Utilidad Indirecta, Función de Gasto, Funciones de Demanda y Ecuación de Slutsky

Usaremos en estas clases 1) los Capítulos I, III, IV y V del Tratado de Microeconomía, 2009; 2) los Capítulos 1 y 2 de Robert S. Pindyck y Daniel L. Rubinfeld, Microeconomía, Séptima Edición, Madrid, 2009; 3) Geoffrey A. Jehle and Philip J. Reny, Advanced Microeconomic Theory (3rd edition), 2011. 4) También puede consultarse Hal Varian, Microeconomic Analysis, 3rd edition, 1992, Ch 7.

Con esta presentación continúo con la adaptación del capítulo 1 del libro de Jehle y Reny, con algunos agregados en ciertos temas.

1. *Función de utilidad indirecta*

La función de utilidad común, $u(\mathbf{x})$, está definida sobre el consumo de conjunto X y representa las preferencias del consumidor directamente, como ya hemos visto. Por lo tanto, se la conoce como la función de utilidad directa. Teniendo en cuenta los precios $\mathbf{p}$ e ingreso y, el consumidor elige una canasta $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ que maximiza su utilidad. El nivel de utilidad alcanzado cuando $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ es elegida, por lo tanto, será el nivel más alto permitido por la restricción presupuestaria del consumidor frente a los precios $\mathbf{p}$ e ingreso y. Diferentes precios o ingreso, que generan diferentes restricciones de presupuesto, por lo general darán lugar a diferentes opciones por parte del consumidor y por lo tanto a diferentes niveles de utilidad maximizada. La relación entre precios, ingreso, y valor maximizado de utilidad puede resumirse mediante una función a valor real $v: \mathbf{R}_{n+} X\, R_+ \to R$ definida así:

$$(1.12) \qquad v(\mathbf{p}, y) = Máx_{x\in R_{n+}}\, u(\mathbf{x}) \text{ sujeto a } \mathbf{p}\,\mathbf{x} \leq y.$$

La función $v(\mathbf{p}, y)$ se llama función de utilidad indirecta. Es la función de valor máximo correspondiente al problema de maximización de utilidad del consumidor. También muchos autores la llaman *función de valor*. Cuando $u(\mathbf{x})$ es continua, $v(\mathbf{p}, y)$ está bien definida para todo $\mathbf{p} > 0$ e $y \geq 0$ porque está garantizado que exista una solución al problema de maximización *(1.12)*. Si, además, $u(\mathbf{x})$ es estrictamente cuasi-cóncava, entonces la solución es única y se escribe como $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$, *función de demanda del consumidor*. El máximo nivel de utilidad que se puede lograr cuando se enfrentan precios $\mathbf{p}$ y renta y será el que se realiza cuando se elige $x(\mathbf{p}, y)$. Por lo tanto,

$$(1.13) \qquad v(\mathbf{p}, y) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)).$$

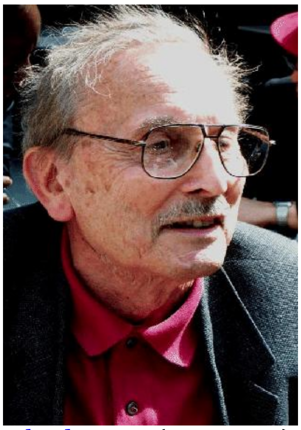
Hay varias propiedades que posee la función de utilidad indirecta. La continuidad de la función de restricción en $\mathbf{p}$ e y es suficiente para garantizar que $v(\mathbf{p}, y)$ sea continua en $\mathbf{p}$ e y en $\mathbf{R}_{n++}X\, R_+$. Efectivamente, la continuidad de $v(\mathbf{p}, y)$ sigue porque a precios positivos, "pequeños cambios" en cualquiera de los parámetros $(\mathbf{p}, y)$ que fijan la localización de la restricción presupuestaria sólo conducirán a "pequeños cambios" en el nivel máximo de utilidad que el consumidor pueda lograr. En el siguiente teorema, recopilamos juntas una serie de propiedades adicionales de $v(\mathbf{p}, y)$.

Teorema 4.6 (*Propiedades de la Función de Utilidad Indirecta*) *Si $u(\mathbf{x})$ es continua y estrictamente creciente en $\mathbf{R}_{n+}$, entonces $v(\mathbf{p}, y)$ definida en (1.12) cumple con:*

1. *Es continua en $\mathbf{R}_{n++}X\, R_+$.*
2. *Es homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, y)$.*

3. *Es estrictamente creciente en y.*
4. *Es decreciente en $\mathbf{p}$.*
5. *Es cuasi-convexa en $(\mathbf{p}, y)$.*
6. *Satisface la **identidad de Roy**: Si $v(\mathbf{p}, y)$ es diferenciable en $(\mathbf{p}^o, y^o)$ y la derivada $\partial v(\mathbf{p}^o, y^o)/\partial y \neq 0$, luego*

$$x_i(\mathbf{p}^o, y^o) = -\frac{\partial v(\mathbf{p}^o, y^o)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}^o, y^o)/\partial y}, \; i = 1,\ldots, n.$$



[Claude Berge](#) (1926-2002)

Demostración La Propiedad 1 es consecuencia del [Teorema del Máximo](#) (Claude Berge).

Podemos demostrar la Propiedad 2, viendo que hay que probar que $v(\mathbf{p}, y) = v(t\mathbf{p}, ty)$ para todo $t>0$. Pero $v(t\mathbf{p}, ty) =$ [máx. $u(\mathbf{x})$ sujeto a $t\mathbf{px} \leq ty$], que claramente es equivalente a [máx. $u(\mathbf{x})$ sujeto a $\mathbf{p}\,\mathbf{x} \leq y$]. Luego $v(t\,\mathbf{p}, t\,y) =$ [máx. $u(\mathbf{x})$ sujeto a $\mathbf{p}\,\mathbf{x} \leq y$] $= v(\mathbf{p}, y)$.

Intuitivamente, las Propiedades 3 y 4 dicen que toda relajación de la restricción presupuestaria del consumidor nunca puede dar lugar a que el nivel máximo de utilidad asequible decrezca, en tanto que todo endurecimiento de la restricción presupuestaria nunca puede dar lugar a que aumente dicho nivel. Sugiero que practiquen con los *multiplicadores de Lagrange* *examinando la demostración de estas propiedades* en el libro de Jehle y Reny (páginas 29-30).

La Propiedad 5 establece que el consumidor preferirá uno de los dos conjuntos presupuestarios extremos a cualquier promedio de los dos. Debemos mostrar que $v(\mathbf{p}, y)$ es cuasi-convexa en el vector de precios y el ingreso $(\mathbf{p}, y)$. La clave es concentrarse en los conjuntos presupuestarios.

Sean B^1 y B^2 los conjuntos presupuestarios cuando precios e ingreso son $(\mathbf{p}^1, y^1)$ y $(\mathbf{p}^2, y^2)$. Ahora hacemos $(\mathbf{p}^t, y^t)$, respectivamente, en donde $\mathbf{p}^t = t\mathbf{p}^1 + (1-t)\,\mathbf{p}^2$ e $y^t = ty^1 + (1-t)\,y^2$. Entonces,

$$B^1 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^1\,\mathbf{x} \leq y^1\}.$$
$$B^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^2\,\mathbf{x} \leq y^2\}.$$
$$B^t = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^t\,\mathbf{x} \leq y^t\}.$$

Para mantener un tratamiento simple, por el momento se supondrá que la solución de (1.12) es estrictamente positiva y diferenciable, siendo $(\mathbf{p}, y) \gg 0$ y $u(\ldots)$ diferenciable con $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i > 0$, para todo $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$.

Supongamos que pudiéramos demostrar que cada elección del consumidor que posiblemente puede hacer cuando se enfrente al presupuesto B^t es una opción que se podría haber hecho cuando se enfrentó o bien al presupuesto B^1 o al presupuesto B^2. Entonces ocurriría que todos los niveles de utilidad que puede lograr enfrentando B^t son niveles que podría haber alcanzado ya sea cuando se enfrenta a B^1 o cuando se enfrenta a B^2. Luego, por supuesto, el nivel máximo de utilidad que puede alcanzar sobre B^t no podría ser mayor que al *menos uno de los siguientes: el nivel máximo de la utilidad que puede alcanzar sobre B^1, o el nivel máximo de la utilidad que puede alcanzar sobre B^2. Pero si éste fuera el caso, entonces el máximo nivel de utilidad alcanzado en B^t no puede ser mayor que el mayor de estos dos. Si nuestra suposición es correcta, por lo tanto, sabríamos que*

$$v(\mathbf{p}^t, y^t) \leq \text{máx.}\,[v(\mathbf{p}^1, y^1), v(\mathbf{p}^2, y^2)]\ \forall t \in [0, 1].$$

Esto es equivalente a afirmar que $v(\mathbf{p}, y)$ es cuasi-convexa en $(\mathbf{p}, y)$.

Luego, bastará demostrar que la suposición sobre los conjuntos presupuestarios es correcta. Queremos demostrar que, si $\mathbf{x} \in B^t$, entonces $\mathbf{x} \in B^1$ o $\mathbf{x} \in B^2$ para $t \in [0,1]$. Si se eligen los valores extremos de t, B^t coincide con B^1 o con B^2, con lo cual las relaciones se cumplen de modo trivial. Lo que falta demostrar es que también valen para todo $t \in (0,1)$.

Supongan que ***no*** *fuera cierto. En ese caso podemos encontrar algún $t \in (0,1)$ y algún $\mathbf{x} \in B^t$ tales que $\mathbf{x} \notin B^1$ y $\mathbf{x} \notin B^2$. Si $\mathbf{x} \notin B^1$ y $\mathbf{x} \notin B^2$, entonces $\mathbf{p}^1\mathbf{x} > y^1$ y $\mathbf{p}^2\mathbf{x} > y^2$ respectivamente. Como $t \in (0, 1)$, multiplicamos la primera desigualdad por t y la segunda por (1-t). Las desigualdades se mantienen y obtenemos lo siguiente:*

$$t\,\mathbf{p}^1\mathbf{x} > t\,y^1$$
$(1-t)\,\mathbf{p}^2\mathbf{x} > (1-t)\,y^2$. *Sumando,*
$(t\,\mathbf{p}^1 + (1-t)\,\mathbf{p}^2)\,\mathbf{x} > ty^1 + (1-t)y^2$, *o sea*
$$\mathbf{p}^t\,\mathbf{x} > y^t$$

Pero esta fórmula final significa que $\mathbf{x} \notin B^t$, lo que contradice nuestra hipótesis inicial. Se concluye luego que si $\mathbf{x} \in B^t$, luego $\mathbf{x} \in B^1$ o que $\mathbf{x} \in B^2$ para todo $t \in [0,1]$. El argumento previo permite concluir que $v(\mathbf{p}, y)$ es cuasi-convexa en $(\mathbf{p}, y)$.

Finalmente, nos queda por derivar la identidad de Roy. ¿Qué nos dice esta relación? Lo que afirma es muy interesante: a saber, la demanda –marshalliana – del bien i *es simplemente el cociente de 2 derivadas parciales de la función de utilidad indirecta. En el numerador, la derivada con respecto al propio precio* i *(cambiada de signo), en el denominador, la derivada con respecto al ingreso. Usaremos ahora un teorema muy importante en microeconomía, el teorema de la envolvente.* [1]
Sea $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ la solución estrictamente positiva de (1.12) – en tal caso debe existir un λ^* que satisface la condición "de primer orden"

(P.3) $$\partial\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)/\partial x_i = \partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i - \lambda^* p_i = 0\ (i= 1, \ldots, n.)$$

(P.4) $$\partial v(\mathbf{p}, y) / \partial y = \partial\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)/\partial y = \lambda^* > 0.$$

Aplicando el teorema de la envolvente para evaluar $\partial v(\mathbf{p}, y)/\partial p_i$ nos da lo siguiente:

(P.5) $$\partial v(\mathbf{p}, y)/\partial p_i = \partial\,\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)/\partial x_i = -\lambda^* x^*_i.$$
Teniendo en cuenta (P.4) esta ecuación se transforma en

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, y)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}, y)/\partial y} = x^*_i = x_i(\mathbf{p}, y). \quad \blacksquare$$

---

[1] Ver Tratado de Microeconomía, Capítulo IV.

