<u>Introducción a Teoría de los Juegos</u>

Enrique A. Bour, Marzo 2011.

Ésta es una introducción basada en documentos de Robert Gibbons y de Don Ross[1] en los cuales se pone de manifiesto la vitalidad de esta rama del conocimiento, que tiene aplicaciones en economía, fundamentalmente en organización industrial – esto es, el campo de la economía que estudia la estructura y los límites entre las empresas y los mercados, así como la interacción estratégica entre las empresas – como así también en economía internacional, laboral, macroeconomía, historia económica, contabilidad, finanzas, derecho, comercialización, ciencias políticas y sociología.

Muchos utilizan TJ porque el instrumento les permite pensar como un economista cuando no es aplicable la teoría de los precios. Es decir, los modelos de TJ permiten a los economistas estudiar las implicancias de la racionalidad, del interés propio y del equilibrio, tanto en interacciones de mercado modeladas como juegos (como cuando hay pocos jugadores, información oculta, acciones ocultas o contratos incompletos) como en interacciones no mercantiles (como las que hay entre un regulador y una empresa, un jefe y un trabajador, y otras tantas). Muchos economistas aplicados aprecian que la TJ complementa a la teoría de los precios de esta forma, pero sin embargo hallan que TJ se presenta a menudo como una barrera a la entrada más que como un instrumento útil. Apuntando a esos lectores, se ha traducido el artículo de Gibbons que proporciona definiciones y ejemplos intuitivos de tipos básicos de juegos y de conceptos de solución. Este documento es una introducción para economistas y abogados que aún no leyeron algún libro sobre este tema. Más adelante, se ha complementado con algunos puntos del trabajo de Don Ross.

Robert Gibbons

En los puntos siguientes se analizan juegos estáticos y dinámicos, según tengan información completa o incompleta. <u>Información completa</u> significa que no existe información privada, es decir que la sincronización, las jugadas factibles y los pagos del juego son "conocimiento común". El caso más simple es el de los <u>juegos estáticos con información completa</u>, para los cuales el concepto de solución aplicable es el de equilibrio de Nash. Luego serán analizados <u>juegos dinámicos con información completa</u>, en los cuales el concepto de solución es el de inducción hacia atrás. Serán discutidos juegos dinámicos con información completa con múltiples equilibrios de Nash, demostrándose que la inducción hacia atrás permite elegir un equilibrio de Nash que no descansa en amenazas no creíbles. Luego se retorna a los <u>juegos estáticos, esta vez con información privada</u>. Para estos juegos se puede extender el concepto de equilibrio de Nash cuya solución es llamada un equilibrio de Nash bayesiano. Finalmente, son considerados los <u>juegos de señalización</u> (que son los juegos dinámicos más simples con información privada) y

---

[1] Robert Gibbons, An Introduction to Applicable Game Theory, Journal of Economic Perspectives-Volume 11, Number 1-Winter 1997-Pages 127-149; Don Ross, Game Theory, Stanford Encyclopedia of Philosophy, May 2010.

son combinadas las ideas de inducción hacia atrás y de equilibrio de Nash bayesiano a fin de definir los equilibrios bayesianos perfectos. Todos estos conceptos de equilibrio están íntimamente asociados, ya que a medida que se trata de juegos más ricos, el concepto de equilibrio es reforzado de modo progresivo a efectos de evitar que los juegos más ricos tengan equilibrios que podrían sobrevivir si se aplicaran los conceptos de juegos más simples. Al final, se consideran los equilibrios de mano temblorosa, planteados para resolver ciertos problemas de la inducción retrógrada.

1. Juegos Estáticos con Información Completa

Se comienza con juegos de dos jugadores y jugadas simultáneas. Lo que se dice para dos jugadores se extiende fácilmente a un número superior; más adelante serán analizados los juegos secuenciales.

Este tipo de juegos tiene la siguiente sincronización:

1) El jugador 1 elige una acción a_1 de su conjunto de acciones factibles A_1. En forma simultánea, el jugador 2 elige una acción a_2 de su conjunto de acciones factibles A_2.
2) Luego de elegir sus acciones, reciben pagos: $u_1(a_1,a_2)$ el jugador 1 y $u_2(a_1,a_2)$ el jugador 2.

Tabla 1. Eliminación iterada de estrategias dominadas

		Jugador 2		
		Izquierda	Centro	Derecha
Jugador 1	Arriba	(1,0)	(1,2)	(0,1)
	Abajo	(0,3)	(0,1)	(2,0)

Son ejemplos clásicos de juegos estáticos con información completa los modelos del duopolio de Cournot[2], el modelo de Hotelling de elección de la plataforma por los candidatos[3], el de Farber sobre la oferta final[4] y el de Grossman y Hart[5] de ofertas públicas de adquisición.

2. Juegos Racionales

En lugar de preguntarnos sobre cómo *debería* ser jugado un juego, se intentará en primer término responder a *cómo no debería ser jugado*. Considérese la Tabla 1. El

[2] A. Cournot, Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses, 1838: English translation by Nathaniel T. Bacon, with a Bibliography of Mathematical Economics by Irving Fisher, 1897.
[3] Harold Hotelling, Stability in Competition, The Economic Journal, Vol. 39, No. 153. (Mar., 1929), pp. 41-57.
[4] Farber, Henry, An Analysis of Final-Offer Arbitration, Journal of Conflict Resolution, December 1980, 35, 683-705.
[5] Sanford J. Grossman and Oliver D. Hart, Takeover Bids, The Free-Rider Problem, and the Theory of the Corporation, The Bell Journal of Economics, Vol. 11, No. 1 (Spring, 1980), pp. 42-64.

jugador 1 dispone de dos acciones (arriba, abajo); el jugador 2 tiene tres (izquierda, centro, derecha). La jugada derecha resulta dominada, para el jugador 2, por la jugada del medio: si el jugador 1 elige arriba, si 2 juega derecha obtiene 1, mientras que jugando al medio obtiene 2; si 1 elige abajo, jugar derecha le genera un rendimiento 0 para 2, mientras que jugar medio le genera 1. Luego, un jugador racional 2 no jugará derecha. Decimos que la acción a_3 está *dominada* por la acción a_2 si, cualquiera sea la elección que haga el otro jugador, la utilidad de jugar a_3 se encuentra por debajo de la utilidad de jugar a_2. Llevando el argumento un paso más adelante, si 1 sabe que 2 es racional, el jugador 1 eliminará la acción derecha del conjunto de acciones posibles de 2. Es decir, 1 puede jugar el juego como si 2 tuviera sólo dos estrategias, la izquierda y la del medio. Pero en tal caso, la estrategia abajo está dominada por arriba para el jugador 1, ya que si 2 juega izquierda, a 1 le conviene jugar 1, y lo mismo sucede si 2 juega la estrategia del medio. Luego, si 1 es racional (y 1 sabe que 2 lo es), entonces 1 no jugará abajo.

¿Qué sucede ahora si 2 sabe que 1 es racional, y además 2 sabe que 1 sabe que 2 es racional? En este caso, 2 puede eliminar la estrategia abajo del espacio de 1, dejando la estrategia arriba como la única disponible. En tal caso, izquierda resulta dominada por medio para 2, lo que deja (Arriba, Medio) como la solución del juego. *Este argumento nos muestra que algunos juegos pueden ser resueltos preguntándose en forma repetida cómo no debería ser jugado*. A este proceso se lo llama eliminación iterada de estrategias dominadas. Tiene, sin embargo, dos defectos: en primer término, cada paso requiere un supuesto adicional sobre lo que los jugadores conocen de la racionalidad del otro. Segundo, el procedimiento con frecuencia da lugar a predicciones muy imprecisas sobre el resultado del juego. Tómese la Tabla 2, en la cual no hay estrategias dominadas que puedan eliminarse.

Tabla 2. Juego sin Estrategias Dominadas que puedan Eliminarse

	L	C	R
T	(0,4)	(4,0)	(5,3)
M	(4,0)	(0,4)	(5,3)
B	(3,5)	(3,5)	(6,6)

Como en este juego no quedan estrategias dominadas que puedan eliminarse, el procedimiento que usamos en la Tabla 1 no permite predecir cómo será jugado este juego. Para ello se requiere un instrumento más potente – el equilibrio de Nash[6]. Como se verá, ambos juegos de las tablas 1 y 2 tienen un único equilibrio de Nash.

3. Equilibrios de Nash

A fin de introducir este concepto, en lugar de averiguar cuál es la solución de un juego dado (como también se procedió previamente), nos preguntamos qué

[6] Para una introducción a este punto, sugiero la lectura del Capítulo III del Tratado de Microeconomía, a partir del punto 7 (Economía, racionalidad e instituciones: Los Equilibrios de Nash), página 78.

resultados no pueden ser una solución. Luego de eliminarlos, nos quedaremos con una o más soluciones posibles. Luego analizaremos cuál de estas soluciones posibles (si las hay) merece una atención adicional. También veremos la posibilidad de que el juego no tenga solución.

Supóngase que TJ ofrece una única predicción sobre cómo será jugado determinado juego. Para que sea correcta, se requiere que cada jugador elija la estrategia predicha para dicho jugador. Entonces, la estrategia predicha será la mejor respuesta del jugador a las estrategias predichas para los demás jugadores. Una colección semejante de estrategias predichas podría ser denominada "estable desde el punto de vista estratégico" o "auto-cumplible", porque ningún jugador desea desviarse de la estrategia que fue predicha para él. A esta colección de estrategias se la llama un **equilibrio de Nash**. [7] Si (a_1^*,a_2^*) no es un equilibrio de Nash, se tendrá que a_1^* no será la mejor respuesta de 1 o que a_2^* no lo será para 2, o ambas situaciones al mismo tiempo. De esta forma, si la teoría ofrece las estrategias (a_1^*,a_2^*) como una solución, pero éstas no son un equilibrio de Nash, luego por lo menos alguno de los jugadores estará incentivado a desviarse de lo que predice la teoría, haciendo que ésta sea falsa.


John Nash

Para ver a un EN en acción, volvamos a las Tablas 1 y 2. En 5 de los 6 pares de estrategias de la Tabla 1, al menos uno de los jugadores estaría dispuesto a cambiar su estrategia si alguien propusiera que ese par de estrategias es la solución del juego. Solamente (Arriba, Medio) satisface el criterio de Nash. En forma similar, en los 9 pares de estrategias de la Tabla 2, sólo el par (B,R) es "estratégicamente estable" o "auto-cumplible". Además, en esta última tabla, el único EN es *eficiente*, ya que proporciona los pagos más elevados del juego a ambos jugadores. Pero éste no es un resultado general, como se observa en la Tabla 3 – el famoso Dilema del Prisionero. (Hay otro ejemplo muy conocido de un único EN no eficiente: el caso del duopolio de Cournot).

Tabla 3. El Dilema del Prisionero (utilidad: meses de cárcel)

		Jugador 2 (Miguel)	
		(C)	(N)
Jugador 1 (José)	(C)	(-24,-24)	(-3,-60)
	(N)	(-60,-3)	(-6,-6)

La terminología "prisionero" proviene de un ejemplo como el siguiente: Dos hombres son arrestados por atraco. De ser condenados, recibirán una sentencia de cárcel de entre dos a cinco años; la duración dependerá de lo que recomiende el

[7] En términos formales, si hay 2 jugadores y el juego tiene jugadas simultáneas, las acciones (a_1^*,a_2^*) constituyen un equilibrio de Nash si a_1^* es la mejor respuesta de 1 a a_2^*, y a_2^* es la mejor respuesta de 2 a a_1^*. Es decir, que debe satisfacerse que $u_1(a_1^*,a_2^*)\geq u_1(a_1,a_2^*)$ para todo a_1 en A_1, y a_2^* debe satisfacer $u_2(a_1^*,a_2^*)\geq u_2(a_1^*,a_2)$ para todo a_2 en A_2.

fiscal. Desgraciadamente el Fiscal del Distrito (FD) no tiene suficiente evidencia como para recomendar una condena.

