se puede garantizar un acuerdo eficiente.

En tercer lugar, el hecho de que los derechos de propiedad puedan influir sobre la eficiencia proporciona una lección importante para la *privatización de los activos públicos* (por ejemplo, la venta oficial de derechos petroleros en el mar o del espectro radioeléctrico para comunicaciones comerciales (teléfonos móviles, televisión, radio)). Si el objetivo del gobierno es la eficiencia, entonces es importante diseñar el mecanismo de privatización para asignar los objetos de manera eficiente, si es posible. Esto se debe a que la asignación, por su naturaleza, crea derechos de propiedad. Si la asignación es ineficiente y continúa habiendo información privada, el establecimiento de derechos de propiedad puede conducir a pérdidas de eficiencia inevitables, persistentes y potencialmente grandes.

4.9 Teorema de Myerson-Satterthwaite

Una excelente pregunta en este punto es: "¿Qué hacemos si no existe un mecanismo incentivo-compatible, eficiente ex post, con presupuesto equilibrado, individualmente racional?" Esta es una pregunta tremenda e importante, pero que no trataremos en esta introducción al diseño de mecanismos. Una respuesta, sin embargo, es que hacemos lo siguiente mejor. En lugar de eso, buscamos entre todos los mecanismos incentivo-compatibles que no pueden ser Pareto-mejorados desde la perspectiva interina (es decir, desde la perspectiva de los individuos una vez que conocen su tipo, pero no el de otros) o desde la perspectiva ex ante. Un excelente ejemplo de esta metodología se puede encontrar en Myerson y Satterthwaite.[27] El *teorema de Myerson-Satterthwaite (TMS)* es un resultado importante en la teoría del diseño de mecanismos y la economía de la información asimétrica. Informalmente, el resultado dice que no hay manera eficiente para que dos partes negocien un bien cuando cada uno tiene valoraciones secretas y probabilísticamente variables sobre él, sin el riesgo de obligar a una parte a operar con pérdidas.

El teorema TMS enuncia que, sujeto a restricciones sobre la distribución conjunta de los tipos c (comprador) y v (vendedor), no se puede tener simultáneamente eficiencia ex post, equilibrio presupuestario esperado y racionalidad individual interina.[28] Eficiencia ex post significa que el comercio ocurre cuando c> v (es decir, el comprador valora el objeto más que el vendedor) pero no cuando c<v. Equilibrio presupuestario esperado significa que si bien un tercero (por ejemplo, un juez) puede proporcionar un subsidio neto para algunos perfiles de tipos (c, v) y recaudar un impuesto neto para otros, la transferencia neta del tercero debe ser cero en expectativa sobre (c, v). Un requisito más fuerte sería el equilibrio presupuestario ex post, que requiere cero transferencias netas para cualquier (c, v). La racionalidad individual interina significa que comprador y vendedor pueden optar por no participar en el juego de negociación después de haber aprendido su propio tipo (por ejemplo, después de ver el bien que se va a negociar).

Dicho de otra manera, TMS dice que si se exige equilibrio presupuestario esperado y racionalidad individual ínterin, entonces la negociación no puede ser ex post eficiente. Esto no dice que el resultado será ineficaz para todos los valores de c y v, sólo que será ineficiente para

---

[27] Roger B. Myerson and Mark A. Satterthwaite, *Efficient Mechanisms for Bilateral Trading*, Jour. Ec. Theory, 1983.
[28] Véase John Nachbar, *The Myerson-Satterthwaite Theorem*, 2015.

algunos valores. Para muchos modelos de negociación estándar, la ineficiencia esperada puede ser grande, del orden de una pérdida del 25% del superávit esperado. Se pueden construir juegos con equilibrios que satisfagan eficiencia ex post y equilibrio presupuestario esperado, y se pueden construir juegos con equilibrios que satisfagan eficiencia ex post y racionalidad individual interina. Así que es la combinación de los tres criterios lo que causa un problema.

No es sorprendente que la negociación a veces sea ineficiente. Las huelgas laborales, los pleitos e incluso algunas guerras son ejemplos de fracasos en la negociación. El TMS es importante porque señala que la asimetría de información es una causa robusta de ineficiencia. Si los participantes conocieran el perfil del tipo (c, v), entonces serían aplicables los modelos estándar de negociación (por ejemplo, el juego de demanda de Nash, el juego de ofertas alternas de Rubinstein-Stahl, ver capítulo 32) que suelen tener equilibrios ex post eficientes. También puede haber equilibrios ineficientes, y en la práctica la ineficiencia podría surgir si cualquiera de los dos lados hace mal sus cálculos. Pero en tales casos un árbitro o un tercero podría forzar un comercio eficiente a un precio de, digamos, $(v + c) / 2$. Pero el TMS dice que si c y v son información privada, entonces la eficiencia ex post falla incluso con la intervención de un tercero.[29]

El teorema de Myerson-Satterthwaite está entre los resultados negativos más notables y universalmente aplicables en la economía - una especie de espejo negativo de los teoremas fundamentales de la economía del bienestar. Sin embargo, es mucho menos famoso que esos resultados o el resultado anterior de Arrow sobre la imposibilidad de sistemas electorales satisfactorios.

[29] La conclusión negativa de TMS es al menos en parte un problema de números pequeños. Hay juegos, en particular subastas, para los que la ineficiencia esperada, aunque aún sea positiva, se torna cada vez más pequeña a medida que crece el número de participantes.