Curvas de indiferencia indirectas[2]

La función de utilidad indirecta, *v* (p_1, p_2, y), da la utilidad máxima alcanzable cuando los precios son p_1, p_2 (en el caso de dos bienes) y cuando el ingreso monetario es y. Una manera conveniente de representar una función de utilidad indirecta es el diagrama de indiferencia - precios. Una curva de indiferencia-precios muestra las combinaciones de p_1 y p_2 entre las que el consumidor está indiferente. Tiene pendiente negativa porque, cuando aumenta p_1, el consumidor puede mantener el mismo nivel de utilidad sólo si p_2 se reduce. A diferencia de las curvas de indiferencia ordinarias, sin embargo, la dirección de preferencia apunta al suroeste: precios más bajos son preferibles a precios más altos. Esto es un reflejo del hecho de que la utilidad indirecta es una función decreciente de los precios.

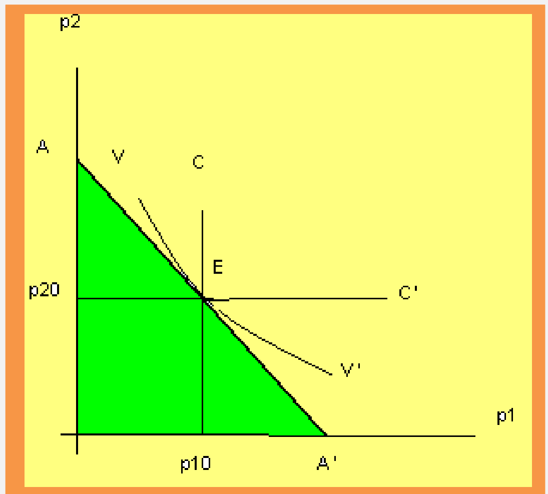


Figura 4.12 Curva de Indiferencia-Precio

Recordemos que una función $v\ (p_1, p_2, y)$ es cuasi-convexa en (p_1, p_2) si y sólo si su conjunto contorno inferior – el conjunto de precios (p_1, p_2) tales que $v\ (p_1, p_2, y) \leq k$ – es convexo para cualquier k. Debido a que las combinaciones de los precios al noreste de una curva de indiferencia precio rinden una utilidad más baja que los de la curva, constituyen un conjunto contorno inferior para la función de utilidad indirecta.

La Figura 1.12 ejemplifica una curva de indiferencia-precio *VV′*. Cualquier punto de la región de color verde es preferible a cualquier punto de la línea *VV'*. Como está dibujada en la Figura 1.12, la curva de indiferencia-precio es convexa al origen. Para ver por qué esto tiene que ser el caso, consideremos un punto arbitrario $E = (p_o, p_1)$. Sea (x_1^o, x_2^o) sea la canasta de consumo óptima asociada a ese conjunto de precios e ingreso. Dibujamos una línea AA' que pasa por E con pendiente $-x_1^o / x_2^o$. Cualquier combinación de precios en la línea AA' tiene la propiedad de que la canasta (x_1, x_2) es asequible con el presupuesto inicial. (Más precisamente, la ecuación para la línea AA' es $p_1x_1 + p_2x_2 = p_1x_1^o + p_2x_2^o$. Por tanto, la pendiente de la línea es $dp_2 / dp_1 = - x_1^o / x_2^o$, como se ha dicho.) Luego, si la utilidad indirecta en E es v_o, el nivel de utilidad en cualquier punto de AA' debe ser al menos v_o. Cuando los precios cambian del punto E a algún otro punto de AA', el consumidor puede mantener el mismo nivel de utilidad manteniendo su canasta de consumo inalterada. Habitualmente se podrá estar mejor sustituyendo la mercancía que ahora se tornó más cara. De ello se desprende que la curva de indiferencia-precios del nivel de utilidad v_o debe estar dentro de la zona AEC a la izquierda de E y dentro de A′EC' a la derecha de E. VV', por tanto, está limitada por debajo por AA' y es tangente a AA' en E. Esto a su vez implica que la curva de indiferencia-precio es convexa en la vecindad de E. Debido a que el punto E es arbitrario, el mismo argumento se puede utilizar para mostrar que las curvas de indiferencia-precio son por todas partes convexas al origen. En otras palabras, la función de utilidad indirecta es cuasi-convexa.

2. *La Función de Gasto*

---

[2] Para esta sección, consultar Wing Suen, *A Diagrammatic Proof That Indirect Utility Functions Are Quasi-Convex*, 1992.

La función de utilidad indirecta es una forma elegante y potente para resumir mucho sobre el comportamiento del mercado de consumo. Una medida acompañante, llamada la función de gasto, es igualmente útil. Para construir la función de utilidad indirecta, fijamos los precios de mercado y ingreso y buscamos el máximo nivel de utilidad que el consumidor podría lograr. Para construir la función de gasto, volvemos a fijar los precios, pero le hacemos un tipo diferente de pregunta sobre el nivel de utilidad que alcanza el consumidor. En concreto, nos preguntamos: ¿cuál es el nivel mínimo de gasto de dinero al que el consumidor debe hacer frente, a un conjunto dado de precios, para alcanzar un determinado nivel de utilidad? En esta construcción, ignoramos las limitaciones impuestas por el ingreso del consumidor y simplemente preguntamos cuánto tendría que gastar el consumidor para conseguir algún nivel particular de utilidad.

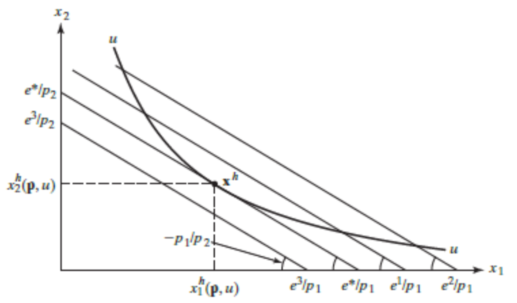


Figura 4.11 Gasto mínimo para comprar el nivel de utilidad u

Cada una de las líneas rectas paralelas en la fig. 4.11 representa todas las canastas $\boldsymbol{x}$ que requieren el mismo nivel de gasto total para adquirir esas canastas al enfrentar los precios $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$. Cada una de esas líneas se define implícitamente por $e = p_1x_1 + p_2x_2$, para un nivel diferente de los gastos totales $e > 0$. Cada una por lo tanto, tendrá la misma pendiente, $-p_1 / p_2$, pero diferentes intercepciones horizontales y verticales, e / p_1 y e / p_2, respectivamente. Las curvas de iso-gasto más alejadas contienen canastas que cuestan más; las más próximas cuestan menos. Si fijamos el nivel de utilidad en u, entonces la curva de indiferencia $u(\boldsymbol{x}) = u$ da todas las canastas que rinden al consumidor el mismo nivel de utilidad.

No hay ningún punto en común entre la curva de iso-gasto e_3 y la curva de indiferencia u, lo que indica que e_3 pesos son insuficientes, a estos precios, para lograr la utilidad u. Sin embargo, la curva que pasa por e_3, e^*, e_1, etc. tiene al menos un punto en común con cada curva de indiferencia, lo que indica que cualquiera de estos niveles de gasto total es suficiente para comprar los distintos niveles de utilidad. En la construcción de la función de gasto, sin embargo, buscamos el mínimo gasto del consumidor requerido para lograr una utilidad u, o la curva de iso-gasto más baja que todavía tiene al menos un punto en común con cada curva de indiferencia u. Claramente, ese será el nivel e^*, y la canasta de menor costo que logra la utilidad u a precios $\boldsymbol{p}$ será $\boldsymbol{x}^h = (x^h_1(\boldsymbol{p}, u), x^h_2(\boldsymbol{p}, u))$. Si denotamos el gasto mínimo necesario para lograr la utilidad u a precios $\boldsymbol{p}$ por $e(\boldsymbol{p}, u)$, ese nivel de gasto será simplemente igual al costo de la canasta $\boldsymbol{x}^h$, o $e(\boldsymbol{p}, u) = p_1x^h_1(\boldsymbol{p}, u) + p_2x^h_2(\boldsymbol{p}, u) = e^*$.

En términos más generales, se define la función de gasto como la función de valor mínimo

$$(1.14) \qquad e(\boldsymbol{p}, u) \equiv \min_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n_+} \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} \text{ sujeto a } u(\boldsymbol{x}) \geq u$$

para todos los $\boldsymbol{p} \gg 0$ y todos los niveles de utilidad accesibles u. Si denotamos como $U = \{u(\boldsymbol{x}) \mid \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n_+\}$ al conjunto de niveles de utilidad alcanzables, el dominio de $e(\ldots)$ es $\boldsymbol{R}^n_{++} X U$.

Téngase en cuenta que *e* $(\mathbf{p}, u)$ está bien definida, porque para un $\mathbf{p} \in \mathbf{R}_{n++}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{n+}$, $\mathbf{p}\,\mathbf{x} \geq 0$. Lo cual significa que el conjunto de números $\{e \mid e = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ *para algún* $\mathbf{x}$ *con* $u(\mathbf{x}) \geq u\}$ está acotado inferiormente por cero. Nótese también que si $u(\mathbf{x})$ es continua y estrictamente cuasicóncava, la solución será única, por lo que podemos denotar la solución como la función $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u) \geq 0$. Como hemos visto, si $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$ resuelve este problema, el gasto mínimo necesario para lograr la utilidad *u* a precios **p** será exactamente igual al costo de la cesta $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$, o

$$(1.15) \qquad e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{p}\, \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$$

Funciones de demanda hicksianas

Hemos visto cómo el problema de maximización de utilidad del consumidor está íntimamente relacionado con su comportamiento de demanda de mercado observable. De hecho, las mismas soluciones a ese problema - las funciones de demanda marshallianas - nos dicen cuánto de cada bien se observará al consumidor comprando, cuando se enfrenta a diferentes precios y renta. Ahora vamos a interpretar la solución, $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$, del problema de minimización del gasto como otro tipo de "función de demanda '- pero que no es directamente observable. (La *h* del superíndice estará indicando *Hicks*.)

Consideren el siguiente experimento. Si se fija el nivel de utilidad del consumidor que se le permite alcanzar en un nivel arbitrario *u*, ¿cómo van a comportarse sus compras de cada bien cuando cambiamos los precios a los que se enfrenta? El tipo de "funciones de demanda" que estamos imaginando aquí son de utilidad constante. Ignoramos por completo el nivel de ingreso monetario del consumidor y los niveles de utilidad que en realidad puede lograr. De hecho, sabemos que cuando un consumidor tiene un cierto nivel de ingresos y cambiamos los precios a que se enfrenta, normalmente habrá algún cambio en sus compras y un cambio correspondiente en el nivel de utilidad que logra. Para imaginar entonces cómo podríamos construir nuestras funciones de demanda hipotéticas, debemos imaginar un proceso en el cual cada vez que bajamos un poco el precio, por lo que conferimos una ganancia de utilidad al consumidor, lo compensamos reduciendo su ingreso, lo que le confiere una pérdida de utilidad suficiente para que vuelva al nivel original de utilidad. Del mismo modo, cada vez que aumentamos algún precio, causando una pérdida de utilidad, debemos imaginar compensando esto mediante un aumento del ingreso del consumidor suficiente como para generar una ganancia de utilidad igual a la pérdida. Debido a que reflejan el efecto neto de este proceso por el cual se iguala cualquier cambio de utilidad debido a un cambio en los precios por un cambio compensado de la utilidad de un ajuste hipotético de los ingresos, las funciones de demanda hipotéticas que se describen a menudo son llamadas funciones de demanda *compensadas*. Sin embargo, como John Hicks

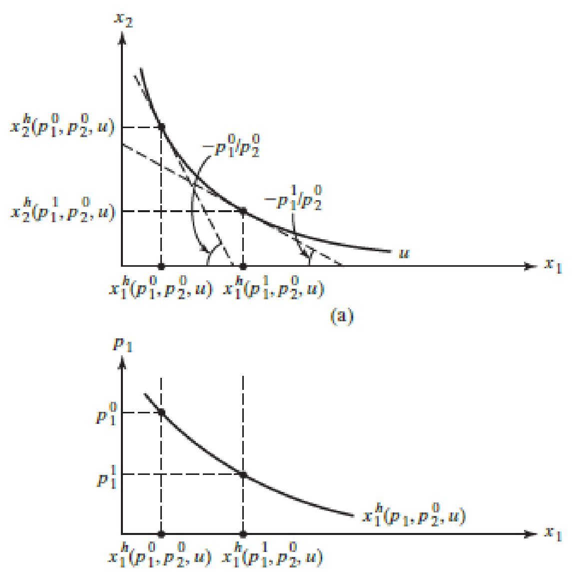


Figura 4.12 Cálculo de la curva de demanda hicksiana por el bien 1

(1939) fue el primero en escribir acerca de ellas exactamente de esta manera, estas funciones de demanda hipotéticas son conocidas más comúnmente como funciones de demanda *hicksianas*. (La Fig. 4.12 introduce el análisis de Hicks-Slutsky para descomponer el efecto *total* de un cambio del precio en la suma de un *efecto renta* más un *efecto sustitución,* como se verá en el Teorema 4.11) Como se ilustra en la Fig. 4.12, la solución, $\mathbf{x}^h$ ($\mathbf{p}$, u), al problema de minimización de gastos es precisamente el vector de las demandas hicksianas. Esta construcción da la curva de demanda hicksiana para el bien 1, dado el nivel de utilidad u. Claramente, habrá diferentes curvas de demanda hicksianas para diferentes niveles de utilidad - para diferentes curvas de indiferencia. La forma y la posición de cada una, sin embargo, siempre estarán determinadas por las preferencias subyacentes.