El FD pone a los criminales en celdas separadas. Primero habla con José, que es el Jugador 1. Le dice que si confiesa (C) y Miguel (Jugador 2) no lo hace, el FD retirará la acusación de robo dejándolo sólo con un tirón de orejas – tres meses por invadir propiedad privada. Si Miguel también confiesa, el FD no puede retirar los cargos y pedirá al juez indulgencia; Miguel y José obtendrán una sentencia de dos años (24 meses) cada uno.

Si José se niega a confesar, el FD no será tan amigable. Si Miguel confiesa, José será declarado culpable y el FD pedirá la máxima sentencia posible. Si ninguno confiesa, el FD no puede declararlos culpables del robo, pero presionará para obtener una sentencia por invasión de propiedad privada, resistencia a la autoridad y vagancia.

Después de explicar todo esto a José, el FD va a la celda de Miguel y mantiene la misma conversación con nombres invertidos. La matriz de pagos que enfrentan José y Miguel es la tabla 3, y José razona de la siguiente manera:

"Si Miguel confiesa y yo no, me darán 5 años; si yo también confieso, me aplicarán 2 años. Si Miguel va a confesar, lo mejor que puedo hacer es también confesar.

Si ninguno de los dos confiesa, me aplicarán una pena de 6 meses. Es una mejora considerable con respecto a la situación en la que Miguel se delata, pero puedo conseguir algo mejor: si Miguel no habla y yo confieso, a mí me aplicarán solamente 3 meses. Luego, si Miguel se queda callado, voy a estar mejor confesando. En realidad, a mí me conviene confesar independientemente de lo que haga Miguel."

Ambos piden a la guardia que llamen al FD para dictar sus confesiones.

Cada uno de los criminales confiesa porque calcula, correctamente, que la confesión es mejor que el silencio sea lo que haga el otro criminal. Si una estrategia conduce a un mejor resultado sea lo que haga el otro jugador, se trata de una estrategia dominante. Si los dos jugadores tienen estrategias dominantes, se tiene una solución del juego. Ambos jugadores actuaron en forma racional y ambos terminan, como resultado, peor. Parece extraño que la racionalidad, definida como tomar la decisión que maximiza los objetivos individuales, resulte en que ambos terminen peor. A muchos el resultado del Dilema de los Prisioneros les parecerá contrario a la intuición. Pero la racionalidad es un supuesto sobre los <u>individuos</u> y no sobre <u>grupos</u>. Ha existido una suerte de fascinación universal con el dilema de los prisioneros, lo cual se debe a que representa en forma cruda y transparente el hecho amargo de que cuando los individuos persiguen su propio interés, el resultado puede ser un desastre para todos. El principio tiene docenas y docenas de aplicaciones, grandes y pequeñas, en la vida cotidiana. La gente que no coopera y actúa en pos de su propio beneficio mutuo no es necesariamente estúpida o irracional; puede estar actuando de modo perfectamente racional.

Cuanto antes se acepte esto, más rápido se llegará a diseñar un esquema de compromiso social para favorecer la cooperación. Un paso en tal sentido que podría ser de amplia aplicación, es disponer de un mecanismo para la aplicación de acuerdos *voluntarios*. 'Recen por el bienestar de los gobiernos, sin cuya autoridad los hombres se tragarían a todos los hombres con vida' (Ética de los Padres, III:2, citado por R. Aumann).

La teoría de los juegos no cooperativos trata de situaciones donde las partes no pueden suscribir acuerdos obligatorios para todos. Inclusive en juegos muy complicados, con muchos jugadores que tienen muchas estrategias, es posible describir el resultado por medio de la solución de Nash. John Nash demostró que habitualmente hay por lo menos un resultado estable, que ningún jugador puede mejorar de por sí eligiendo una estrategia diferente cuando todos los jugadores tienen expectativas correctas sobre las estrategias que seguirán los demás. Aunque cada uno actúe racionalmente, el equilibrio de Nash demuestra que la interacción estratégica puede conducir a menudo a la irracionalidad global: guerras comerciales o una excesiva emisión de contaminantes que amenazan al contexto global, son ejemplos en la esfera internacional. El equilibrio de Nash también ha sido importante en ecología evolutiva – que describe la selección natural como una interacción estratégica dentro y entre especies.

Algunos juegos tienen EN múltiples, como la Batalla de los Sexos en la Tabla 4. Cristina y Guillermo cenarán juntos esta noche y actualmente están llegando al hogar desde sus lugares de trabajo. Se supone que Cristina comprará el vino y Guillermo el plato principal, pero Cristina podría comprar vino tinto o vino blanco, y Guillermo bifes o pollo. Ambos preferirían comer bifes con vino tinto y carne de pollo con vino blanco, pero Guillermo prefiere la primera combinación y Cristina la segunda; es decir, los jugadores prefieren coordinarse pero están en desacuerdo en la forma de

Tabla 4. La Batalla de los Sexos

		Cristina	
		Tinto	Blanco
Guillermo	Bife	(2,1)	(0,0)
	Pollo	(0,0)	(1,2)

hacerlo. El par (Bife, Vino Tinto) es un EN, así como lo es el par (Pollo, Vino Blanco), pero no hay una manera obvia de decidir entre ambos equilibrios. Hay muchas aplicaciones de este juego, incluyendo a grupos políticos que buscan establecer una constitución, a empresas que tratan de establecer un estándar industrial, etc. El concepto de EN pierde gran parte de su atractivo en tales casos de multiplicidad. Que en esos casos surja algún EN como una convención puede depender de accidentes históricos.[8]

Hay otros juegos, como el Juego de las Monedas de la Tabla 5, que carecen de un par de estrategias que cumplan con la definición de mejor respuesta mutua de Nash. La característica distintiva de este juego es que cada jugador trataría de ser más astuto que el otro. Versiones de este juego aparecen en el poker, la auditoría

Tabla 5. Juego de las Monedas

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	(-1,1)	(1,-1)
	Cruz	(1,-1)	(-1,1)

y en otros casos. Por ejemplo, en poker la cuestión análoga es con cuánta frecuencia hacer bluff: si se sabe que el jugador *i* nunca hace bluff, sus adversarios se replegarán cada vez que *i* juegue en forma agresiva, lo que significa que sólo será valioso hacer bluff de vez en cuando; por otra parte, practicar bluff en forma demasiado frecuente también es una estrategia perdedora. En forma similar, en tareas de auditoría, si el subordinado trabaja de modo diligente, el jefe preferirá no incurrir el costo de auditarlo, pero si no lo audita, el subordinado preferirá no cumplir con sus obligaciones, etc.

En todo juego en que uno de los jugadores trate de ser más astuto que el otro, no se tendrá un par de estrategias que satisfagan la definición dada de un EN. En esos casos, una solución involucra necesariamente incertidumbre sobre lo que harán los jugadores. Para modelizarla, a las acciones del espacio del jugador *i* A_i se las suele llamar estrategias puras, y se definen estrategias mixtas como distribuciones de probabilidad sobre algunas o sobre todas las estrategias puras de un jugador. A veces se describe una estrategia mixta como si el jugador *i* echara a rodar un dado para seleccionar una estrategia pura, pero más adelante se hará una interpretación más plausible, basada en la incertidumbre del jugador *j* acerca de la estrategia que elegirá el jugador *i*. Más allá de la interpretación de las estrategias mixtas, una vez que se dispone de esta interpretación más extendida, cualquier juego con un número finito de jugadores, cada uno con un número finito de estrategias, tiene un equilibrio de Nash (que involucre tal vez jugar estrategias mixtas)[9].

Denotamos como p^1 (p^2) al vector de probabilidades aplicado por el jugador 1 (2) sobre sus estrategias puras de fila (columna). El jugador 1 buscará el más alto pago esperado garantizado, para lo cual elegirá estas probabilidades a fin de maximizar

---

[8] H. Peyton Young, The Economics of Convention, The Journal of Economic Perspectives, Vol. 10, No. 2 (Spring, 1996), pp. 105-122.

[9] Véase John Nash, Equilibrium Points in N-Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 36, 1950. Una traducción de este artículo está incluída en el Capítulo 16 de mi Tratado de Microeconomía.

el pago mínimo esperado. Este pago mínimo puede ser escrito por medio de desigualdades lineales[10]:

$p^1\Pi e'_j \equiv \Sigma_{i=1}{}^m p_i{}^1 \Pi_{ij} \geq \Pi_1(p^1)$, j=1, ...,n;

o, lo que es lo mismo:

$p^1\Pi - \Pi_1(p^1)\mathbf{1} \geq 0$

donde **1** es un vector de unos. Luego, el problema del jugador 1 puede expresarse como un problema de programación lineal:

$\max_{p1} \Pi_1(p^1)$

bajo las restricciones:

$p_1\Pi - \Pi_1(p^1)\mathbf{1} \geq 0$
$p_1\mathbf{1}' = 1$
$p_1 \geq 0.$

Para el jugador 2, que minimiza el máximo, se tendrá:
$\min_{p2} \Pi^2 (p^2)$
$\Pi p^2 - \mathbf{1}'\Pi^2 (p^2) \geq 0$
$\mathbf{1}p^2 = 1$
$p^2 \geq 0.$

Estos dos problemas son duales el uno del otro:

Tabla 6. Dualidad en Teoría de los Juegos

	$p_1{}^2$	$p_2{}^2$	......	$p_n{}^2$	$-\prod^2(\mathbf{p}^2)$	
$p_1{}^1$	$\prod_{11}$	$\prod_{12}$	......	$\prod_{1n}$	1	≤ 0
$p_2{}^1$	$\prod_{21}$	$\prod_{22}$	......	$\prod_{2n}$	1	≤ 0
....	....	....	......	....	....	....
$p_m{}^1$	$\prod_{m1}$	$\prod_{m2}$	......	$\prod_{mn}$	1	≤ 0
$-\prod^1(\mathbf{p}^1)$	1	1	......	1	1	=1- $\prod^2(\mathbf{p}^2)\rightarrow$máx; e.d. mín $\prod^2(\mathbf{p}^2)$
	≥ 0	≥ 0	......	≥ 0	=1- $\prod^1(\mathbf{p}^1)\rightarrow$mín; e.d. max $\prod^1(\mathbf{p}^1)$	

Para que la suma de probabilidades sea la unidad, se define:

[10] Según esta notación, la matriz $\prod$ representa a la matriz de pagos del juego, mientras que e'_j es un vector columna de unos.

$p_m^1 = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_i^1$
$p_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j^2.$

Dado que existen vectores factibles en ambos conjuntos de oportunidades, es decir, los vectores unitarios, según un teorema de existencia de la programación lineal existen soluciones p^{1*}, p^{2*} de ambos problemas. Un teorema de dualidad asegura que:

$$\prod^1(\mathbf{p^{1*}}) = \max_{\mathbf{p1}} \prod^1(\mathbf{p^1}) = V = \min_{\mathbf{p2}} \prod^2(\mathbf{p^2}) = \prod^2(\mathbf{p^{2*}})$$

donde V es el valor del juego. Hemos arribado así a la conclusión de que el teorema de dualidad de la programación lineal implica el teorema minimax de la teoría de los juegos. Una implicancia adicional es la siguiente:

O bien se tiene $\sum_{i=1}^{m} p_i^{1*} \prod_{ij} = V$ o $p_j^{2*}=0, j=1,2,\ldots,n.$
O bien, $\sum_{j=1}^{n} \prod_{ij} p_j^{2*} = V$ o $p_i^{1*}=0, i=1,2,\ldots, m.$

Por ejemplo, si el pago esperado por 1 es mayor que el valor del juego para una determinada estrategia pura del jugador 2, entonces 1 juega esta estrategia con probabilidad cero.