Por lo tanto, la función de gasto definida en (1.14) contiene en sí cierta información importante sobre las demandas hicksianas del consumidor. Aunque la importancia analítica de esta construcción sólo se pondrá de manifiesto un poco más tarde, podemos tomar nota aquí de la notable facilidad con que esa información se puede extraer de un conocimiento de la función de gasto. Las demandas hicksianas del consumidor se pueden extraer de la función de gasto por medio de una sencilla diferenciación. Detallamos esta y otras propiedades importantes de la función de gasto en el siguiente teorema.

Teorema 4.7 (*Propiedades de la función de gasto*) *Si u (...) es continua y estrictamente creciente, en tal caso la función e* ($\mathbf{p}$, u) *definida en (1.14) es:*

1. Cero, cuando u toma el nivel más bajo de utilidad en U,
2. Continua en su dominio de definición $\mathbf{R}_{n++} X\ U$,
3. Para todo $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, estrictamente creciente y no acotada sobre u,
4. Creciente en $\mathbf{p}$,
5. Homogénea de grado 0 en $\mathbf{p}$,
6. Cóncava en $\mathbf{p}$.

Si, además, u (..) es estrictamente cuasi cóncava, se tiene que

7. Lema de Shephard: e ($\mathbf{p}$, u) *es diferenciable en* $\mathbf{p}$ *en* ($\mathbf{p}^o$, u^o) *con* $\mathbf{p}^o \gg \mathbf{0}$, *y*

$$\frac{\partial\, e\,(\mathbf{p}^o, u^o)}{\partial p_i} = x^h_i\,(\mathbf{p}^o, u^o), \qquad i= 1, \ldots, n.$$

Demostración *Para probar la propiedad 1, téngase en cuenta que el valor más bajo en U es u* ($\mathbf{0}$), *ya que u (·) es estrictamente creciente en* $\mathbf{R}^{n+}$. *En consecuencia, e* ($\mathbf{p}$, $u(\mathbf{0})$) = 0, *porque* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *alcanza la utilidad u* ($\mathbf{0}$) *y requiere un gasto de* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{0} = 0$.

La propiedad 2, continuidad, sigue una vez más del teorema del máximo.

Aunque la propiedad 3 se cumple sin ninguna hipótesis adicional, se demostrará en los términos de las hipótesis adicionales de que $\mathbf{x}^h$ ($\mathbf{p}$, u) $\gg 0$ *es diferenciable* $\forall \mathbf{p} \gg 0$, $u > u(\mathbf{0})$, *y que u (·) es diferenciable con* $\partial u\,(\mathbf{x}) / \partial x_i > 0$, $\forall\, i$ *en* $\mathbf{R}_{n++}$. *Ahora bien, como u (...) es continua y estrictamente monótona, y* $\mathbf{p} \gg 0$, *la restricción (1.14) debe ser* efectiva. *[Ya que si* $u(\mathbf{x}^1) > u$, *existiría un* $t \in (0, 1)$ *suficientemente próximo a 1, tal que u* ($t\mathbf{x}^1$) $> u$. *Además,* $u \geq u(\mathbf{0})$ *implica u* ($\mathbf{x}^1$) > u ($\mathbf{0}$), *y luego* $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{0}$. *Por lo tanto,* $\mathbf{p}\,(t\mathbf{x}^1) < \mathbf{p}\mathbf{x}^1$, *debido a que* $\mathbf{p}\mathbf{x}^1 > 0$. *En consecuencia, cuando la restricción* **no** *es efectiva, hay otra canasta estrictamente más* *barata que también satisface la desigualdad. Luego, en el óptimo la restricción debe ser efectiva.] Esto implica que podemos reescribir (1.14) de la manera siguiente:*

(P.1) $\quad e(\mathbf{p}, u) \equiv \min_{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^n_+} \mathbf{p}\,\mathbf{x}$ *sujeto a* $u(\mathbf{x}) = u$.

La función Lagrangiana es:

(P.2) $\quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{p}.\mathbf{x} - \lambda\,[u(\mathbf{x}) - u]$.

Ahora bien, para $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ *y* $u > u(\mathbf{0})$, *se tiene que* $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u) \gg \mathbf{0}$ *resuelve (P.1). Luego, por el teorema de Lagrange, existe un* λ^* *tal, que*

(P.3) $\quad \partial\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)/\partial x_i = p_i - \lambda^*\, \partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i = 0,\ \ i=1,\ldots, n.$

Como tanto p_i *y* $\partial u(\mathbf{x}^*)/\partial x_i$ *son positivos, también lo es* λ^*.

Ahora se usará el teorema de la envolvente para demostrar que $e(\mathbf{p}, u)$ *es estrictamente creciente en u. Por el teorema de la envolvente, la derivada parcial de la función de valor mínimo* $e(\mathbf{p}, u)$ *con respecto a u es igual a la derivada parcial de la lagrangiana con respecto a u evaluada en* $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$. *Luego*

$$\partial e(\mathbf{p}, u)/\partial u = \partial\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)/\partial u = \lambda^* > 0.$$

Como esta propiedad es válida para todos los $u > u(\mathbf{0})$, *y dado que e (...) es continua, se concluye que, para todos los* $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, $e(\mathbf{p}, u)$ *es estrictamente creciente en u sobre U (que incluye* $u(\mathbf{0})$*).*

Se deja para más adelante la Propiedad 4, que se deriva de la 7. Queda como ejercicio demostrar la propiedad 5.

Ahora vamos a demostrar que $e(\mathbf{p}, u)$ *es cóncava en los precios. Esta función será cóncava si, por definición, para dos vectores de precio positivos cualesquiera* $\mathbf{p}^1$ *y* $\mathbf{p}^2$, *si* $\mathbf{p}^t = t\mathbf{p}^1 + (1-t)\,\mathbf{p}^2$ *entonces*

(P.4) $\quad t e(\mathbf{p}^1, u) + (1-t)\, e(\mathbf{p}^2, u) \le e(\mathbf{p}^t, u)$

Para ver que éste es el caso, simplemente nos concentramos en qué significa que los gastos sean mínimos a precios dados. Supongamos en particular, que $\mathbf{x}^1$ *minimiza el gasto para comprar u cuando los precios son* $\mathbf{p}^1$, *que* $\mathbf{x}^2$ *minimiza el gasto para comprar u cuando los precios son* $\mathbf{p}^2$, *y que* $\mathbf{x}^*$ *minimiza el gasto para comprar u cuando los precios son* $\mathbf{p}^t$. *Entonces el costo de* $\mathbf{x}^1$ *a precios* $\mathbf{p}^1$ *debe ser mayor que el costo a precios* $\mathbf{p}^1$ *de cualquier otra canasta* $\mathbf{x}$ *que alcanza la utilidad u. Del mismo modo, el costo de* $\mathbf{x}^2$ *a precios* $\mathbf{p}^2$ *debe ser no mayor que el costo a* $\mathbf{p}^2$ *de cualquier de otra canasta* $\mathbf{x}$ *que alcanza la utilidad u. Ahora bien, si, como se ha dicho,*

$$\mathbf{p}^1\mathbf{x}^1 \le \mathbf{p}^1\mathbf{x} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}^2\mathbf{x}^2 \le \mathbf{p}^2\mathbf{x},$$

para todos los $\mathbf{x}$ *que permiten alcanzar u, luego estas relaciones también son válidas para* $\mathbf{x}^*$, *dado que* $\mathbf{x}^*$ *también permite alcanzar u. Así, en virtud del significado de minimizar el gasto para comprar u a precios dados, sabemos que*

$$\boldsymbol{p}^1 \boldsymbol{x}^1 \leq \boldsymbol{p}^1 \boldsymbol{x}^* \quad y \qquad \boldsymbol{p}^2 \boldsymbol{x}^2 \leq \boldsymbol{p}^2 \boldsymbol{x}^*.$$

Si $t \geq 0$ y $(1 - t) \geq 0$, podemos multiplicar la primera de ellas por t, la segunda por (1 - t), y sumarlas. A continuación, sustituimos de la definición de $\boldsymbol{p}^t$, y obtenemos

$$t\boldsymbol{p}^1 \boldsymbol{x}^1 + (1-t)\, \boldsymbol{p}^2 \boldsymbol{x}^2 \leq \boldsymbol{p}^t \boldsymbol{x}^*.$$

El miembro izquierdo es sólo la combinación convexa de los niveles mínimos de gastos necesarios a precios $\boldsymbol{p}^1$ y $\boldsymbol{p}^2$ para alcanzar la utilidad u, y el lado derecho es el gasto mínimo necesario para lograr la utilidad u en la combinación convexa de esos precios. En resumen, esto es lo mismo que (P.5), y nos dice que

$t\, e(\boldsymbol{p}^1, u) + (1-t)\, e(\boldsymbol{p}^2, u) \leq e(\boldsymbol{p}^t, u) \;\; \forall\, t \in [0, 1]$, *que era lo que se debía demostrar.*

Para la Propiedad 7, aplicamos nuevamente el teorema de la envolvente pero ahora derivamos con respecto a p_i, lo que da lugar a

$$\partial e(\boldsymbol{p}, u)/\partial p_i = \partial \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) / \partial p_i = x^*_i \equiv x^h_i(\boldsymbol{p}, u), \text{ QED. } \blacksquare$$

<u>*Ejercicio*</u> *Función CES* Si la función de utilidad es $u\,(x_1^\rho + x_2^{\rho})^{1/\rho}$, demuestre que la función de gasto viene dada por $e(\boldsymbol{p}, u) = u\,(p_1^r + p_2^r)^{1/r}$, donde $r \equiv \rho/(\rho - 1)$.

3. *Relaciones entre la Función de Utilidad Indirecta y la Función de Gasto*

Teorema 4.8 (Relaciones entre las Funciones de Utilidad Indirecta y de Gasto)

Sean $v\ (\mathbf{p},\ y)$ y $e\ (\mathbf{p},\ u)$ las funciones de utilidad indirecta y de gasto para un consumidor, cuya función de utilidad es continua y estrictamente creciente. Entonces, para todos los $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, $y \geq 0$ y $u \in U$:

1. $e\ (\mathbf{p}, v\ (\mathbf{p}, y)) = y$.
2. $v\ (\mathbf{p}, e\ (\mathbf{p}, u)) = u$.

Demostración *Debido a que u (·) es estrictamente creciente en* R_{n+}*, alcanza un mínimo en* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*, pero no alcanza un máximo. Además, debido a que u (·) es continua, el conjunto U de números de utilidad alcanzables debe ser un intervalo. Por consiguiente,* $\mathcal{U} = [u\ (\mathbf{0}),\ u^{-})]$ *para* $u^{-} > u\ (\mathbf{0})$*, y donde* u^{-} *puede ser finita ó +* ∞.