En un juego estrictamente determinado, en el cual el juego presenta un punto de ensilladura, las estrategias óptimas mixtas asignan probabilidad igual a uno a las estrategias puras en el *punto de ensilladura*, es decir que los vectores de estrategia mixta óptima son vectores unitarios. En realidad, el número de elementos no nulos en los vectores de estrategia mixta óptima no superará al mínimo de los números de estrategias puras de que disponen los jugadores.

Cuando los jugadores emplean sus estrategias óptimas no revelan a sus oponentes la estrategia real que van a emplear sea cual fuere la forma de jugar el juego. La estrategia es seleccionada mediante un mecanismo de probabilidades empleando las probabilidades óptimas (por ejemplo, mediante una moneda, arrojando dados, una tabla de números aleatorios, etc.) lo que hace imposible al rival conocer la estrategia real que será usada en la partida. Si pudiese hacerlo, podría explotar este conocimiento en beneficio propio. Sin embargo, el oponente nunca podrá emplear información alguna partiendo de las probabilidades óptimas empleadas en un juego bien jugado.

Hay una solución mucho más simple, que se puede obtener en forma gráfica, cuando un jugador (por ejemplo el 1) dispone sólo de dos estrategias. Tomemos como ejemplo el siguiente juego que no está estrictamente determinado:

Tabla 7. Un Juego que no está Estrictamente Determinado

	Jugador 2			Mínimo de fila
Jugador 1	6	-2	3	-2
	-4	5	4	-4
Máximo de columna	6	5	4	

En la Figura 1, el eje horizontal mide p_2^1, la probabilidad de que el jugador elija su segunda estrategia, a saber la segunda fila de la matriz. Como $p_1^1 = 1 - p_2^1$, los puntos 0 y 1 corresponden a las dos estrategias puras de elegir la primera y la segunda fila, respectivamente. Verticalmente medimos el pago al jugador 1, y cada una de las líneas en color rojo se obtiene suponiendo que el oponente (2) seleccionará una de sus estrategias puras. Así, si 2 elige la primera columna, el pago del jugador 1 es igual a 6 si elige la primera fila, ($p_2^1=0$) y -4 si elige la segunda fila ($p_2^1=1$), representados como 6 de la ordenada al origen del lado izquierdo del gráfico y el -4 de la ordenada al origen del lado derecho. La recta que une ambos puntos representa lo que implican los pagos de todas las estrategias mixtas. Como el jugador 1 se pone en el peor de los mundos posibles, el único lugar geométrico que le queda a 1 es la línea roja de trazo grueso con forma de V invertida. Los puntos de este lugar geométrico representan el menor pago esperado de 1 a medida que cambia su probabilidad de elegir la fila 2. Maximizar el pago esperado requiere que $p_2^{1*}=8/17$. De esta manera su primera estrategia será elegida con probabilidad $9/17$. El Valor del juego será $V=-2(9/17)+5(8/17) = 6(9/17) - 4(8/17) = 22/17$.

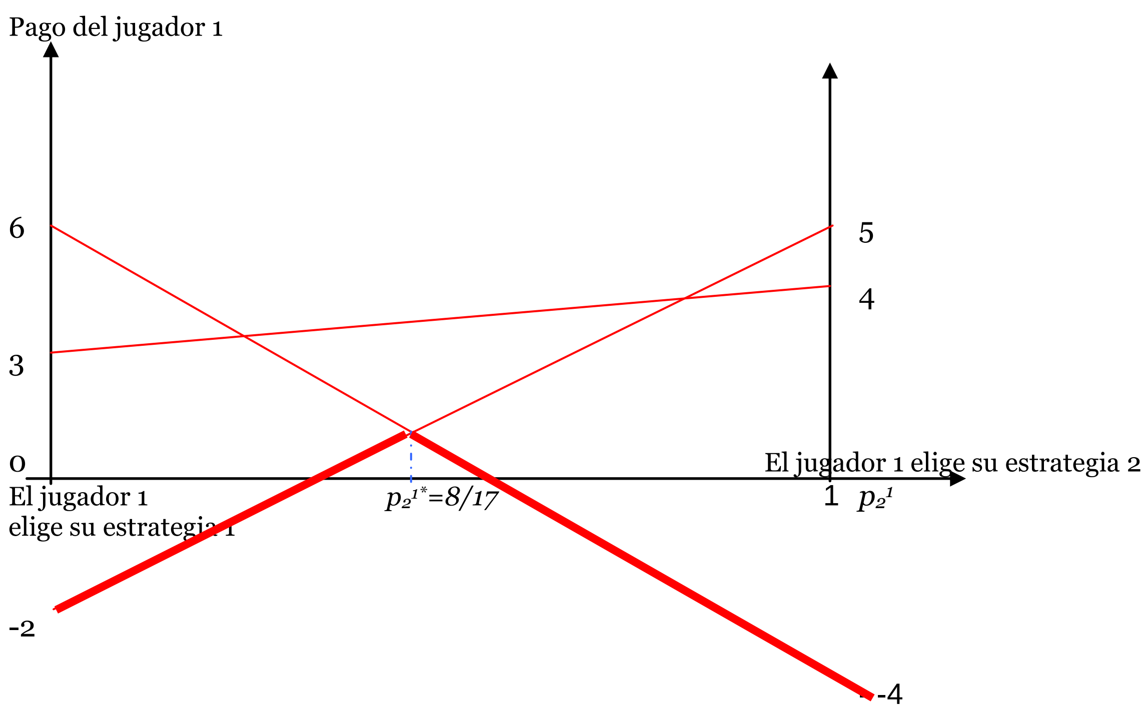


Figura 1. Un Juego Bi-personal de suma nula

4. Juegos Dinámicos con Información Completa

Se comenzará con un juego de dos jugadores, de jugadas sucesivas. La sincronización de estos juegos es del siguiente tipo:

1) El Jugador 1 elige una acción a_1 de un conjunto de acciones posibles A_1.
2) El Jugador 2 observa la acción elegida por 1 y elige una acción a_2 de un conjunto de acciones posibles A_2.
3) Luego de elegir sus acciones, ambos reciben sus pagos: $u_1(a_1,a_2)$ para 1 y $u_2(a_1,a_2)$ para 2.

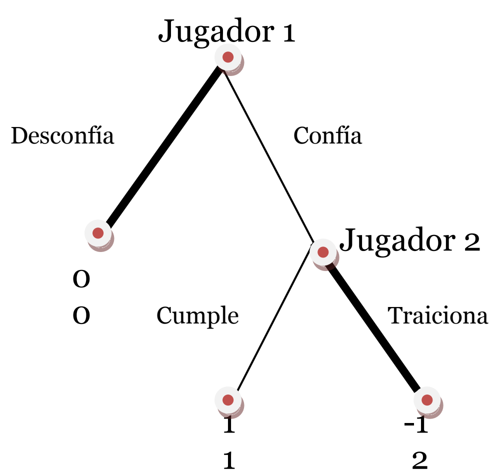
Un clásico ejemplo de estos juegos con información completa es la versión de Stackelberg de un duopolio de Cournot con jugadas en secuencia. Otro ejemplo es un famoso documento de Rubinstein sobre un modelo de negociación[11], y considerado un documento clave de la teoría de la negociación.

El nuevo concepto de solución involucra inducción hacia atrás o retrógrada. Como veremos, en muchos juegos dinámicos hay varios equilibrios de Nash, algunos de los cuales dependen de amenazas no creíbles – definidas como amenazas que el amenazador no desearía ejecutar, y que no serán llevadas a cabo si se cree en la amenaza. La inducción retrógrada identifica equilibrios de Nash que no dependen de estas amenazas.

5. Inducción Retrógrada

Considérese el Juego de la Confianza de la Figura 2, donde el Jugador 1 elige en primer término Confiar o Desconfiar del Jugador 2. Para simplificar, se supondrá que si 1 elige Desconfiar entonces el juego termina – 1 concluye con la relación. Si 1 elige Confiar en 2, el juego continúa, y 2 elige si Cumple o Traiciona la confianza otorgada por 1.

Figura 2. Árbol del Juego



[11] Ariel Rubinstein, Perfect Equilibrium in a Bargaining Model, Econometrica, Vol. 50, No. 1 (Jan., 1982), pp. 97-109.

		Jugador 2	
		Cumple	Traiciona
Jugador 1	Confía	(1,1)	(-1,2)
	Desconfía	(0,0)	(0,0)

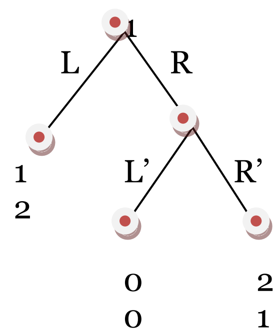
Si el jugador 1 termina con la relación, los pagos de ambos jugadores son iguales a 0. Si 1 elige confiar en 2, los pagos de ambos serán 1 si 2 Cumple con la relación de confianza, pero 1 recibirá -1 y 2 recibirá 2 si este último jugador traiciona a 1. Todos estos elementos están captados en el árbol de decisión de la figura. El juego comienza en un nodo de decisión del jugador 1 y llega a un nodo decisión del jugador 2 si 1 juega Confiar. Al término de cada rama del árbol, los pagos al jugador 1 aparecen encima de los pagos a 2. A continuación se explican las ramas en negrita.

Se resuelve el Juego de la Confianza yendo hacia atrás en las ramas del árbol. Si le toca jugar a 2 (es decir, que el jugador 1 eligió Confiar), en tal caso 2 puede recibir un pago de 1 si decide cumplir con 1 o un pago de 2 si decide traicionarlo. Como 2>1, decidirá traicionarlo. Sabiendo de ello, la decisión inicial de 1 consiste en elegir entre terminar con la relación (recibiendo así un pago =0) o confiar en el jugador 2 (con lo cual recibirá un pago de -1, luego de que 2 lo traicione). Como 0> -1, el jugador 1 debería jugar desconfiando. Estos argumentos están resumidos en las líneas en negrita más gruesas del árbol del juego.

Hasta este punto, pareciera que los juegos de movimientos simultáneos pueden ser representados mediante una matriz (llamada la "forma normal"), como en la sección 3, mientras que los juegos de jugadas secuenciales pueden ser representados utilizando árboles estratégicos. También pareciera que se están usando dos métodos distintos para resolver estos dos tipos de juegos: los EN en los juegos de movimientos simultáneos y la inducción retrógrada en los juegos de jugadas secuenciales. Todo ello es incorrecto, ya que todo juego puede ser representado o bien en forma normal o mediante un árbol estratégico (llamado también la forma estratégica del juego) pero hay juegos en que una representación es más conveniente que la otra. Por ejemplo, en el Juego de la Confianza, representado tanto mediante un árbol de decisión como mediante la forma normal ubicada debajo de la Figura 2, se puede verificar que el EN no es el par (Desconfía, Traiciona), como fue hecho mediante el uso de inducción retrógrada en el árbol del juego.

Estos comentarios dejan a oscuras un punto sutil: en algunos juegos, hay varios EN, algunos de los cuales dependen de amenazas o promesas no creíbles. Por fortuna, el método de inducción retrógrada proporciona siempre la solución de un EN que no depende de amenazas o de promesas no creíbles. Como ejemplo de un EN que depende de amenazas no creíbles (pero que no satisface la inducción retrógrada), considérese el árbol estratégico y la forma normal asociada de la Figura 3.

Figura 3. Un Juego que depende de una Amenaza no Creíble



	L'	R'
L	(1,2)	(1,2)
R	(0,0)	(2,1)

Operando hacia atrás en el árbol se obtiene que la solución retrógrada es que el jugador 2 juegue R' si se le da la oportunidad, y que el jugador 1 juegue R. Pero la forma normal revela que existen dos EN: (R,R') y (L,L'). El segundo EN existe porque la mejor respuesta de 1 a la jugada L' por 2 es terminar el juego eligiendo L. Pero (L,L') depende de la amenaza no creíble del jugador 2 de jugar L' en lugar de R' si tiene la oportunidad. Si el jugador 1 cree en la amenaza de 2, entonces 2 está descolgado, porque 1 jugará L, y 2 nunca tendrá la oportunidad de llevar a cabo su amenaza.

La inducción retrógrada puede aplicarse a cualquier juego con horizonte finito e información completa, en el que los jugadores hagan sus jugadas de a uno por vez y todas las jugadas previas sean conocimiento común antes de que sea elegida la próxima jugada. El método es sencillo: ir al final del juego y proceder hacia atrás, un paso tras otro. El método, empero, no puede aplicarse a juegos dinámicos con jugadas simultáneas o con horizonte infinito. La sección siguiente permite hacer una extensión en esa dirección.

6. Equilibrios Perfectos de Nash en el Sub-juego

Ésta es una refinación del concepto de EN. Para que un juego sea perfecto en el sub-juego, en primer término las estrategias de los jugadores deben constituir un EN y además deben cumplir con otro requerimiento, a saber, eliminarse aquellos EN que descansan en amenazas no creíbles.

A fin de dar una definición informal de un EPNS, volvemos a la motivación para un EN – a saber, que una solución única de un problema estratégico debe satisfacer requerimientos de constituir una mejor respuesta mutua. En varios juegos dinámicos, idéntico argumento puede aplicarse a ciertos segmentos del juego, llamados sub-juegos. Un sub-juego es un pedazo del juego original que queda para ser jugado en cualquier punto en el cual la historia completa del juego sea conocimiento común. En el Juego de la Confianza de una sola vez, por ejemplo, la historia de las jugadas es conocimiento común después de que el jugador 1 juega. El pedazo del juego que queda entonces es muy simple – solamente una jugada para el jugador 2.

Un segundo ejemplo de sub-juego (y eventualmente, de un EPNS) está dado por el modelo de torneos de Lazear y Rosen[12]. En primer lugar, el principal elige dos salarios: W_H para el ganador y W_L para el perdedor. Luego, los dos trabajadores observan estos salarios y deciden acerca de sus niveles de esfuerzo, en forma simultánea. Finalmente, lo producido por cada trabajador (igual al esfuerzo del trabajador más un cierto ruido) es observado, y el trabajador con mayor producción gana W_H. En este juego, la historia de las jugadas es conocimiento común, a partir de que el principal elige los salarios. El pedazo de juego que queda es el juego de elección de esfuerzo por parte de los trabajadores. Como la elección de esfuerzo de los trabajadores tiene jugadas simultáneas, no es posible ir hasta el final del juego y operar de atrás hacia adelante *jugada por jugada*, como si fuera posible la inducción retrógrada[13]. En otros términos, analizamos a ambos tipos de jugadores jugando en forma simultánea. Esto es, se analiza al sub-juego completo que queda luego que el principal fija los salarios hallando el EN en el juego de elección de esfuerzo de los trabajadores, dados salarios arbitrarios elegidos por el principal. Dada la respuesta de equilibrio de los trabajadores a estos salarios arbitrarios, podemos proceder hacia atrás, resolviendo el problema del principal: elegir salarios que maximicen los beneficios esperados dada la respuesta de equilibrio de los trabajadores. Este procedimiento proporciona el equilibrio perfecto de Nash del sub-juego del juego del torneo[14].

Es típico que el juego del torneo tenga otros EN que no son perfectos en sub-juegos. P.ej., el principal podría pagar salarios muy elevados a causa de que los trabajadores amenazan con ser unos vagos si se les paga una suma inferior. Resolviendo la respuesta de equilibrio a un par arbitrario de salarios muestra que esta amenaza no es creíble. Esta solución ilustra una definición de equilibrio de Nash perfecto en los sub-juegos dada por Selten[15].

David M. Kreps

7. Juegos Repetidos

[12] Edward P. Lazear and Sherwin Rosen, Rank-Order Tournaments as Optimum Labor Contracts, NBER Working Paper No. 401, December 1981.
[13] Por ejemplo, si vamos al final del juego, ¿la jugada de qué jugador deberíamos analizar en primer término?
[14] Un ejemplo algo más complicado de un ENPS puede verse en Nick Baigent, Subgame Perfect Nash Equilibrium: An Example, 2006.
[15] R. Selten, (1965), Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit, Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft 121, 301-324 y 667-689. En este artículo Selten introdujo la idea de refinar el equilibrio de Nash mediante el concepto de equilibrios perfectos en los subjuegos. Todo juego finito tiene un ENPS, que tal vez implique usar estrategias mixtas, ya que cada subjuego es un juego finito y por lo tanto tiene un EN.

Si la gente interactúa en el tiempo, las amenazas y promesas referidas a la conducta futura pueden influir sobre la conducta actual. Los juegos repetidos captan esta situación, llevando a que hayan sido aplicados en forma más amplia que otros modelos estratégicos – no sólo en virtualmente todos los campos de la economía, sino también en finanzas, derecho, comercialización, ciencias políticas y sociología.

En esta sección se analizará el Juego de la Confianza con repetición infinita, tomado de Kreps[16], que analizó la cultura corporativa. Todos los resultados previos son conocidos antes de que se juegue el Juego de la Confianza de la próxima iteración. Ambos jugadores conocen y comparten la misma tasa de interés *r* anual, que puede ser interpretada tanto como la tasa de preferencia temporal como la probabilidad de que el período actual sea el último, de modo que el juego infinitamente repetido termina en una fecha aleatoria. Sean las siguientes estrategias "gatillo":

Jugador 1: En el período 1, juega Confiar. A partir de allí, si todas las jugadas de los períodos previos han sido Confiar y Cumplir, juega Confiar; sino, juega Desconfiar.
Jugador 2: Dada la jugada de este período, jugar Cumplir si todas las jugadas de los períodos previos han sido Confiar y Cumplir; sino, juega Traicionar.

Como se vio previamente, en la versión de una sola vez del Juego de la Confianza, la inducción retrógrada conduce a (Desconfiar, Traicionar), con pagos (0,0). Con las estrategias gatillo del juego repetido de más arriba, este resultado de inducción retrógrada del juego en etapas será el resultado "castigo" si colapsa la cooperación en el juego repetido. Con estas estrategias gatillo, los pagos de la "cooperación" son (1,1), pero la cooperación crea un incentivo para la "defección", al menos para el jugador 2: si 1 juega Confiar, el pago de un solo período de 2 será maximizado eligiendo Traicionar, lo que conduce a pagos (-1,2). Luego, el jugador 2 cooperará si el valor presente de los pagos de la cooperación (1 por período) es mayor que el valor presente de los pagos por la defección seguida por un castigo (2 en forma inmediata, pero 0 después). Para una tasa de interés suficientemente baja, el primero será mayor que el segundo[17].

¿Y el jugador 1? Supóngase que 2 juega la estrategia de arriba, cooperando. Como el jugador 1 juega en primer término, no tiene la posibilidad de defeccionar, en el sentido de engañar mientras que 2 trata de cooperar. Su único posible desvío sería jugar Desconfiar, en cuyo caso 2 no tiene que mover en ese período. Pero entonces, la estrategia de 2 especifica que toda Confianza futura será respondida Traicionando. Entonces, el jugador 1, al jugar Desconfianza, consigue 0 ahora y 0 a partir de entonces (ya que jugar Desconfiar para siempre es la mejor respuesta de 1 a la Traición anticipada de Confianza por parte de 2). Por lo tanto, si el jugador 2 juega la estrategia mencionada, resulta óptimo que el jugador 1 juegue la suya. Por

[16] David Kreps, Corporate Culture and Economic Theory, in J. Alt, and K. Shepsle, eds., Perspectives on Positive Political Economy, Cambridge, 1990, pp. 90-143.
[17] Si el jugador 1 juega la estrategia mencionada, la mejor respuesta del jugador 2 es jugar esta estrategia si $[1+(1/r)]\geq 2+(1/r).0$, o sea $r\leq 1$ (e.d. 100%).

consiguiente, si la tasa de interés es suficientemente pequeña, las estrategias gatillo anteriores son un EN del juego repetido[18].

El mensaje general es que la cooperación es propensa a la defección – sino, como sostiene Gibbons, la llamaríamos de otra manera, p.ej. una feliz alineación de intereses egoístas de los jugadores. Pero hay ciertas circunstancias en que la defección puede ser contrarrestada mediante el castigo, en cuyo caso el desertor en potencia debe sopesar el valor presente de la cooperación continua, por un lado, y las ganancias a corto plazo de desertar seguidas por un largo período de castigos. Si los jugadores tienen paciencia suficiente (esto es, si la tasa de interés es suficientemente baja), se puede producir la cooperación en un equilibrio del juego repetido, si bien puede no alcanzarse en el juego de una sola vez.

8. Juegos Estáticos con Información Incompleta

A los juegos de información incompleta se los suele llamar también juegos *bayesianos*. En tanto que en un juego de información completa las funciones de pago son conocimiento común, en un juego de información incompleta hay al menos un jugador que tiene incertidumbre sobre la función de pagos de otro jugador. Un ejemplo común de un juego estático con información incompleta es la subasta a sobre cerrado: cada cotizante conoce el valor que tiene para él el bien vendido, pero ignora el valor que tiene para los demás cotizantes; las cotizaciones se hacen en sobres cerrados, de manera que las jugadas de los jugadores pueden ser consideradas simultáneas. Los juegos bayesianos más interesantes desde el punto de vista económico son dinámicos, y la existencia de información privada conduce en forma natural a intentar a que las partes se comuniquen (o se engañen) entre sí y a que las partes no informadas traten de aprender y responder.

En la sub-sección 8.1 se usará la idea de información incompleta para facilitar una nueva interpretación de los equilibrios de Nash con estrategias mixtas en juegos con información *completa* – esto es, una interpretación de las estrategias mixtas del jugador *i* en términos de la incertidumbre del jugador *j* sobre las acciones que tomará el agente *i*, en vez de una randomización de parte de *i*. En la sub-sección 8.2 se usa este esquema simple para definir un juego bayesiano estático y un equilibrio de Bayes-Nash. Afortunadamente, se halla que un equilibrio de Bayes-Nash es simplemente un equilibrio de Nash en un juego bayesiano: las estrategias de los jugadores deben ser las mejores respuestas a las estrategias de los demás.

8.1. Reinterpretación de las Estrategias Mixtas

Recuérdese que en el juego de la Batalla de los Sexos ya discutido (Tabla 4), hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (Bife, Vino Tinto) y (Pollo, Vino Blanco). También hay un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, en el cual Guillermo elige Bife con probabilidad ⅔ y Pollo con probabilidad ⅓, y Cristina elige Vino Tinto con probabilidad ⅔ y Vino Blanco con probabilidad ⅓. A efectos de verificar que esta

[18] Puede demostrarse que este EN del juego repetido es un ENPS.

estrategia mixta es un equilibrio de Nash, chequeamos que dada la estrategia de Cristina, Guillermo está indiferente entre las estrategias Bife y Pollo, así como entre cualquier distribución de probabilidad sobre estas estrategias puras. Luego, la estrategia mixta especificada de Guillermo es un continuo de mejores respuestas a la estrategia de Cristina. Lo mismo es válido para Cristina, de modo que ambas estrategias mixtas constituyen un equilibrio de Nash. [19]

Ahora supóngase que, si bien se conocen desde hace bastante tiempo, Cristina y Guillermo no están seguros de los pagos recibidos por el otro, como se muestra en la Tabla 8 siguiente. Ahora los pagos a Guillermo por cenar Bife con Vino Tinto son $2+t_g$, expresión en la cual t_g sólo es conocido por Guillermo; el pago recibido por Cristina de cenar Pollo con Vino Tinto pasa a ser $2+t_c$, con t_c sólo conocido por Cristina; y t_g, t_c son extracciones independientes de una distribución uniforme sobre [0,x].