Para demostrar 1, fijemos $(\mathbf{p}, y)$ *y que* $u = v\ (\mathbf{p}, y)$*. Por la definición de v, esto dice que a los precios* $\mathbf{p}$*, el nivel de utilidad u es el máximo que se puede obtener cuando el ingreso del consumidor es y. En consecuencia, a los precios* $\mathbf{p}$*, si el consumidor desea alcanzar un nivel de utilidad de al menos u, entonces el ingreso y sería sin duda lo suficientemente importante como para lograrlo. Pero recordar ahora que* $e\ (\mathbf{p}, u)$ *es el gasto más bajo necesario para alcanzar un nivel de utilidad de al menos u. Por lo tanto, debemos tener* $e\ (\mathbf{p}, u) \leq y$*. Por consiguiente, las definiciones de v y e llevan a la siguiente desigualdad:*

(1.16) $\qquad e\ (\mathbf{p}, v\ (\mathbf{p}, y)) \leq y.$

A continuación, fijamos $(\mathbf{p}, u)$ *y hacemos que* $y = e\ (\mathbf{p}, u)$*. Por la definición de e, esto dice que a los precios* $\mathbf{p}$*, el ingreso y es el ingreso más pequeño que permite al consumidor alcanzar al menos el nivel de utilidad u. Por consiguiente, a precios* $\mathbf{p}$*, si el ingreso del consumidor era de hecho y, entonces él podía alcanzar al menos el nivel de utilidad u. Debido a que* $v\ (\mathbf{p}, y)$ *es el mayor nivel de utilidad alcanzable a precios* $\mathbf{p}$ *con el ingreso y, esto implica que* $v\ (\mathbf{p}, y) \geq u$*. Por consiguiente, las definiciones de v y e también implican que:*

(1.17) $\qquad v\ (\mathbf{p}, e\ (\mathbf{p}, u)) \geq u \ \ \forall\ (\mathbf{p}, u) \in \mathbf{R}_{n++}\ X\ U.$

Deseamos demostrar que en (1.16) debe prevalecer la igualdad estricta. Supóngase que no fuera así, o sea que $e\ (\mathbf{p}, u) < y$*, con* $u = v\ (\mathbf{p}, y)$*. Por definición de v (.),* $u \in \mathcal{U}$*. Luego* $u < u^{-}$*. Por la continuidad de e (.) del teorema 4.7, se puede elegir un* $\mathcal{E} > 0$ *pequeño para que* $u + \mathcal{E} < u^{-}$*, y* $e\ (\mathbf{p}, u + \mathcal{E}) < y$*. Poniendo* $y_{\varepsilon} = e\ (\mathbf{p}, u + \mathcal{E})$*, (1.17) implica que* $v\ (\mathbf{p}, y_{\mathcal{E}}) \geq u + \mathcal{E}$*. Como* $y_{\varepsilon} < y$*, y además v es estrictamente creciente con el ingreso (teorema 4.6),* $v\ (\mathbf{p}, y) > v\ (\mathbf{p}, y_{\mathcal{E}}) \geq u + \mathcal{E}$*. Pero* $u = v\ (\mathbf{p}, y)$ *y, por lo tanto, esto nos dice que* $u \geq u + \mathcal{E}$*, lo que constituye una contradicción. Luego, (1.16) prevalece como igualdad estricta:* $e\ (\mathbf{p}, v\ (\mathbf{p}, y)) = y$.

La demostración del punto 2 del teorema sigue líneas similares a las expuestas, por lo que simplemente vamos a afirmar que $v\ (\mathbf{p}, e\ (\mathbf{p}, u)) = u$*.* ▌

4. *Relación entre las demandas marshallianas y las hicksianas*

Podemos proseguir esta relación entre la maximización de la utilidad y la minimización del gasto un poco más lejos desplazando nuestra atención a las respectivas soluciones a estos dos problemas. Las soluciones al problema de maximización de la utilidad son las funciones de demanda *marshallianas*. Las soluciones al problema de minimización del gasto son las funciones.de demanda *hicksianas*. El teorema siguiente establece que hay una íntima relación entre ambas funciones.

Teorema 4.9 **(***Dualidad entre las Funciones de Demanda Marshallianas e Hicksianas***)**

Bajo el Axioma 2 (Transitividad) se tienen las siguientes relaciones entre las funciones de demanda Hicksianas y Marshallianas, para $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, $y \geq 0$, $u \in \mathcal{U}$, $i=1,\ldots, n$:

1. $x_i(\mathbf{p}, y) = x^h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, y))$.

2. $x^h_i(\mathbf{p}, u) = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))$.

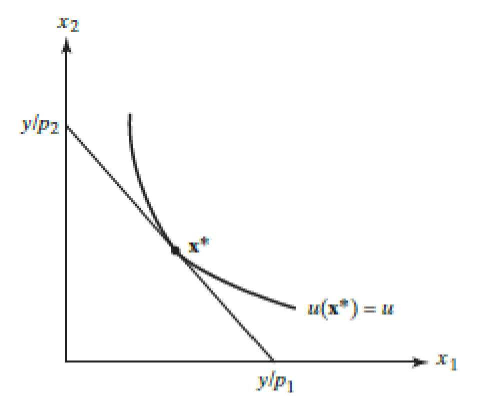


Figura 4.17 Minimizar el gasto, Maximizar la utilidad

La primera relación expresa que la demanda marshalliana a precios $\mathbf{p}$ e ingreso y es igual a la demanda hicksiana a precios $\mathbf{p}$ y el nivel de utilidad que es el máximo que se puede conseguir a precios $\mathbf{p}$ e ingreso y. La segunda nos dice que la demanda hicksiana a cualesquiera precios $\mathbf{p}$ y nivel de utilidad u es la misma que la demanda marshalliana a esos precios y a un nivel de ingresos igual al gasto mínimo necesario a esos precios para lograr ese nivel de utilidad.

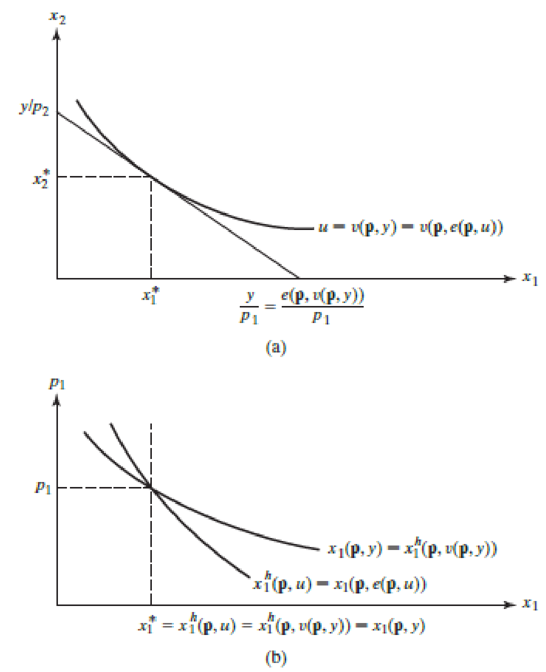


Figura 4.18 Ilustración de los teoremas 4.8 y 4.9

La Figura 4.17 ilustra el teorema. Allí, está claro que $\mathbf{x}^*$ se puede ver ya sea como la solución de (1.12) o la solución de (1.14). Es en este sentido que $\mathbf{x}^*$ tiene una naturaleza dual.

Vamos a completar la prueba de la primera, dejando la segunda como *ejercicio*.

Nótese que por las hipótesis realizadas, $u(\cdot)$ es continua y estrictamente cuasi cóncava, por lo que existen las soluciones de *(1.12)* y *(1.14)* y son únicas. Por consiguiente, están bien definidas las funciones de demanda marshalliana e hicksiana.

Para probar la primera relación, sea $\mathbf{x}^o = x(\mathbf{p}^o, y^o)$, y $u^o = u(\mathbf{x}^o)$. Entonces $v(\mathbf{p}^o, y^o) = u^o$ por definición de $v(\cdot)$, y $\mathbf{p}^o\, \mathbf{x}^o = y^o$ porque, por hipótesis, $u(\cdot)$ es estrictamente creciente. Por el teorema 4.8, $e\,(\mathbf{p^o}, v\,(\mathbf{p^o}, y^o)) = y^o$ o, equivalentemente, $e\,(\mathbf{p^o}, u^o) = y^o$. Pero como $u\,(\mathbf{x^o}) = u^o$ y $\mathbf{p^o} \cdot \mathbf{x^o} = y^o$, esto implica que $\mathbf{x^o}$ resuelve (1.14) cuando $(\mathbf{p}, u) = (\mathbf{p^o}, u^o)$. Por lo tanto, $\mathbf{x^o} = \mathbf{x^h}\,(\mathbf{p^o}, u^o)$ y así $\mathbf{x}\,(\mathbf{p^o}, y^o) = \mathbf{x^h}\,(\mathbf{p^o}, v\,(\mathbf{p^o}, y^o))$. ▌

Para concluir esta sección, se ilustran las cuatro relaciones de los teoremas 4.8 y 4.9. En la Fig. 4.18 (a), un consumidor con ingreso y enfrenta precios $\mathbf{p}$, alcanza el máximo de utilidad u eligiendo x^*_1 y x^*_2. Esa misma curva de indiferencia a nivel de u por lo tanto, puede ser vista como proporcionando el nivel de utilidad $v\,(\mathbf{p}, y)$, y, en la Fig. 4.18 (b), el punto $(\mathbf{p^1}, \mathbf{x}^*_1)$ será un punto en la curva de demanda marshalliana del bien 1.[3] Consideremos luego el problema de minimización del gasto del consumidor, y supongamos que se busca minimizar el gasto para alcanzar la utilidad u. Entonces, claramente, la curva más baja de iso-gasto que permite alcanzar u a precios $\mathbf{p}$ coincide con la restricción presupuestaria en el problema previo de maximización de la utilidad, y las opciones de minimización del gasto serán de nuevo $\mathbf{x}^*_1$ y $\mathbf{x}^*_2$, dando el punto (p_1, x^*_1) en la Fig. 1.18 (b), como un punto en la demanda hicksiana del bien 1 por parte del consumidor.

[3] Téngase en cuenta que ambos gráficos deben estar alineados en sus abscisas. El punto y/p_1 de la figura 4.18 (a) debe medir lo mismo que el punto $e\,(\mathbf{p}, v\,(\mathbf{p}, y))/p_1$ de la Figura 4.18 (b).

5) Propiedades de la Función Demanda de Consumo

La teoría del comportamiento del consumidor conduce a predicciones acerca de la conducta en el mercado. Vamos a ver que si las preferencias, objetivos y circunstancias son como los hemos modelado, entonces el comportamiento de la demanda debe reunir determinadas características observables. Entonces se puede docimar la teoría mediante la comparación de estas restricciones teóricas sobre el comportamiento de la demanda con el comportamiento real de la demanda. Una vez que se consigue cierto grado de confianza en la teoría, puede usarse en campos adicionales. Por ejemplo, al estimar estadísticamente sistemas de demanda de los consumidores, las características de comportamiento de la demanda predichas por la teoría se pueden utilizar para proporcionar restricciones sobre los valores que los parámetros estimados están "autorizados" a tomar. Esta aplicación de la teoría ayuda a mejorar la precisión estadística de las estimaciones obtenidas. Para los propósitos teóricos y empíricos, por lo tanto, es extremadamente importante que saquemos todas las implicancias para el comportamiento de la demanda observable que nos sea posible del modelo del consumidor maximizador de la utilidad. Esta es la tarea de esta sección.

1. *Precios relativos e ingreso real*

Los economistas prefieren generalmente medir las variables importantes en términos reales, en lugar de monetarios. Esto se debe a que "el dinero es un velo", que sólo tiende a ocultar la opinión del analista de aquello por lo que la gente realmente se preocupa (o debería preocuparse): a saber, los bienes reales. Los precios relativos y el ingreso real son dos de tales medidas reales.