Tabla 8. Guerra de los Sexos con Información Incompleta

		Cristina	
		Tinto	Blanco
Guillermo	Bife	$(2+t_g, 1)$	(0,0)
	Pollo	(0,0)	$(1, 2+t_c)$

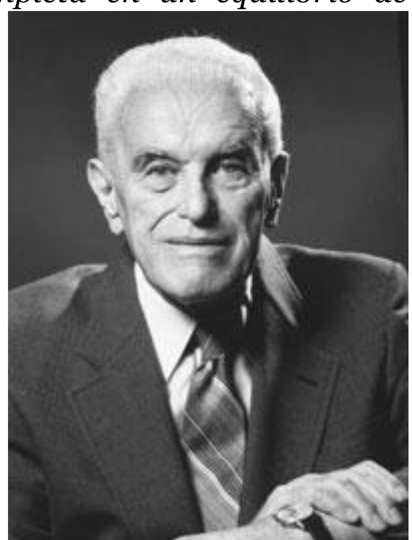
La elección de una distribución uniforme se hace por conveniencia. Lo que se tiene en mente es que los valores de t_g y t_c sólo perturban en forma marginal los pagos del juego original, de modo que se puede suponer que x es reducido. Los restantes pagos son los mismos que los del juego con información completa.

Se construirá un equilibrio en estrategias puras de Bayes-Nash a partir de esta versión con información incompleta del Juego de la Batalla de los Sexos, en la cual Guillermo elige Bife si t_g es mayor que un valor crítico c, y elige Pollo en los casos restantes, y Cristina elige Vino Blanco si t_c es mayor que un valor crítico p, y elige Vino Tinto en los casos restantes. En ese equilibrio, Guillermo elige Bife con probabilidad igual a $(x-c)/x$ y Cristina elige Vino Blanco con probabilidad $(x-p)/x$. (Por ejemplo, si el valor crítico c está próximo a x, la probabilidad de que t_g sea mayor a c es casi nula.) Veremos que, a medida que desaparece la información incompleta – o sea, que $x \to 0$ – la conducta de los jugadores de este equilibrio en estrategias puras de Bayes-Nash del juego de información incompleta se aproxima a su conducta en el equilibrio de estrategias mixtas de Nash del juego original con información completa. Esto significa que tanto $(x-c)/x$ y $(x-p)/x$ se aproximan a ⅔ a medida que $x \to 0$.

[19] En efecto: aplicando las probabilidades (2/3) y (1/3) elegidas por Cristina a las dos columnas de la matriz, y sumando los resultados a efectos de obtener el valor esperado de Guillermo, las dos filas dan lugar a un valor igual a 0,6666666… Luego a Guillermo le resulta indiferente cuál fila debe elegir, o con qué probabilidad seleccionarla. Otro tanto ocurre para Cristina.

Supóngase ahora que Cristina juega la estrategia arriba descripta para el juego con información incompleta. Entonces Guillermo podrá computar que Cristina elige Vino Blanco con probabilidad $(x\text{-}p)/x$ y Tinto con probabilidad p/x, de modo que los pagos esperados por Guillermo si elige Bife son $p(2+t_g)/x$, y si elige Pollo $(x\text{-}p)/x$. En tal caso, la mejor respuesta de Guillermo adopta la forma que se describió: elegir Bife tiene un mayor pago si y sólo si $t_g \geq (x\text{-}3p)/p \equiv c$. En forma similar, dada la estrategia de Guillermo, Cristina puede computar que Guillermo elige Bife con probabilidad $(x\text{-}c)/x$ y Pollo con probabilidad c/x. En tal caso, el pago esperado por Cristina de elegir Vino Blanco es $c(2+t_c)/x$ y de elegir Vino Tinto es $(x\text{-}c)/x$. Luego, elegirá Vino Blanco (tendrá un pago esperado más alto) si y sólo si $t_c \geq (x\text{-}3c)/c \equiv p$.

Hemos demostrado que la estrategia de Guillermo (es decir, Bife si y sólo si $t_g \geq c$) y la de Cristina (a saber, Vino Blanco si y sólo si $t_c \geq p$) son las mejores respuestas mutuas si y sólo si $(x\text{-}3p)/p=c$ y $(x\text{-}3c)/c=p$. Resolviendo ambas ecuaciones en términos de p y c muestra que la probabilidad de que Guillermo elija Bife, o sea $(x\text{-}c)/x$ y la probabilidad de que Cristina elija Vino Blanco, o sea $(x\text{-}p)/x$ son iguales. A medida que x tiende a cero, por la regla de l'Hôpital, esta probabilidad tiende a ⅔. *Por lo tanto, a medida que desaparece la información incompleta, la conducta de los jugadores de este juego de información incompleta en un equilibrio de estrategias puras de Bayes-Nash se aproxima a su conducta en el equilibrio de Nash de estrategias mixtas del juego original, con información completa.*



John C. Harsanyi

Harsanyi[20] demostró que este resultado resulta bastante general: un EN en estrategias mixtas de un juego de información completa puede (casi siempre) ser interpretado como un equilibrio de Bayes-Nash en estrategias puras de un juego estrechamente vinculado con un poco de información incompleta. Puesto de manera más sugestiva, la característica crucial de un EN en estrategias mixtas no es que el jugador j elija de forma aleatoria, sino que el jugador i tiene incertidumbre sobre la elección de j; esta incertidumbre puede originarse ya sea por la randomización o (tal vez una razón más plausible) porque hay un poco de información incompleta.

8.2 Juegos Bayesianos Estáticos y Equilibrio de Bayes-Nash

[20] John C. Harsanyi, Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points, International Journal of Game Theory (1973), Volume: 2, Issue: 1, Publisher: Springer, Pages: 1–23. En este artículo, Harsanyi demostró un teorema de purificación, según el cual se busca explicar un aspecto desconcertante de los equilibrios de Nash en estrategias mixtas, a saber que aún cuando cada jugador esté totalmente indiferente entre diversas acciones a las que asigna una ponderación no nula, a pesar de ello las combinará de forma tal que todos los otros jugadores sean también indiferentes.

Recuérdese que en la sección **1.** en un juego con 2 jugadores y movimientos simultáneos de información completa, en primer lugar los jugadores eligen de forma simultánea sus acciones (el jugador i elige a_i dentro del conjunto factible A_i) y luego son recibidos pagos $u_i(a_i,a_j)$. Para describir un juego de dos jugadores de movimientos simultáneos con información incompleta, el primer paso es representar la idea de que cada jugador conoce su propia función de pagos pero puede tener incertidumbre sobre la función de pagos del otro jugador. Se representará una posible función de pagos del jugador i mediante $u_i(a_i,a_j; t_i)$, donde t_i es denominado el <u>*tipo*</u> del jugador i y pertenece a un conjunto de tipos posibles (o *espacio de tipos*). Se entiende que cada tipo t_i corresponde a una función de pagos distinta que podría llegar a tener eventualmente el jugador i. P.ej., en una subasta, el pago a un jugador depende no sólo de las cotizaciones de todos los jugadores (esto es, de todas las acciones a_i y a_j) sino también de la propia valoración que hace el jugador del bien rematado (es decir, del tipo de jugador t_i).

Con esta definición de tipo de jugador, decir que el jugador i conoce su propia función de pagos es equivalente a decir que el jugador i sabe cuál es su tipo. Además, decir que el jugador i está inseguro de la función de pagos del jugador j, es lo mismo que decir que el jugador i tiene incertidumbre sobre el tipo t_j del jugador j. Así, en una subasta, el jugador i puede estar inseguro sobre la valoración que el jugador j otorga al bien rematado. Se usará la distribución de probabilidad $p(t_j /t_i)$ para denotar la creencia del jugador i acerca de cuál es el tipo del jugador j, t_j, dado el conocimiento de i de cuál es su propio tipo, t_i. Esta función de probabilidad será escrita, siguiendo el uso corriente en la literatura, como independiente de t_i, bajo el supuesto de que los tipos son independientes, en cuyo caso la creencia del jugador i será $p(t_j)$. [21]

Un <u>juego estático bayesiano</u> se obtiene uniendo los conceptos recién introducidos de creencias y tipos con los elementos de los juegos estáticos de información completa. Semejante tarea estuvo a cargo de Harsanyi[22]. La sincronización de un juego de dos personas estático bayesiano es como sigue:

1) La Naturaleza extrae un vector de tipos $t=(t_1,t_2)$, con t_i independiente, a partir de una distribución de probabilidad $p(t_i)$ sobre el conjunto posible de jugadores T_i.

---

[21] Como un ejemplo de tipos correlacionados, sean dos empresas que compiten para desarrollar nueva tecnología. La probabilidad de éxito de cada una depende parcialmente de cuán difícil sea el desarrollo, que es desconocido. Cada empresa sólo sabe si ha tenido éxito, pero ignora si la otra lo tuvo. Sin embargo, si la empresa 1 tuvo éxito, resulta más probable que la tecnología sea de fácil desarrollo y también que la empresa 2 haya sido exitosa. Luego, la creencia de la empresa 1 sobre el tipo de la empresa 2 depende del conocimiento de la empresa 1 de su propio tipo.

[22] John C. Harsanyi, Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III. Part I. The Basic Model, Management Science, Vol. 14, No. 3, Theory Series (Nov., 1967), pp. 159-182; Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian Players': II. Bayesian Equilibrium Points, Management Science, January 1968, 14, 320-34; Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III. Part III. The Basic Probability Distribution of the Game, Management Science, Vol. 14, No. 7, Theory Series (Mar., 1968), pp. 486-502. Ver también John C. Harsanyi, Games with Incomplete Information, Nobel Lecture, December 9, 1994.

2) La Naturaleza revela t_i al jugador i, pero no al jugador j.
3) Los jugadores eligen en forma simultánea sus acciones, con cada jugador i eligiendo $a_i \in A_i$.
4) Los pagos $u_i(a_i,a_j;t_i)$ son recibidos por cada jugador. [23]

Es útil chequear que el juego de la Batalla de los Sexos con información incompleta (Tabla 8) es un caso simple de esta definición abstracta de un juego estático bayesiano.

Ahora se definirá un concepto de equilibrio de los juegos bayesianos. Lo primero es definir el espacio de estrategias de estos juegos, a partir de lo cual se definirá un equilibrio de Bayes-Nash como un par de estrategias, tales que cada una es la mejor respuesta a la estrategia jugada por el otro jugador. Esto significa que estamos en presencia de la definición familiar de Nash, que ahora da lugar a un *equilibrio de Bayes-Nash*. [24]

En un juego estático bayesiano una estrategia es una regla de acción, no sólo una acción. Formalmente, una estrategia (pura) del jugador i especifica la acción factible (a_i) para *cada* uno de los tipos posibles (t_i). P.ej., en el juego de la Batalla de los Sexos con información incompleta, la estrategia de Guillermo era una regla que especificaba la acción de Guillermo para cada valor posible de t_g: Bife, si t_g es mayor que un valor crítico c, y Pollo en los otros casos. En forma parecida, en una subasta la estrategia de un cotizante es una regla que especifica una cotización del jugador para cada valoración posible que el cotizante pueda tener del objeto.

En un juego estático bayesiano, la estrategia del jugador 1 será una mejor respuesta a la del jugador 2 si, para cada tipo de jugador 1, la acción que especifica la regla de acción de 1 para dicho tipo maximiza el pago esperado de 1, dadas la creencia que 1 tiene sobre el tipo del jugador 2 y la regla de acción de éste. En el equilibrio de Bayes-Nash construido para la Batalla de los Sexos, por ejemplo, no hay incentivo para que Guillermo altere siquiera una acción correspondiente a un tipo, dada la creencia de Guillermo sobre el tipo de Cristina y dada la regla de acción de Cristina (o sea, elegir Vino Blanco si t_c es mayor que p, y elegir Vino Tinto en los otros casos). Asimismo, en un equilibrio de Bayes-Nash de una subasta entre dos cotizantes, el cotizante 1 no tiene incentivo a cambiar su cotización correspondiente a un tipo de valoración del bien, dada la creencia del cotizante 1 acerca de qué clase de tipo tiene el cotizante 2, y dada la regla que 2 sigue en sus cotizaciones. [25]

---

[23] Existen juegos en los que un jugador tiene información privada no sólo sobre su función de pagos sino también sobre la función de pagos del otro jugador. P.ej., tómese un modelo de información asimétrica de Cournot donde los costos son conocimiento común, pero una empresa conoce el nivel de la demanda y la otra no. Como el nivel de demanda afecta a las funciones de pago de ambos jugadores, el tipo de la empresa informada interviene como argumento en la función de pagos de la empresa no informada. Para tomar en cuenta esta característica, las funciones de pago de un juego bayesiano pueden ser escritas $u_i(a_i,a_j;t_i,t_j)$.

[24] Dada la estrecha conexión entre el equilibrio de Nash y el de Bayes-Nash, no debería sorprender que un equilibrio de Bayes-Nash exista en cualquier juego finito bayesiano.

[25] Gibbons comenta que puede parecer extraño definir un equilibrio en términos de reglas de acción. En una subasta, por ejemplo, ¿por qué el cotizante no consideraría simplemente realizar su oferta

9. Juegos Dinámicos con Información Incompleta

Como se vio, la existencia de información imperfecta conduce en forma natural a intentos de las partes a comunicarse (o a engañarse) y a intentos de las partes no informadas en aprender y responder. El modelo más simple de estos intentos es el de un **juego de señalización**, en el que hay dos jugadores – uno de ellos con información privada, pero el otro careciente de ella – y una señal enviada por la parte informada, seguida por una respuesta dada por la parte no informada. En el modelo clásico de Spence[26] la parte informada es un trabajador con información privada sobre su capacidad productiva, la parte no informada es un empleador (o el mercado), la señal es la educación, y la respuesta es una oferta salarial.

Hay modelos de juegos dinámicos bayesianos de una considerable riqueza, que permiten desarrollar el concepto de reputación. En el documento de Kreps, Milgrom, Roberts y Wilson[27] se demostró que un dilema del prisionero repetido un número finito de veces que comienza con algo de información privada (cierta) puede conseguir la cooperación sólo en los últimos períodos. Pero un argumento de inducción hacia atrás muestra que un equilibrio cooperativo no puede tener lugar en ninguna ronda de un dilema del prisionero repetido por un número finito de veces con información completa, porque sabiendo que la cooperación se romperá en las últimas rondas provoca que se rompa en la ronda previa anterior, y así sucesivamente hasta la primera ronda. Los juegos de señalización, de reputación y otros juegos dinámicos bayesianos (como los juegos de negociación) han sido aplicados en distintos campos. P.ej., cabe mencionar el trabajo de Benabou and Laroque[28] sobre insiders y gurúes en los mercados financieros, Cramton and Tracy sobre huelgas[29], y Rogoff[30] sobre política monetaria.

9.1 Equilibrio Bayesiano Perfecto

A efectos de analizar los juegos dinámicos bayesianos, es necesario introducir un cuarto concepto de equilibrio: el equilibrio bayesiano perfecto. La naturaleza

---

teniendo en cuenta su valoración real del bien? ¿Por qué considerar las ofertas que hubiera hecho a otras valoraciones? Para sortear el intríngulis, propone observar que, para que el cotizante 1 compute una oferta óptima, necesita disponer de una conjetura sobre toda la regla de cotización del cotizante 2. Y por su parte, el cotizante 2 necesitaría formular una conjetura sobre toda la regla de cotización seguida por el cotizante 1. En forma semejante a un equilibrio de expectativas racionales, estas reglas de cotización conjeturales deben ser correctas en un equilibrio de Bayes-Nash.

[26] Michael Spence, Job Market Signaling, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 87, No. 3 (Aug., 1973), pp. 355-374. Ver también A. Michael Spence, Signaling in retrospect and the informational structure of markets, Nobel Memorial Lecture, December 8, 2001.

[27] David M. Kreps, Paul Milgrom, John Roberts and Robert Wilson, Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoners' Dilemma, Journal of Economic Theory 27, 245-252 (1982).

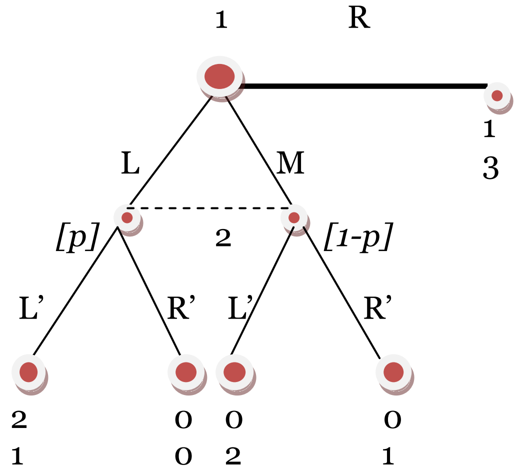
[28] Roland Benabou and Guy Laroque, Using Privileged Information to Manipulate Markets: Insiders, Gurus, and Credibility, Quarterly Journal of Economics, 107 (1992), 921-948.

[29] Peter Cramton and Joseph Tracy, Strikes and Holdouts in Wage Bargaining: Theory and Data, American Economic Review, Vol. 82 (1992), pp. 100–121.

[30] Véase por ejemplo Kenneth Rogoff, Reputational Constraints on Monetary Policy, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policies 26 (1987), pp. 141-182, North-Holland.

crucial de los EBP se debe a Kreps y Wilson[31]: las creencias son elevadas al mismo rango que las estrategias en la definición de un equilibrio. Ahora un equilibrio no consiste sólo de estrategias de cada uno de los jugadores, sino que incluye una creencia de cada jugador toda vez que ese jugador debe actuar pero está incierto sobre la historia de las jugadas previas. [32] La ventaja de introducir las creencias de los jugadores como una parte explícita del equilibrio es que, así como antes se insistió en que los jugadores elijan estrategias creíbles (e.d. perfectas en los sub-juegos), ahora es posible requerir que sostengan creencias razonables.

Figura 9. Por qué las Creencias son tan Importantes como las Estrategias



		Jugador 2	
		L'	R'
Jugador 1	L	(2,1)	(0,0)
	M	(0,2)	(0,1)
	R	(1,3)	(1,3)

El ejemplo de la Figura 9 (y su correspondiente forma normal) muestra cómo el equilibrio bayesiano perfecto (EBP) es una refinación del equilibrio de Nash perfecto en los sub-juegos (ENPS). En primer lugar, el jugador 1 elige entre 3 acciones: L, M y R. Si elige R el juego termina sin que el jugador 2 pueda mover. Si el jugador 1 elige L o M, en tal caso el jugador 2 se entera de que R no fue elegida (pero no puede distinguir si fue elegida L o M; en este caso se dice que L y M pertenecen al mismo conjunto de información, indicado mediante la línea punteada). Llegado a este punto, el jugador 2 elige entre dos acciones, L' y R',

---

[31] David M. Kreps and Robert Wilson, Sequential Equilibria, Econometrica, Vol. 50, No. 4 (Jul., 1982), pp. 863-894.

[32] Kreps y Wilson (1982) formalizan esta perspectiva definiendo un equilibrio secuencial, que es un concepto de equilibrio equivalente al equilibrio bayesiano perfecto en diversas aplicaciones económicas pero que en algunos casos es algo más fuerte. Como el equilibrio secuencial es más complicado de ser definido y de aplicarse que el equilibrio perfecto bayesiano, la mayoría de los autores usan al último. Kreps y Wilson demuestran que todo juego finito (con o sin información privada) tiene un equilibrio secuencial, y por lo tanto se puede afirmar lo mismo del equilibrio bayesiano perfecto.

después de lo cual termina el juego. Luego veremos el significado de las probabilidades. Los pagos están indicados en los nodos del árbol del juego.

La representación del juego mediante la forma normal revela que existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (L,L') y (R,R'). *Como el inicio de un sub-juego se define cuando la historia previa de las jugadas es conocimiento común, el árbol de este juego no tiene sub-juegos.* [33] Si un juego carece de sub-juegos, se cumple en forma trivial el requerimiento de perfección en los sub-juegos – es decir, que las estrategias de los jugadores constituyan un equilibrio de Nash en cada sub-juego. Por consiguiente, en todo juego sin sub-juegos la definición de equilibrio de Nash perfecto en los sub-juegos es equivalente a la definición de EN, luego en nuestro ejemplo tanto (L,L') y (R,R') son equilibrios perfectos en los sub-juegos. Sin embargo, (R,R') depende claramente de una amenaza no creíble: si el jugador 2 realiza la acción, en tal caso jugar L' domina a R', luego el jugador 1 no sería inducido a jugar R por la amenaza del jugador 2 si le corresponde actuar.

Una forma de reforzar el concepto de equilibrio a fin de excluir al equilibrio de Nash perfecto en los sub-juegos (R, R') es imponer dos condiciones:

Requerimiento 1: Cada vez que un jugador tiene que realizar una acción y está incierto sobre la historia de las jugadas previas, el jugador debe tener una *creencia* acerca del conjunto de historias factibles de jugadas.
Requerimiento 2: Dadas sus creencias, las estrategias de los jugadores deben ser *secuencialmente racionales*. Lo cual significa que, cuando un jugador tiene que actuar, su acción (y su estrategia a partir de allí) debe ser óptima dada la creencia del jugador en ese punto (y las estrategias de los restantes jugadores a partir de allí).

En el ejemplo de más arriba, el Requerimiento 1 implica que, si el jugador 2 tiene que actuar, entonces debe tener una creencia acerca de si el jugador jugó L o M. Esta creencia está representada por las probabilidades *[p]* y *[1-p]* adjuntas a los nodos relevantes en el árbol del juego. Dada la creencia del jugador 2, el pago esperado por jugar R' es $p.0 + (1-p).1 = (1-p)$, en tanto que el pago esperado por jugar L' es $p.1 + (1-p).2 = (2-p)$. Como $2-p>1-p$ para cualquier p, el Requerimiento 2 impide que el jugador 2 elija R'. Por consiguiente, exigir simplemente que cada jugador tenga una creencia y que actúe en forma óptima dada su creencia basta para eliminar el equilibrio implausible (R,R') del ejemplo.