Por *precio relativo* de un bien, nos referimos al número de unidades de algún otro bien que deben ser sacrificadas para adquirir 1 unidad del bien en cuestión. Si p_i es el precio en dinero del bien i, será medido en unidades de pesos por cada unidad del bien i. El precio monetario del bien j será en unidades de pesos por unidad del bien j. El precio relativo del bien i en términos del bien j mide las unidades del bien j sacrificadas por unidad del bien i que he adquirido. Esto vendrá dado por la relación precio p_i / p_j porque

$$p_i / p_j = (\$ / \text{unidad de } i) / (\$ / \text{unidad de } j) = (\text{unidades de } j / \text{unidades de } i).$$

Por *ingreso real*, nos referimos al número máximo de unidades de algún producto que el consumidor podría adquirir si gastara todo su ingreso monetario. El ingreso real pretende reflejar el control total del consumidor sobre todos los bienes mediante la medición de su control potencial sobre más de un solo producto real. Si y es el ingreso monetario del consumidor, entonces la relación y/p_j es llamada su ingreso real en términos del bien j y se medirá en unidades de bien j, porque

$$y / p_j = \$ / (\$ / \text{unidades de } j) = \text{unidades de } j.$$

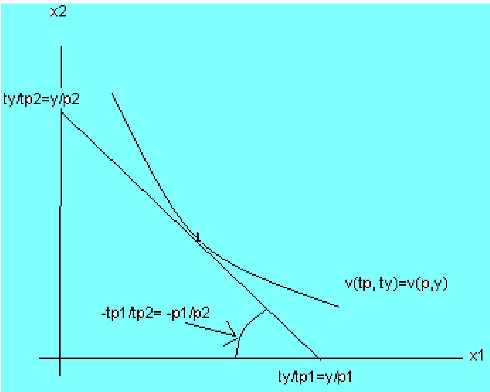


Figura 4.14 Homogeneidad de grado 0 en precios e ingreso

La deducción más simple que podemos hacer de nuestro modelo de un consumidor que maximiza su utilidad es que sólo los precios relativos y el ingreso real afectan el comportamiento. Esto a veces se expresa diciendo que el comportamiento de la demanda del consumidor muestra la <u>*ausencia de ilusión monetaria*</u>. Para esto, simplemente véase la Fig. 4.14. Allí, cambios equi-proporcionales en el ingreso monetario y el nivel de todos los precios no alteran la pendiente (precios relativos) ni las dos intersecciones en los ejes de la restricción presupuestaria del consumidor (ingreso real medido en términos de cualquier bien), por lo que no dan lugar a un cambio en el comportamiento de la demanda. Matemáticamente, esto equivale a decir que <u>*las funciones de demanda de los consumidores son homogéneas de grado cero en precios e ingreso*</u>. Debido a que el único papel que el dinero ha jugado en la construcción de nuestro modelo es el de unidad de cuenta, sería verdaderamente extraño si esto no fuera así. Resumimos estos resultados en el siguiente teorema.

<u>Teorema 4.10</u> (<u>*Homogeneidad y balance presupuestario*</u>) *Bajo el Axioma 2, la función de demanda del consumidor* x_i $(\mathbf{p}, y)$, *i= 1,…, n, es homogénea de grado cero en todos los precios y el ingreso, y satisface el balance presupuestario* $\mathbf{p}.\ \boldsymbol{x}\ (\mathbf{p}, y) = y$ *para todo* $(\mathbf{p}, y)$

La homogeneidad nos permite eliminar por completo el criterio del dinero de cualquier análisis del comportamiento de la demanda.[4] Esto se realiza generalmente mediante la designación en forma arbitraria de uno de los bienes que sirva como numerario en lugar de dinero. Si el precio del dinero es p_n, podemos establecer $t = 1\ p_n$ e, invocando la homogeneidad, se concluye que

$$\boldsymbol{x}\ (\mathbf{p}, y) = \boldsymbol{x}\ (t\mathbf{p}, ty) = \boldsymbol{x}\ (p_1/p_n,\ldots, p_{n-1}/p_n, 1, y\ /p_n).$$

2. <u>*Efectos ingreso y sustitución*</u>

Una cuestión importante que se considera ahora es la respuesta de conducta del consumidor ante un cambio de los precios relativos. Habitualmente, podemos pensar que un consumidor adquirirá una mayor cantidad de un bien cuyo precio disminuyó, o una menor cantidad de un bien cuyo precio aumentó, a igualdad de otras cosas. La figura 4.19 ilustra lo que podría llamarse el caso normal, aunque éste no tiene por qué ser siempre el caso. La ubicación y forma de las curvas de indiferencia podría dar lugar a que no existiera efecto alguno, o que este efecto fuera *en la misma dirección* que tiene la variación del precio. En todo caso, ¿qué predice la teoría - si es que predice algo -acerca de la conducta de demanda de alguien que ve alterarse el precio relativo?

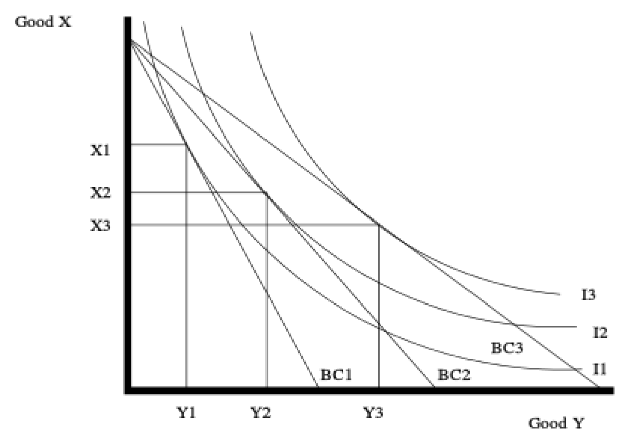


Figura 4.19 Respuesta de la cantidad demandada del Bien Y

[4] En teoría monetaria, debe tenerse en cuenta que cambios equiproporcionales en todos los precios tendrán un efecto adicional, el así llamado *efecto Pigou* o *de saldos monetarios reales*, producido por variaciones del índice general de precios – aún cuando el ingreso cambie en idéntica proporción. El efecto Pigou es el estímulo de la producción y el empleo provocado por el aumento del consumo debido a un aumento en los saldos reales de riqueza, durante la deflación. El término lleva el nombre de *efecto Pigou* por Don Patinkin (*[Price Felixibility and Full Employment](#)*, 1948).

Acerquémonos intuitivamente primero. Cuando el precio de un bien disminuye, hay al menos dos razones conceptualmente separadas por las que esperamos algún cambio en la cantidad demandada. En primer lugar, el bien se vuelve relativamente barato en comparación con otros bienes. Debido a que todos los bienes son deseables, incluso si el control total del consumidor sobre los bienes se mantuviera sin cambios, esperaríamos que él sustituya por el bien relativamente barato los ahora relativamente más caros. Este es el **efecto sustitución** (ES). Al mismo tiempo, sin embargo, cada vez que hay un cambio de precio, el control del consumidor sobre los bienes en general se modifica. Cuando el precio de cualquier bien se reduce, el control total del consumidor sobre todos los bienes se incrementa de manera efectiva, lo que le permite cambiar sus compras de todos los bienes de cualquier manera que crea conveniente. El efecto sobre la cantidad demandada de este aumento generalizado del poder adquisitivo se llama el **efecto ingreso** (EI).

Aunque la intuición nos dice que podemos en cierto sentido descomponer el efecto total de un cambio de precio (ET) en estas dos categorías conceptuales diferentes, vamos a tener que ser mucho más precisos si estas ideas son de alguna utilidad analítica. Se han propuesto diferentes formas de formalizar la intuición de los efectos renta y sustitución. Seguiremos la propuesta por Hicks (1939).

La descomposición hicksiana del efecto total de un cambio de precio comienza con la observación de que el consumidor alcanza cierto nivel de utilidad a los precios originales antes de que ocurra cualquier cambio. La formalización de la noción intuitiva del efecto sustitución es la siguiente: el efecto sustitución SE es el cambio (hipotético) en el consumo que se produciría si los precios relativos cambiaran a sus nuevos niveles, pero la utilidad máxima que el consumidor puede lograr se mantuviera igual que antes del cambio de precio. El efecto ingreso IE se define entonces como lo que queda del efecto total TE después del efecto sustitución. Nótese que debido a que el efecto ingreso se define como un *residuo*, el efecto total está siempre completamente explicado por la suma de los efectos sustitución e ingreso. Al principio, esto puede parecer una forma extraña de hacer las cosas, pero con un vistazo a la Figura 4.20 ustedes deben convencerse de por lo menos dos cosas: su correspondencia razonable con los conceptos intuitivos de efectos ingreso y sustitución, y su ingenio analítico.

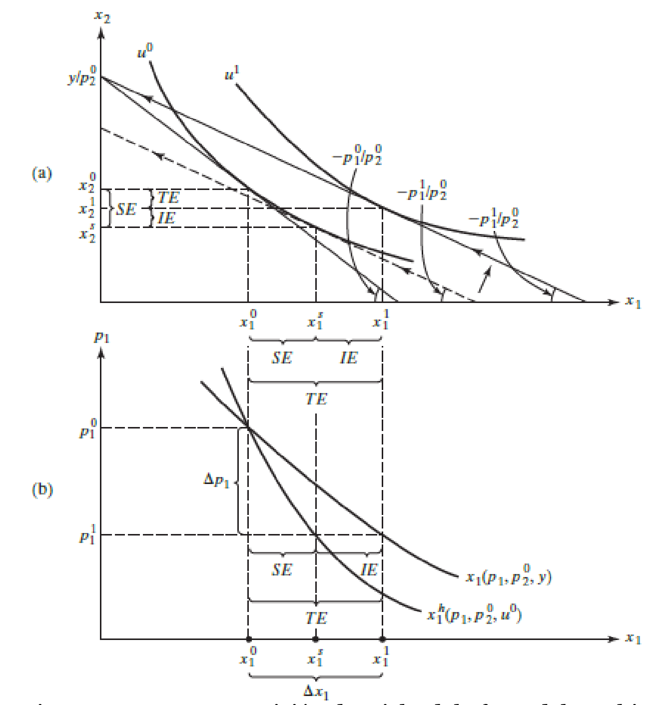


Figura 4.20 Descomposición de Hicks del efecto del cambio De un precio

Miremos en primer lugar la Fig. 4.20, y supongamos que el consumidor enfrenta inicialmente precios $p^o{}_1$ y $p^o{}_2$ y tiene un ingreso y, en la recta de balance I. Inicialmente, compra cantidades $x^o{}_1$ y $x^o{}_2$ y registra un nivel de utilidad u^o. En la parte (a) del gráfico se indica su posición óptima $x^1{}_1, x^1{}_2$. Supongan que el precio del bien 1 cae ahora a $p^1{}_1$, trasladando la recta de balance hacia afuera Para aplicar la descomposición hicksiana, primero hacemos el experimento hipotético de permitir que el precio del bien 1 caiga al nuevo nivel $p^2{}_1$ manteniéndolo al consumidor en su curva de indiferencia inicial u^o, ubicándose en $x^s{}_1, x^s{}_2$. Esto es como si permitiéramos que el consumidor enfrente el nuevo precio relativo pero con un ingreso más bajo, de modo que enfrenta la línea de presupuesto discontinua y le pidiéramos que maximice su utilidad teniéndola en cuenta. Bajo estas circunstancias, el consumidor aumentaría su consumo del bien 1 - el bien ahora relativamente más barato - desde $x^o{}_1$ a $x^s{}_1$, y disminuiría su consumo del bien 2 - el bien ahora relativamente más caro - de $x^o{}_2$ a $x^s{}_2$. El punto tangente con esta recta de balance indica su nuevo óptimo. Estos cambios hipotéticos del consumo son los efectos de sustitución hicksianos en el bien 1 y el bien 2, y los consideramos como originados 'puramente' en el cambio en los precios relativos, sin cambio alguno en el bienestar del consumidor. Veamos ahora lo que queda del efecto total a ser explicado. Después de los cambios hipotéticos de x_1 y x_2 a los nuevos niveles, los cambios $x^s{}_1 \rightarrow x^1{}_1$ y $x^s{}_2 \rightarrow x^1{}_2$ aún no se han explicado. Nótese, sin embargo, que estos son precisamente los cambios de consumo que se producirían si a los nuevos precios y el nivel original de utilidad u^o, al consumidor se le diera un *aumento del ingreso real* cambiando su restricción presupuestaria de la línea de balance hipotética discontinua a la línea final, post-cambio de precio, tangente a la curva de indiferencia superior post-cambio de precio. Es en este sentido que el efecto ingreso hicksiano capta el cambio en el consumo debido 'puramente' al cambio símil ingreso que acompaña a un cambio de precio.