¿Qué puede decirse del otro equilibrio de Nash perfecto en los sub-juegos, (L, L')? El Requerimiento 1 dicta que el jugador 2 tenga una creencia pero no especifica cuál debe ser. Siguiendo el espíritu de las expectativas racionales, la creencia de 2 en este equilibrio debería ser $p=1$. Más formalmente:

---

[33] Después de la acción del jugador 1 en el nodo 1 del juego (inicio del juego), no existe ningún punto en que la historia del juego sea conocimiento común: los nodos restantes pertenecen a decisiones del jugador 2, y cuando estos nodos son alcanzados el jugador 2 no puede saber si la acción previa fue L o M.

Requerimiento 3: De ser posible, las creencias deberían determinarse por la regla de Bayes a partir de las estrategias de equilibrio de los jugadores. (Más adelante se verán otros ejemplos de este Requerimiento 3).

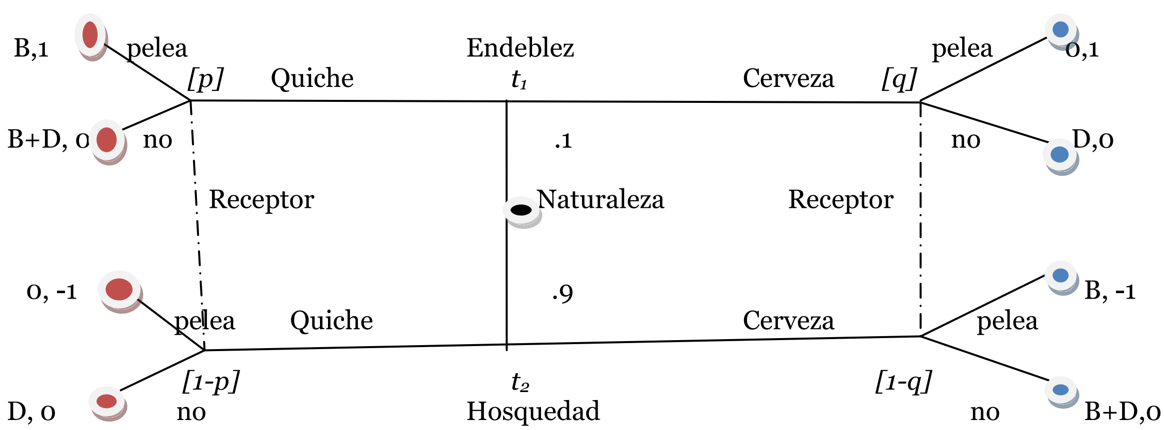
En aplicaciones económicas simples, incluyendo a los juegos de señalización que se verán en **9.2**, los Requerimientos 1 hasta 3 constituyen la definición de un <u>equilibrio bayesiano perfecto</u>. En aplicaciones más ricas, hay que imponer requerimientos adicionales a fin de eliminar equilibrios no plausibles. [34]

9.2 Juegos de Señalización

Volviendo a los juegos bayesianos dinámicos, en los que se aplica el equilibrio bayesiano perfecto, se limitará la atención a juegos (finitos) de señalización, con la siguiente sincronización:

1) La Naturaleza extrae un tipo t_i para el Emisor de un conjunto de tipos factible T= $\{t_1,\ldots,t_I\}$ con arreglo a una distribución de probabilidad $p(t_i)$.
2) El Emisor observa t_i y elige entonces un mensaje m_j de un conjunto de mensajes factible M= $\{m_1,\ldots,m_J\}$.
3) El Receptor observa m_j (pero no t_i) y entonces elige una acción a_k de un conjunto de acciones factible A= $\{a_1,\ldots,a_K\}$.
4) Los pagos vienen dados por $U_E(t_i, m_j, a_k)$ y $U_R(t_i, m_j, a_k)$.

Figura 10. El Juego de Señalización de la Cerveza y el Quiche[35]



---

[34] A fin de tener una idea de los problemas no alcanzados por los Requerimientos 1-3, supóngase que los jugadores 2 y 3 han observado las mismas circunstancias, y entonces observan un desvío del equilibrio del jugador 1. ¿Deberían estos jugadores 2 y 3 tener las mismas creencias sobre las jugadas anteriores de 1? Fudenberg y Tirole (Drew Fudenberg and Jean Tirole, Perfect Bayesian equilibrium and sequential equilibrium, Journal of Economic Theory, April 1991, 53, 236-60) dan una definición formal del equilibrio bayesiano perfecto para una amplia clase de juegos dinámicos bayesianos y condiciones bajo las cuales su EBP es equivalente al concepto de equilibrio secuencial de Kreps y Wilson de su artículo de 1982.

[35] El quiche es un tipo de tarta salada derivada de la cocina francesa. Se elabora principalmente con una preparación de huevos y crema de leche fresca y espesa, mezclada con verduras y/o productos cárnicos, con la que se rellena un molde de masa quebrada. Se cocina al horno. La posibilidad de incluir otros alimentos en la elaboración del relleno permite que haya innumerables recetas con carne, vegetales (apio, pimientos, cebollas, puerros, etc.) y quesos diversos. (Wikipedia)

En el juego de señalización de la "Cerveza y el Quiche" de Cho y Kreps [36] de la Figura 10, los espacios de los tipos, mensajes y acción (T, M y A, respectivamente, tienen todos 2 elementos. *En tanto que la mayoría de los árboles estratégicos comienzan arriba, un juego de señalización empieza en la mitad, con una jugada de la Naturaleza que determina de qué tipo es el Emisor*: en este caso, t_1 = "endeble" (con probabilidad .1) o t_2 = "hosco" (con probabilidad .9). [37] Los dos tipos de Emisores tienen la misma opción de mensajes – Quiche o Cerveza (como comidas alternativas). El Receptor observa el mensaje pero no el tipo. [38] Finalmente, en forma subsiguiente a cada mensaje, el Receptor debe elegir entre dos acciones – pelearse o no con el Emisor.

Las características cualitativas de los pagos son que el tipo endeble preferiría el quiche como comida, que el tipo hosco preferiría tomar cerveza, que ambos tipos preferirían no pelearse con el Receptor, y que el Receptor preferiría pelearse con el tipo endeble pero no con el tipo hosco. Específicamente, la comida preferida vale B>0 para ambos tipos de Emisor, evitar una pelea vale D>0 para ambos tipos de Emisor, y el pago de pelearse con el tipo endeble vale 1 para el Receptor; mientras que pelearse con el hosco vale -1 para dicho Receptor. Todos los otros pagos son 0.

El punto a subrayarse de un juego de señalización es que el mensaje del Emisor puede transmitir información al Receptor. Se dice que la estrategia del Emisor es de separación si cada tipo envía un mensaje diferente. En el ejemplo de la Cerveza y el Quiche la estrategia [Quiche si es Endeble, Cerveza si es Hosco], por caso, es una estrategia de separación para el Emisor. En el otro extremo, la estrategia del Emisor se dice agrupada si cada tipo envía el mismo mensaje. Los modelos con más de dos tipos también pueden presentar estrategias parcialmente agrupadas (o semi-separadas) donde las estrategias de todos los tipos dentro de un conjunto dado de tipos envían el mismo mensaje, pero distintos conjuntos de tipos envían mensajes diferentes. Los equilibrios perfectos bayesianos que implican estas estrategias son entonces llamados separadores, agrupadores, etc.

Si B>D, la estrategia del Emisor [Quiche si es Endeble, Cerveza si es Hosco] y la estrategia del Receptor [pelear luego de Quiche, no pelear después de Cerveza], en

---

[36] In-Koo Cho and David M. Kreps, Signaling Games and Stable Equilibria, The Quarterly Journal of Economics (1987) 102 (2): 179-221.

[37] Estos nombres se han inspirado en el libro de Bruce Feirstein, *Real Men Don't Eat Quiche*, publicado en 1982, que satirizó distintos tipos de masculinidad. Popularizó el término de "comedor de quiche", que supuestamente refleja a un hombre diletante, cazador de tendencias, conformista sumamente ansioso con modas de "estilo de vida", y con una conducta y opiniones socialmente correctas, que elude (o que simplemente carece de) la virtud masculina tradicional de auto-confianza. Un macho "tradicional" podría estar contento con una tarta de huevos y tocino servida por su esposa; un comedor de quiche, o un Hombre Sensible de la Nueva Era, por su parte, prepararía él mismo el plato, lo llamaría mediante su nombre francés quiche, y se lo serviría a su pareja femenina para demostrar su empatía hacia el Movimiento de Liberación Femenina. También terminaría lavando los platos. (Wikipedia)

[38] Como se hizo antes, la línea de puntos y rayas que conecta dos nodos de decisión del Receptor indica que se alcanzó uno de los nodos del conjunto de información, pero que ignora de cuál de esos nodos se trata – o sea, el Receptor observa la comida del Emisor pero no su tipo.

forma conjunta con las creencias $p=1$ y $q=0$ satisfacen los Requerimientos 1 a 3, por lo cual constituyen un equilibrio bayesiano perfecto del juego de señalización de la Cerveza y el Quiche. En forma más sugestiva, cuando se tiene B>D, tener la comida preferida es más importante que evitar una pelea, y por lo tanto cada tipo de Emisor elige su comida preferida, señalizando así de qué tipo es; señalizar esta información va en contra del tipo endeble (porque induce al Receptor a pelear), pero esta consideración está más que compensada por la importancia de recibir la comida preferida.

También es posible preguntarse si el juego tiene otros equilibrios bayesianos perfectos. Las otras tres estrategias puras que el Emisor podría jugar son [Quiche si es Endeble, Quiche si es Hosco], [Cerveza si es Endeble, Quiche si es Hosco] y [Cerveza si es Endeble, Cerveza si es Hosco]. Si B>D, el pago más bajo que el tipo de Emisor Endeble podría recibir si juega Quiche (B) es mayor que el pago más alto disponible si juega Cerveza (D), por consiguiente el tipo Endeble no jugará Cerveza, lo que deja a [Quiche si es Endeble, Quiche si es Hosco] como la única otra estrategia que podría jugar el Emisor. De modo análogo, el pago más bajo que el Emisor Hosco podría recibir si juega Cerveza (B) es mayor que el más alto disponible de jugar Quiche (D), y por lo tanto el tipo hosco no jugaría Quiche. Por consiguiente, el equilibrio perfecto bayesiano de separación derivado aquí es el único equilibrio bayesiano perfecto del juego de señalización de la Cerveza y el Quiche si B>D.

¿Y si se tiene que B<D? En tal caso no existe un equilibrio perfecto bayesiano de separación[39]. Pero ahora hay dos equilibrios bayesianos perfectos agrupadores. Resulta directo comprobar que, si B<D, la estrategia del Emisor [Cerveza si es Endeble, Cerveza si es Hosco] y la estrategia del Receptor [pelearse con Quiche, no pelearse con Cerveza], en forma conjunta con las creencias $p=1$ y $q=.1$ satisfacen los Requerimientos 1 a 3. (De hecho, cualquier $p\geq.5$ también funcionaría bien.) Este equilibrio agrupador tiene sentido (de la misma forma que el equilibrio de separación tenía sentido si B>D): el tipo hosco consigue su comida preferida y evita pelearse; como B<D, el tipo endeble ahora prefiere ocultarse detrás de la alta probabilidad a priori del tipo hosco (.9, que disuade al Receptor de pelearse sin tener información adicional) más que tener su comida preferida.

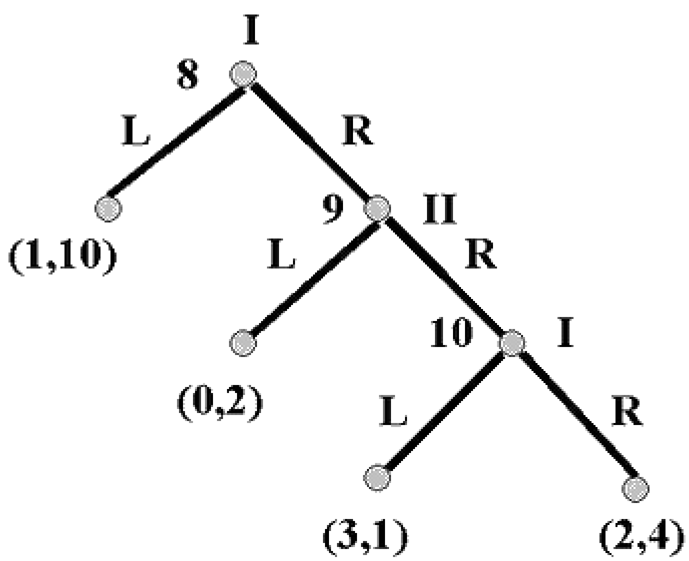
También hay otro equilibrio agrupador: si B<D, la estrategia del Emisor [Quiche si es Endeble, Quiche si es Hosco] y la estrategia del Receptor [no pelearse con Quiche, pelearse con Cerveza], conjuntamente con las creencias $p=.1$ y $q=1$ satisfacen los Requerimientos 1 a 3. (También funciona cualquier $q\geq.5$.) Cho y Kreps sostienen que la creencia del Receptor es contraria a la intuición. Su "Criterio Intuitivo" es una refinación adicional del equilibrio bayesiano perfecto añadiendo otras restricciones a las creencias (además del Requerimiento 3) que excluyen a este equilibrio de agrupación (pero no al equilibrio agrupador anterior, en el que ambos tipos eligen Cerveza).

[39] Para apreciarlo, cabe hacer el cálculo de lo que haría el Receptor si, por ejemplo, el tipo de Emisor Endeble elige Quiche, y el hosco elige Cerveza, y ver si efectivamente estos tipos de Emisor practicarían sus elecciones, dada la respuesta hallada para el Receptor.

10. Equilibrios de Mano Temblorosa

El último punto que vamos a tratar abre camino a un rompecabezas filosófico, uno de los varios que aún preocupan a los interesados en los fundamentos lógicos de la teoría de juegos. Puede ser planteado con respecto a diversos ejemplos, pero se tomará en cuenta aquí uno formulado por Bicchieri [40]. Sea el siguiente árbol de un juego:

Figura 11. Árbol Estratégico de un Equilibrio de Mano Temblorosa



El EN surge aquí en el único nodo del lado izquierdo que desciende del nodo 8. Esto puede demostrarse mediante inducción retrógrada: en el nodo 10, el jugador I jugaría I con un pago igual a 3, dejándolo a II con un pago igual a 1. II puede lograr aún más jugando L en el nodo 9, dejándolo a I con 0. Pero I puede conseguir más jugando L en el nodo 8, que es lo que hará, y el juego se termina sin que II pueda jugar más. ¿En qué consiste el rompecabezas planteado por Bicchieri (y otros autores como Binmore y Pettit y Sugden[41])? Radica en el razonamiento siguiente: El jugador I juega L en el nodo 8 porque sabe que el jugador II es racional, y que por lo tanto jugaría L en el nodo 9 porque II sabe que el jugador I es racional y luego, en el nodo 10, jugará L. Pero entonces se plantea la paradoja siguiente: ¡el jugador I debe suponer que el jugador II, en el nodo 9, predeciría la jugada racional del jugador I en el nodo 10 a pesar de haber llegado a un nodo (9) que sólo podría ser alcanzado si el jugador I no es racional! Si el jugador I no es racional entonces no se justifica que el jugador II prediga que el jugador I no jugará R en el nodo 10, en cuyo caso no resulta claro que el jugador II no debería jugar R en 9; y si el jugador II juega R en 9, al jugador I le está garantizado un mejor pago que el que

---

[40] Cristina Bicchieri (1993). Rationality and Coordination. Cambridge: Cambridge University Press.

[41] Ken Binmore, (1987). Modeling Rational Players I. Economics and Philosophy, 3: 179–214; Philip Pettit and Robert Sugden, The Backward Induction Paradox, The Journal of Philosophy, Vol. 86, No. 4 (Apr., 1989), pp. 169-182.

tiene si juega L en el nodo 8. Ambos jugadores usan inducción retrógrada para resolver el juego; la inducción retrógrada require que el jugador I sepa que el jugador II sabe que el jugador I es racional; pero el jugador II puede resolver el juego sólo usando un argumento de inducción retrógrada que asume como premisa la irracionalidad (económica) del jugador I. Ésta es la *paradoja de la inducción retrógrada*.

Una forma estándar de resolver este problema en la literatura es invocando la "mano temblorosa" de Reinhard Selten [42]. La idea subyacente es que una decisión y el acto consiguiente se pueden "separar" con cierta probabilidad no nula, aunque sea pequeña. O sea que un jugador puede intentar tomar una decisión pero luego deslizarse al ejecutarla y enviar al juego en una dirección sub-óptima. Si existe una posibilidad remota de que un jugador cometa un error – de que su "mano tiemble" – en tal caso no hay contradicción alguna introducida por un jugador con un argumento de inducción retrógrada que requiere el supuesto hipotético de que otro jugador ha tomado un camino que un jugador racional no puede elegir. En el ejemplo, el jugador II podría razonar sobre qué hacer en el nodo 9 bajo la condición de que el jugador adoptara L en el nodo 8 y entonces se equivocara.

Reinhard Selten y John Nash

Gintis [43] apunta que esta aparente paradoja no surge simplemente por suponer que ambos jugadores sean racionales. *Descansa además sobre la premisa adicional de que cada jugador debe saber, y razona sobre la base de que sabe que el otro jugador es racional*. Ésta es la premisa sobre conjeturas inconsistentes de los jugadores sobre qué sucedería fuera del equilibrio. Un jugador tiene motivos para considerar las posibilidades fuera del equilibrio si cree que su oponente es racional pero tiene mano temblorosa o le asigna alguna probabilidad distinta de cero a que no sea racional, o bien tiene dudas sobre su conjetura sobre su función de utilidad.

La paradoja de la inducción retrógrada, como los rompecabezas que surgen por los refinamientos del concepto de equilibrio, es principalmente un problema si uno está interesado en la teoría de los juegos como una teoría *normativa* de la racionalidad (dentro de la categoría más amplia de la teoría de la racionalidad estratégica). El teórico de los juegos no sicológico puede ofrecer otra explicación de las jugadas aparentemente "irracionales" y de la prudencia que fomenta, que implica apelar al hecho empírico de que los agentes reales, incluso la misma gente,

[42] Selten, R. (1975). Re-examination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games. International Journal of Game Theory, 4: 22–55.
[43] Herbert Gintis, (2009). The Bounds of Reason. Princeton: Princeton University Press.

deben aprender las estrategias de equilibrio de los juegos jugados, al menos siempre que los juegos sean algo complicados. La investigación demuestra que aún un juego tan sencillo como el Dilema del Prisionero requiere ser aprendido por la gente[44]. ¿Qué significa que la gente tiene que aprender las estrategias de equilibrio? Pues que debe ser bastante más complicado que lo que antes se concebía construir funciones de utilidad por medio de la Teoría de la Preferencia Revelada. En lugar de construir funciones de utilidad en base a episodios aislados, debemos hacerlo en base a *corridas de conducta* una vez que se ha estabilizado, con madurez del aprendizaje de los sujetos y del juego en cuestión. Otra vez se puede tomar al Dilema del Prisionero como ejemplo. En la vida cotidiana, la gente se encuentra con pocos ejemplos de Dilemas de una sola vez, pero se topa con muchos DP repetidos con gente conocida. En consecuencia, cuando se encuentra con un DP de una sola vez en un experimento, la gente tiende inicialmente a jugar como si el juego fuera una sola ronda de un DP repetido. El DP repetido tiene muchos equilibrios de Nash con cooperación en lugar de deserción. Los sujetos experimentales tienden al principio a cooperar en tales circunstancias, pero aprenden a desertar luego de algunas jugadas. El experimentador no puede inferir a partir de ello que ha logrado crear un DP de una sola vez dentro de su contexto experimental hasta que no vea que esta conducta se estabiliza.

Si los jugadores piensan que los demás jugadores tienen que aprender las estructuras del juego y los equilibrios a partir de la experiencia, entonces tienen motivo para tener en cuenta lo que sucede fuera de las trayectorias de equilibrio de los juegos en forma extensiva. Naturalmente, si un jugador teme que otros jugadores no hayan aprendido el equilibrio, ello le dará menos incentivo a jugar su estrategia de equilibrio, lo cual suscita un conjunto de problemas profundos sobre el aprendizaje social [45]. ¿Cómo aprenderán los jugadores ignorantes a jugar los equilibrios si los jugadores sofisticados no les indican cómo hacerlo, porque estos últimos tienen incentivos a jugar estrategias de equilibrio hasta que aprendan los ignorantes? La cuestión crucial en el caso de las aplicaciones de la teoría de los juegos a las interacciones entre la gente es que la gente joven se socializa creciendo en redes de instituciones, incluyendo a las normas culturales. Los juegos más complejos jugados por la gente ya están siendo jugados entre la gente socializada antes – es decir, que aprendieron las estructuras y los equilibrios del juego[46]. Los principiantes sólo tienen que copiarse de aquellos cuyas jugadas aparecen como si fueran esperadas y entendidas por los demás. Instituciones y normas se enriquecen

---

[44] John O. Ledyard, Public Goods: A Survey of Experimental Research, in Handbook of Experimental Economics, Edited by John H. Kagel and Alvin E. Roth, Princeton University Press, 1995; David Sally, Conversation and Cooperation in Social Dilemmas: A Meta-Analysis of Experiments from 1958 to 1992, Rationality and Society, Vol. 7, No. 1. (1 January 1995), pp. 58-92; Colin F. Camerer, Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction (Roundtable Series in Behaviorial Economics), Princeton University Press (2003).

[45] Ver por ejemplo Daniel Friedman, Evolutionary economics goes mainstream: A review of the theory of learning in games, Journal of Evolutionary Economics, 1998, Volume 8, Number 4, 423-432.

[46] Don Ross, Classical Game Theory, Socialization and the Rationalization of Conventions, Topoi, 2008, Volume 27, Numbers 1-2, 57-72.

con recordatorios – homilías, reglas empíricas fácilmente recordadas, etc. – para ayudar a la gente a recordar lo que están haciendo. [47]

Pero si la conducta observada no se estabiliza en torno a un equilibrio y no existe evidencia de que aún esté en marcha un proceso de aprendizaje, el analista debería extraer la conclusión de que su modelo de la situación estudiada es incorrecto. Existe la posibilidad de que haya formulado mal las funciones de utilidad de los jugadores, o la información disponible. Dado lo complejo que son muchas situaciones estudiadas por los científicos sociales, no debería sorprender que con frecuencia aparezcan errores de especificación de los modelos. Así como sus actores, los teóricos de los juegos deben aprender todavía mucho. Por consiguiente, *la paradoja de la inducción retrógrada sólo es aparente*. A menos que los jugadores hayan experimentado jugando en equilibrio entre sí en el pasado, aún cuando sean (económicamente) racionales y crean que todos lo son, podría predecirse que asignarán alguna probabilidad positiva a la conjetura de que resulta imperfecto el conocimiento de las estructuras del juego entre algunos jugadores. Lo cual puede explicar por qué los agentes racionales a veces juegan como si creyeran en las manos temblorosas.

[47] Andy Clark (1997) Being There: Putting Brain, Body and World Together Again. MIT Press: Cambridge, Massachusetts. Ver también Anthony Chemero, A Stroll Through the Worlds of Animats and Humans: Review of Being There: Putting Brain, Body and World Together Again by Andy Clark, Psyche, 4(14), October, 1998.