La descomposición hicksiana nos ofrece una manera analítica ordenada de aislar las dos fuerzas distintas que operan cambiando el comportamiento de la cantidad demandada después de un cambio de precio. Podemos tomar estas mismas ideas y expresarlas de forma más precisa, y mucho más general, y en una forma que resulte analíticamente más útil. Las relaciones entre el efecto total, el efecto sustitución y efecto ingreso se resumen en la ecuación de Slutsky. La ecuación de Slutsky fue llamada por Hicks "*Ecuación fundamental de la teoría de la demanda*", así que lo que sigue merece que se reflexione en forma cuidadosa.

A lo largo del resto de este capítulo, se mantendrá en vigor el Axioma 2, y, por otra parte, vamos a diferenciar libremente siempre que sea necesario.

Teorema 4.11 (Ecuación de Slutsky) *Sea* $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$ *el sistema de demanda marshalliana del consumidor. Sea* u^* *sea el nivel de utilidad que el consumidor alcanza a precios* $\mathbf{p}$ *e ingreso* y*. Entonces*

$$\partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial p_j = \partial x_i^h(\mathbf{p}, u^*)/\partial p_j - x_j(\mathbf{p}, y)\, \partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial y, \qquad i = 1,\dots, n.$$

Demostración La prueba de este notable teorema es bastante fácil, aunque hay que seguirla muy cuidadosamente para no perderse. Comenzamos recordando uno de los vínculos entre las funciones de demanda hicksianas y marshallianas. Por el Teorema 4.9, sabemos que

$$x^h{}_i(\mathbf{p}, u^*) = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*)).$$

para cualesquiera precios $\boldsymbol{p}$ y nivel de utilidad u^*. Como esta identidad se mantiene para todos los $\boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$, podemos diferenciar ambos miembros con respecto a p_j y la igualdad se conservará. La demanda hicksiana en el lado izquierdo, debido a que depende sólo directamente de los precios, es sencilla de diferenciar. La demanda marshalliana en el lado derecho, sin embargo, depende *directamente* de los precios a través de su argumento precio, pero también *indirectamente* a través de la función de gasto en su argumento ingreso. Vamos a tener que aplicar la regla de la cadena para diferenciar el lado derecho. Teniendo esto en cuenta:

$$(P.1) \qquad \partial x^h_i(\mathbf{p}, u^*)/\partial p_j = \partial x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*))/\partial p_j + \partial x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*))/\partial y.\ \partial e(\mathbf{p}, u^*)/\partial p_j$$

Observando cuidadosamente esta expresión *(P.1)*, recordando qué significa el nivel original de utilidad u^*, podemos ahora hacer algunas sustituciones críticas. Por supuesto, u^* es la utilidad que el consumidor alcanza cuando enfrenta $\boldsymbol{p}$ e y. Luego, $u^* = v(\mathbf{p}, y)$. Entonces el gasto mínimo a precios $\boldsymbol{p}$ y utilidad u^* será lo mismo que el gasto mínimo a precios $\boldsymbol{p}$ y utilidad $v(\mathbf{p}, y)$. Pero por el teorema 4.8 sabemos que el gasto mínimo a precios $\boldsymbol{p}$ y máxima utilidad que se puede alcanzar a precios $\boldsymbol{p}$ e ingreso y es igual a y. Luego, tenemos

$$(P.2) \qquad e(\mathbf{p}, u^*) = e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, y)) = y$$

Además, el teorema 4.7 nos dice que la derivada parcial con respecto a p_j de la función de gastos de (P.1) es justamente la demanda hicksiana del bien j con la utilidad u^*. Debido a que $u^* = v(\mathbf{p}, y)$, ésta también debe ser la demanda hicksiana del bien j con la utilidad $v(\mathbf{p}, y)$, o sea

$$(P.3) \qquad \partial e(\mathbf{p}, u^*)/\partial p_j = x^h_j(\mathbf{p}, u^*) = x^h_j(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, y))$$

Pero fíjense en el término que está más a la derecha. ¡Sabemos por el teorema 4.9 que la demanda hicksiana en $\boldsymbol{p}$ y la utilidad máxima alcanzada en $\boldsymbol{p}$ e y es a su vez igual a la demanda marshalliana en **p** e y! Por lo tanto, tenemos que

$$(P.4) \qquad \partial e(\mathbf{p}, u^*)/\partial p_j = x_j(\mathbf{p}, y).$$

[Tengan cuidado aquí. Tomen nota de que hemos demostrado que la derivada parcial de la función de gasto en *(P.1)* respecto al precio es la demanda marshalliana del bien *j*]

Para completar la demostración, sustituimos *(P.2)* y *(P.3)* en *(P.1)* y encontramos lo siguiente:

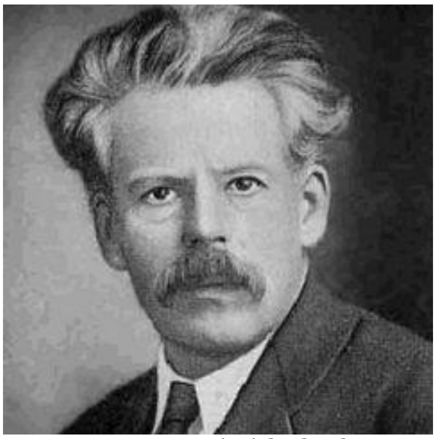
$$\partial x^h_i(\mathbf{p}, u^*) / \partial p_j = \partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial p_j + \partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial y.\ x_j(\mathbf{p}, y).$$

Reacomodando los términos, obtenemos lo que deseábamos mostrar:

$$\partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial p_j = \partial x^h_i(\mathbf{p}, u^*) / \partial p_j - x_j(\mathbf{p}, y).\ \partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial y \qquad i, j = 1,\dots, n. \ \blacksquare$$

J. J. O'Connor y E. F. Robertson han escrito una biografía de Eugen E. Slutsky de la cual he tomado algunos grandes trazos en el Tratado, que reproduzco aquí:

Según J. J. O'Connor y E. F. Robertson, Slutsky era hijo de Evgenii Slutskii, un profesor. Su familia se trasladó desde la provincia de Yaroslavl, situada en Rusia occidental, hacia Ucrania donde fue admitido en un gimnasio clásico, con énfasis en el estudio de las matemáticas y de las ciencias físicas. Recibió una medalla de oro en las olimpíadas de matemáticas de 1899. Luego de su período escolar, Slutsky entró a la Universidad de Kiev en 1899 para estudiar matemáticas. Rápidamente se vio complicado con la política estudiantil y participó en refriegas que tuvieron lugar en la universidad. Dos estudiantes habían sido expulsados de la Universidad por sus puntos de vista políticos y Slutsky participó en reuniones ilegales de grupos de estudiantes con el fin de brindar su apoyo a los dos estudiantes expulsados demandando que se los admitiera nuevamente. Las revueltas estudiantiles fueron atendidas convocando a los estudiantes por un período al ejército. Esto fue precisamente lo que sucedió con Slutsky en enero de 1901, pero no fue convocado por demasiado tiempo y pronto regresó a la Universidad de Kiev. Al año siguiente entró en problemas nuevamente, y esta vez fue expulsado y se le prohibió estudiar en ninguna institución rusa de educación superior. Por consiguiente, no tuvo oportunidad de completar sus estudios ni en Kiev ni en ningún otro lado de Rusia.



Evgeny Evgenievich Slutsky
(1880-1948)

A Slutsky no le quedó otra opción que irse del país – si quería estudiar – y entró finalmente al Politécnico de Múnich en 1902. En su autobiografía escribe: "*En Múnich estudié con seriedad a Ricardo, Marx, Lenín… A esa altura ya había preparado un plan de trabajo de aplicación de las matemáticas a la economía*."

Logró completar sus estudios de ingeniería en Múnich y regresó a Kiev en 1905. La situación política en Kiev por entonces había cambiado, porque la Revolución Rusa había comenzado temprano ese mismo año con desfiles imponentes, huelgas, rebeliones armadas y motines militares. La prohibición a Slutsky de estudiar en instituciones de educación superior rusas carecía de sentido en medio de la nueva situación política, por lo que pudo retornar a la Universidad de Kiev. En esta oportunidad buscó hacer un curso más orientado por sus intereses políticos, y cursó economía política en la Facultad de Derecho. Se graduó con Medalla de Oro en 1911 por su paper *La teoría de la utilidad marginal*.

Su interés por la estadística creció cuando se encontró con A. V. Leontovich en 1912. Leontovich era un fisiólogo que había estudiado las ideas estadísticas de Gauss y Pearson y le trasmitió a Slutsky material sobre técnicas estadísticas. Slutsky quedó rápidamente atrapado por estas obras, y el mismo año de 1912 publicó en Kiev un texto titulado *La teoría de la correlación*. Desde enero de 1913 hasta 1926 dictó clases en el Instituto de Comercio de Kiev, en el cual fue promovido como profesor en 1920. En 1926 se trasladó a las oficinas estadísticas de Moscú donde comenzó a desempeñarse en enero de ese año.

Las oficinas gubernamentales formaban parte del Instituto de Coyuntura dirigido por N.D. Kondratiev, considerado como un economista líder y consejero de las autoridades soviéticas en materia de políticas agropecuarias. Slutsky había apoyado la revolución pero a partir de entonces fue mucho más cuidadoso al expresar sus puntos de vista. En su autobiografía, escribe: *"...cuando el capitalismo colapsó en Rusia y tuve que describir a grandes rasgos las características de un orden económico socialista planificado, desde el punto de vista de la economía matemática desaparecieron las bases para hacerlo. Estudiar el proceso económico bajo el socialismo y la época de transición demandaba un tipo de conocimiento, de metodología, y de capacidades distintas que aquellas para las que yo estaba preparado."*


Nikolaj Dmitrievič Kondrat'ev
(1892-1938)

Las políticas de Stalin fueron mucho más duras a partir de 1929. Es probable que Slutsky lo previera así, y decidió mantenerse alejado del asesoramiento sobre decisiones de política económica. Siguió trabajando y publicando sobre los fundamentos de la teoría de la probabilidad que resultaba un tópico político seguro. Efectivamente, los que, como Kondratiev, habían asesorado en materia económica al gobierno, se encontraban en una posición sumamente difícil. El Instituto de Coyuntura fue cerrado en 1930 y Kondratiev fue arrestado y finalmente ejecutado: hacia fines de los años 1920, los planificadores soviéticos se decidieron a impulsar la industrialización a marcha forzada, en detrimento de la agricultura, lo que fue criticado por Kondratiev. En la primavera de 1930 fue arrestado bajo la acusación de ser dirigente de un "Partido de Trabajadores Campesinos" y deportado a Siberia sin juicio. Allí fue alojado en un viejo monasterio en el que pudo seguir trabajando por algún tiempo. Finalmente, a pesar de haber enfermado gravemente, en 1938 fue condenado a muerte y fusilado. Otros altos funcionarios del Instituto sufrieron el destierro pero Slutsky fue el único capaz de continuar sin problemas con su carrera. Evidentemente, ello es prueba de su habilidad en evitar verse envuelto en áreas controvertidas.

Luego de la clausura del Instituto de Coyuntura en 1930 Slutsky comenzó a aplicar sus capacidades estadísticas a la meteorología, asumiendo un cargo en el Instituto Central de Meteorología en 1931. Trabajó allí hasta 1934, y luego ingresó al Instituto de Matemáticas y de Mecánica de la Universidad de Moscú, en la cual comenzó a dar clases. A partir de 1938 trabajó en el Instituto Matemático Steklov de la Academia de Ciencias de la URSS.

Como estadístico, Slutsky fue influido por la obra de Pearson, y se interesó por los fundamentos de los métodos estadísticos que estudió como por su aplicación a la economía, y, más tarde en su carrera, a las ciencias naturales. Cuando estaba en el Instituto de Comercio de Kiev, Slutsky descubrió su ecuación fundamental de la teoría del valor en economía. Su trabajo apareció en el paper *Sulla teoria del bilancio del consumatore* traducido para su publicación en Giornale degli Economisti (1915). Esta contribución fue ignorada y sólo mucho más tarde, hacia 1934, el mismo principio fue investigado en forma independiente por John Hicks y R.G.D. Allen, época en la cual obtuvo el eventual reconocimiento de la profesión.

Slutsky introdujo conceptos estocásticos de límites, derivadas e integrales entre 1925 y 1928 cuando trabajaba en el Instituto de Coyuntura. En 1927 demostró que, sometiendo una sucesión de promedios móviles a una sucesión de shocks aleatorios independientes se generaba una sucesión casi periódica. Este trabajo estimuló la investigación de procesos estacionarios estocásticos. "*Así como las olas del mar que se suceden entre sí no se repiten la una a la otra perfectamente, así también los ciclos económicos no repiten ciclos anteriores ni en duración ni en amplitud. El ojo del observador instintivamente descubre en las olas de cierto orden otras olas más pequeñas, de modo que la idea de análisis armónico, a saber, que las posibilidades de expresar las irregularidades en la forma y en la magnitud de las olas por medio de la suma de fluctuaciones regulares sinusoidales aparece en su mente de manera espontánea*". También estudió la correlación de series vinculadas para un número limitado de pruebas. Obtuvo condiciones para que una función aleatoria sea medible en 1937.

Slutsky hizo una amplia aplicación de sus teorías. Además de la economía, también estudió la actividad solar utilizando datos a partir del año 500 A.C. Otras aplicaciones fueron tópicos tan diversos como el precio de los cereales y el estudio de los cromosomas.

Barnett describe a Slutsky como "de carácter fascinante y complejo". También afirma: "Políticamente no fue miembro de ningún partido y su carácter era reservado." Dice además: "Se puede argumentar que Slutsky es el más famoso de todos los economistas rusos, aún más conocido que N. D. Kondratiev, L. V. Kantorovich (un premio Nobel) o Mikhail Tugan-Baranowski. Hay conceptos epónimos como la ecuación de Slutsky, el diamante Slutsky , la matriz de Slutsky, y el efecto de Slutsky-Yule, y una búsqueda en revistas de literatura llevada a cabo con su nombre, para los años 1980-1995 produjo setenta y nueve artículos a través de algún aspecto de la obra de Slutsky ... Por otra parte, muchos libros de texto de microeconomía contienen una mención destacada de la contribución de Slutsky a la teoría del comportamiento del consumidor, sobre todo la ecuación de Slutsky, bautizada por John Hicks como la "ecuación fundamental de la teoría del Valor". El trabajo de Slutsky es, pues, una parte integral de la economía y econometría y de la corriente principal de economía contemporánea, una afirmación que en realidad no puede hacerse de ningún otro economista soviético, y tal vez incluso de ningún otro economista ruso." (Vincent Barnett, "E. E. Slutsky: Mathematical Statistician, Economist, and Political Economist?", 2004).

John Chipman y Jean-Sébastien Lenfant, en *Slutsky's 1915 article : How it came to be found and interpreted* (2002) comentaron los tres redescubrimientos de su obra, aparentemente sin conexión entre sí: Valentino Dominedò (*Considerazione interno alla teoria della demanda,* 1933), Henry Schultz (*Interrelations of Demand, Price and Income*) y M. Friedman en 1935, John R. Hicks y R.G.D. Allen (*A Comparison of different definitions of Complementary and Substitutive Goods*) en 1934. Hicks menciona la ecuación de Slutsky como "ecuación fundamental" en un libro publicado en París en 1937, *Théorie Mathématique de la Valeur en régime de libre concurrence*, en el cual Hicks planteó su análisis básico de la teoría del valor, antes de publicar *Value and Capital.*

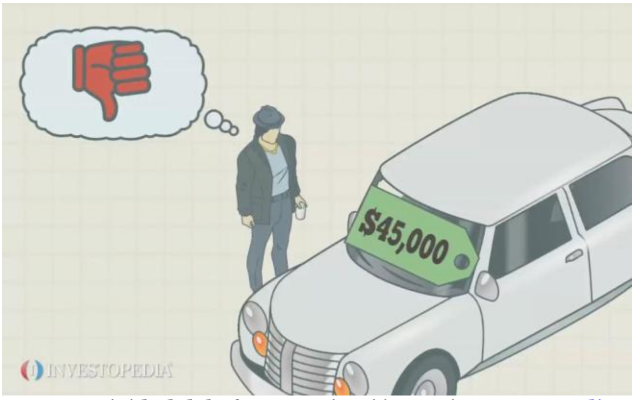
La lectura del artículo de Chipman y Lenfant despertará el interés de quienes quieran analizar el fenómeno cultural de los *descubrimientos y redescubrimientos* intelectuales.

Las ecuaciones de Slutsky proporcionan expresiones analíticas ordenadas para los efectos sustitución e ingreso. También nos dan un "marco contable ', que detalla cómo estos deben combinarse para explicar cualquier efecto total de un cambio de precio dado. Sin embargo, por sí mismas, las relaciones de Slutsky no responden a ninguna de las preguntas que nos propusimos abordar. De hecho, se podría pensar que todo esto sólo ha hecho que sea más difícil deducir implicancia para el comportamiento *observable* de nuestra teoría. Después de todo, lo único que hemos hecho hasta ahora es descomponer un efecto total observable en (1) un efecto ingreso observable y (2) en el efecto sustitución *no observable*.

Por ejemplo, considérese lo que Slutsky nos dice sobre el caso especial de un cambio del propio precio. Por el teorema 1.11, tenemos que

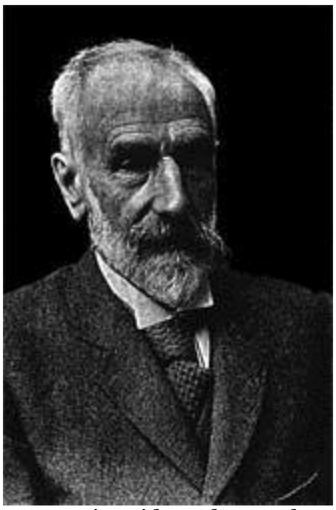
$$(1.20) \qquad \partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial p_i = \partial x^h_i(\mathbf{p}, u^*)/\partial p_i - x_i(\mathbf{p}, y)\, \partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial y.$$

El término de la izquierda es la pendiente de la curva de demanda marshalliana del bien *i* - la respuesta de la cantidad demandada a un cambio en el propio precio - y esto es lo que queremos explicar. Para ello, al parecer, necesitamos saber algo sobre el primer término de la derecha. Esto, sin embargo, es la pendiente de la curva de demanda *hicksiana*, y las curvas de demanda hicksianas no son directamente observables. ¿Qué podemos saber acerca de las curvas de demanda hicksianas cuando ni siquiera podemos verlas?



La negatividad del efecto sustitución según Investopedia

Sorprendentemente, la teoría nos dice bastante acerca de las demandas hicksianas, y por lo tanto un poco acerca de los términos de sustitución - podamos verlos o no. Lo que aprendamos acerca de los términos de sustitución luego puede traducirse en conocimiento de las demandas marshallianas observables a través de las ecuaciones de Slutsky. Así es como las ecuaciones Slutsky nos ayudan, y ésta será nuestra estrategia. Comenzamos con un resultado preliminar sobre los efectos de precio propios que ofrece una pista sobre lo que está por venir.


Francis Ysidro Edgeworth
Anglo-Irish philosopher and political economist (1845-1926)

Teorema 4.12 (Términos propios de sustitución negativos) **)** *Sea $x^h_i(\mathbf{p}, u)$ sea la demanda hicksiana para el bien i. En ese caso*

$$\partial x^h_i(\mathbf{p}, u)/\partial p_i \leq 0, \qquad i = 1,\ldots, n.$$

Este teorema nos dice que las curvas de demanda hicksianas deben ser siempre como se han mostrado en la Fig. 4.16 y en otras partes: a saber, con pendiente negativa (no positiva) con respecto a su propio precio. La prueba es fácil.

<u>Demostración</u> La propiedad de la derivada de la función de gasto, teorema 4.7, punto 7, nos dice que para cualquier **p** *y u*

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}^o, u^o)}{\partial p_i} = x^h_i(\mathbf{p}^o, u^o), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Diferenciando nuevamente con respecto a p_i obtenemos

$$\partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_i^2 = \partial x^h_i(\mathbf{p}, u)/\partial p_i, \qquad i=1,\ldots, n.$$

Por el teorema 1.7, parte 6, la función de gasto es una función cóncava de **p**. *Por lo tanto, por un conocido teorema del análisis, todas sus derivadas parciales propias de segundo orden son no positivas, lo que demuestra el teorema. Así, $\partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_i^2 \leq 0$ $(i=1,\ldots, n)$.* ▌

Ahora tenemos todo lo que necesitamos para formular una versión moderna de la así llamada Ley de la Demanda. Los economistas clásicos como Edgeworth y Marshall suponían que la "utilidad" era algo medible, y creían en el principio de la utilidad marginal decreciente. Los enunciados clásicos de la ley de la demanda, eran por lo tanto más bien categóricos: "Si el precio cae, la cantidad demandada aumentará." En general, esto parecía ajustarse a los comportamientos observados de las personas, pero había algunas excepciones inquietantes. La famosa paradoja de Giffen era el caso más destacado. Aunque pocos en número, parecía que había al menos algunos productos para los que una disminución en el precio era seguida por una disminución en la cantidad demandada. Esto violaba la doctrina aceptada y la teoría clásica no lo podía explicar.

La teoría moderna hace menos supuestos sobre las preferencias que la teoría clásica. En este sentido, es menos restrictiva y más ampliamente aplicable. De hecho, incluso es capaz de resolver la paradoja de Giffen. Véase atrás la Fig. 4.20 y nótese que la cantidad de *1* bien puede disminuir a medida que su propio precio baja (bastaría para ello un efecto-ingreso algo mayor del bien *2*). Nada elimina esta posibilidad, así que no hay nada paradójico en la paradoja de Giffen en el contexto de la teoría moderna. Sin embargo, lo hacemos pagando un precio por la mayor generalidad: la ley moderna de la demanda debe ser más equívoca que su precursora clásica.

Alfred Marshall (1842-1924)

Al enunciar la ley, utilizamos alguna terminología familiar. Un bien se dice <u>*normal*</u> si su consumo aumenta a medida que aumenta el ingreso, manteniendo los precios constantes. Un bien se dice <u>*inferior*</u> si el consumo del mismo disminuye a medida que aumenta el ingreso, manteniendo los precios constantes. El teorema siguiente se deja para demostración de ustedes (es muy simple).

Teorema 4.13 (Ley de Demanda) Una disminución en el propio precio de un bien normal hará que la cantidad demandada aumente. Si la propia disminución del precio provoca una disminución en la cantidad demandada, el bien debe ser inferior. Esto sigue fácilmente del teorema 4.12, si se utiliza el teorema 4.11.

En realidad, sabemos mucho más acerca de los términos hicksianos de sustitución que lo contenido en el teorema 4.12 y más acerca de las demandas marshallianas que lo contenido en el teorema 4.13. Para ir más allá de los simples enunciados que ya hemos hecho, vamos a tener que investigar el sistema de términos de sustitución un poco más profundamente. En primer lugar, establecer que los "términos de sustitución cruzados" son simétricos.

Teorema 4.14 (*Simetría de los términos de sustitución*) Sea $\boldsymbol{x}^h(\mathbf{p}, u)$ el sistema de demandas hicksianas del consumidor y supongamos que $e(\cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable. En tal caso,

$$\partial \boldsymbol{x}^h_i(\mathbf{p}, u)/\partial p_j = \partial \boldsymbol{x}^h_j(\mathbf{p}, u)/\partial p_i, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Demostración ¡Busquen comprender directamente la importancia de este resultado! Cabe destacar, sin embargo, que es notable que pueda demostrarse que esta condición de simetría está *íntimamente relacionada con la transitividad* supuesta de la relación de preferencia del consumidor. No vamos a seguir esta conexión profunda aquí, aunque vamos a tocarla un poco más adelante.

Para demostrar el teorema 4.12, hemos observado que las derivadas parciales de primer orden de la función de gasto con respecto a los precios generan las funciones de demanda hicksianas, por lo que las derivadas parciales de segundo orden de la función de gasto con respecto a los precios nos darán las derivadas parciales de primer orden de las demandas hicksianas con respecto a los precios. Así,

$$\partial[\partial e(\mathbf{p}, u)/\partial p_i]/\partial p_j = \partial[x^h_i(\mathbf{p}, u)]/\partial p_j, \text{ o bien:}$$

(P.1) $$\partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_j \partial p_i = \partial x^h_i(\mathbf{p}, u)/\partial p_j.$$

Por el teorema de Young, el orden de diferenciación de la función de gasto no tiene relevancia (siempre que sus derivadas de segundo orden sean continuas – teorema de Schwartz):

$$\partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_i \partial p_j = \partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_j \partial p_i.$$

Esta relación combinada con (P.1) conduce a la conclusión:

$$\partial x^h_i(\mathbf{p}, u)/\partial p_j = \partial x^h_j(\mathbf{p}, u)/\partial p_i \qquad i, j = 1, \dots, n. \blacksquare$$

Si disponemos los n^2 términos de sustitución de todo el sistema de demanda del consumidor en una matriz $n \times n$, con los términos de sustitución propios en la diagonal y los términos de sustitución cruzados fuera de ella, los teoremas 4.12 y 4.14, juntos, nos dicen bastante poco acerca de cómo se verá la matriz. El teorema 4.12 nos dice que todos los elementos a lo largo de la diagonal principal serán no positivos, y el teorema 4.14 nos dice que la matriz será simétrica. De hecho, podemos decir más que eso de la matriz de términos de sustitución: ¡también debe ser negativa semi-definida!

<u>Teorema 4.15 (La Matriz de los Términos de Sustitución es Semidefinida Negativa)</u> Si $\mathbf{x}^h$ ($\mathbf{p}$, u) es el sistema de demandas hicksianas, y σ ($\mathbf{p}$, u) es la <u>matriz de sustitución</u>, que contiene los términos de sustitución hicksianos, como la siguiente:

$$\sigma(\mathbf{p}, u) = \begin{pmatrix} \partial \mathbf{x}^h_1/\partial p_1 & \dots & \dots & \dots & \partial \mathbf{x}^h_1/\partial p_n \\ & & & & \\ \partial \mathbf{x}^h_n/\partial p_1 & \dots & \dots & \dots & \partial \mathbf{x}^h_n/\partial p_n \end{pmatrix}$$

Entonces esta matriz de sustitución es simétrica, semi-definida negativa.

<u>Demostración</u>: La prueba es inmediata cuando recordamos de la demostración del teorema anterior que cada término de esta matriz es igual a una de las derivadas parciales de segundo orden de la función de gasto con respecto a los precios. En particular, hemos visto que $\partial x^h_i(\mathbf{p}, u)/\partial p_j = \partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_j \partial p_i$ para todo par (i, j), por lo que en términos matriciales:

$$\begin{pmatrix} \partial \mathbf{x}^h_1/\partial p_1 & & \partial \mathbf{x}^h_1/\partial p_n \\ \dots & & \dots \\ \partial \mathbf{x}^h_n/\partial p_1 & & \partial \mathbf{x}^h_n/\partial p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_1^2 & & \partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_1^2 \\ \dots & & \dots \\ \partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_1 \partial p_n & & \partial^2 e(\mathbf{p}, u)/\partial p_n^2 \end{pmatrix}$$

La matriz de la derecha es simplemente la matriz hessiana de segundo orden de derivadas parciales de la función de gasto con respecto a precios. Por el Teorema 4.7, la función de gasto es cóncava en los precios. Por otro resultado del análisis, <u>la matriz hessiana de una función cóncava es semi-definida negativa</u>. Como las dos matrices son iguales, la matriz de sustitución será por lo tanto también semi-definida negativa. ▌

Habiendo pasado tanto tiempo explorando las propiedades del sistema de demanda no observable de Hicks, al fin estamos en condiciones de utilizar ese conocimiento para decir algo más concreto sobre el comportamiento observable de la demanda del consumidor. Teníamos una idea de cómo esto podría hacerse cuando se consideró la 'Ley de la Demanda'. Allí, nos preguntamos qué implicaba el modelo de comportamiento de los consumidores sobre los efectos de sustitución propia no observables, y luego usamos la relación de Slutsky para traducir eso en un enunciado sobre las relaciones que deben existir entre la respuesta al propio precio y la respuesta al ingreso en las funciones de demanda marshallianas observables.

En vista de lo que ahora hemos aprendido sobre todo del sistema de términos de sustitución, no necesitamos limitarnos a enunciados acerca de cambios en el propio precio y el ingreso. Podemos, de hecho, utilizar nuestro conocimiento de la matriz de sustitución para hacer una deducción más amplia sobre los efectos de cambios de los precios e ingreso sobre todo el sistema de demandas marshallianas observables.

<u>Teorema 4.16 (Matriz de Slutzky simétrica y semi-definida negativa)</u> Sea $\mathbf{x}$ ($\mathbf{p}$, y) el sistema de demandas marshallianas. Definimos al término Slutsky (i, j) como: $\partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial p_j + x_j(\mathbf{p}, y)\, \partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial y$, y conformamos toda la matriz de Slutsky de respuestas a los precios y al ingreso como sigue:

$$\mathbf{s}\,(\mathbf{p}, y) = \begin{pmatrix} \partial \boldsymbol{x}^h{}_1/\partial p_1 + x_1(\mathbf{p}, y)\, \partial x_1(\mathbf{p}, y)/\partial y & & \partial \boldsymbol{x}^h{}_1/\partial p_n + x_n(\mathbf{p}, y)\, \partial x_1(\mathbf{p}, y)/\partial y \\ \dots & & \dots \\ \partial \boldsymbol{x}^h{}_n/\partial p_1 + x_1(\mathbf{p}, y)\, \partial x_n(\mathbf{p}, y)/\partial y & & \partial \boldsymbol{x}^h{}_n/\partial p_n + x_n(\mathbf{p}, y)\, \partial x_n(\mathbf{p}, y)/\partial y \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz **s** *(*$\mathbf{p}$*, y) es simétrica y semi-definida negativa.*

Demostración *La prueba de este teorema es sencilla. Sea u* la utilidad máxima que recibe el consumidor a los precios* **p** *y al ingreso y. O sea, u*= v (*$\mathbf{p}$*, y). Despejando el término de sustitución en el teorema 4.11, se tiene* $\partial x^h_i\,(\mathbf{p},u^*)/\partial p_j = \partial x_i\,(\mathbf{p}, y)/\partial p_j + x_j(\mathbf{p},y)\partial x_i(\mathbf{p}, y)/\partial y$. *Si formamos ahora la matriz* **s** *(*$\mathbf{p}$*, y), resulta claro que cada elemento corresponde exactamente a cada elemento de la matriz hicksiana de sustitución σ (*$\mathbf{p}$*, u*). Según el teorema 4.14, esta matriz σ es simétrica para todo u, y según el teorema 4.15 es semi-definida negativa para todo u, y por consiguiente es simétrica y semi-definida negativa en u* también. Luego, la matriz de Slutsky* **s** *(*$\mathbf{p}$*, y) también debe ser simétrica y semi-definida negativa.* ▌

Los teoremas 1.10 y 1.16 pueden ser utilizados como punto de partida para el ensayo de la teoría que hemos desarrollado, o para las aplicaciones empíricas. Los requerimientos de que la demanda de consumo satisfaga la homogeneidad y el balance presupuestario, y que la matriz de Slutsky asociada sea simétrica y semidefinida negativa, proporcionan un conjunto de restricciones sobre los valores admisibles de los parámetros en cualquier sistema de demanda marshalliana estimado empíricamente - si ese sistema debe ser visto como perteneciente a un consumidor tomador de precios, que maximiza la utilidad. ¿Existen otras restricciones comprobables implicadas por la teoría? Esta es una cuestión de la que nos ocuparemos más adelante, pero primero veamos algunas relaciones de elasticidad importantes.

6) *Elasticidades*

Para completar el análisis de la demanda del consumidor, daremos un vistazo más de cerca a las implicancias de la condición de equilibrio presupuestario para la respuesta de los consumidores a cambios en precios e ingreso. Aquí ya no se precisa la artillería pesada utilizada previamente. En lugar de ello, sólo hay que recordar que la restricción presupuestaria impone una suerte de orden y disciplina en la respuesta del consumidor a cualquier cambio en las circunstancias.

Si $\boldsymbol{x}$ $(\mathbf{p}, y)$ *es la función de demanda marshalliana, el equilibrio presupuestario dice que la restricción debe verificarse como igualdad para cada conjunto de precios e ingreso, o que*

$$y = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i (\mathbf{p}, y).$$

Como esta igualdad se cumple para todos los $\mathbf{p}$ e y, sabemos que si cambia cualquier precio o el ingreso del consumidor, debe verificarse tanto antes como después del cambio. Todas las respuestas de la demanda de los consumidores a los cambios de precios e ingreso, por tanto, deben sumarse o agregarse de manera que se preserve la igualdad de la restricción presupuestaria después del cambio. Muchos experimentos de estática comparativa pueden realizase sobre la restricción presupuestaria para determinar cómo las respuestas de demanda deben agregarse en conjunto. A veces, éstas se expresan directamente en términos de las relaciones que se debe mantener entre las derivadas del sistema de demanda. En su lugar las presentaremos aquí en términos de relaciones que deben mantenerse entre las diferentes elasticidades-precio e ingreso de la demanda. Esto nos permitirá obtener los resultados de forma equivalente, pero quizás más intuitiva y útil. Comenzamos con algunas definiciones.

Elasticidad de demanda y participación en el ingreso *Sea* x_i $(\mathbf{p}, y)$ *la función de demanda marshalliana del consumidor por el bien i. Entonces hacemos*

$$\eta_i \equiv (\partial x_i (\mathbf{p}, y)/\partial y).(y/x_i (\mathbf{p}, y),$$

$$\varepsilon_{ij} \equiv (\partial x_i (\mathbf{p}, y)/\partial p_j).(pj/x_i (\mathbf{p}, y).$$

y se define $s_i \equiv p_i x_i (\mathbf{p}, y)/y$ *de tal forma que* $s_i \geq 0$ *y* $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$.

El símbolo η_i denota la ***elasticidad-ingreso*** *de la demanda del bien i, y mide el cambio porcentual en la cantidad de i demandada por 1% de cambio porcentual en el ingreso. El símbolo ε_{ij} denota la* ***elasticidad precio de la demanda*** *para el bien i, y mide el cambio porcentual en la cantidad de i demandada por 1% de cambio porcentual en el precio p_j. Si j = i, ε_{ii} se llama la* ***elasticidad precio propia de la demanda*** *del bien i.*[5] *Si j≠i, ε_{ij} se llama la* ***elasticidad precio cruzada de la demanda*** *del bien i con respecto al precio p_j. El símbolo s_i denota la* ***participación en el ingreso****, o proporción del ingreso del consumidor gastado en la compra del bien i. Estas deben ser por supuesto no negativas y sumar 1.*

Teorema 4.17 (Agregación de demandas del consumidor) *Sea x(*$\mathbf{p}$*, y) el sistema de demanda marshalliana del consumidor. Sean η_i, ε_{ij}, y s_i, para i, j = 1,..., n, definidas como*

[5] Observen que no estoy multiplicando este coeficiente por (-1), como a veces se hace en algunos libros de texto para que el resultado final sea positivo.

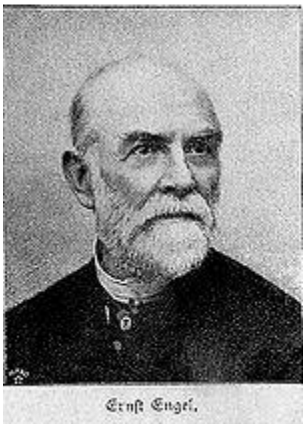
antes. Luego, deben verificarse las siguientes relaciones entre participaciones en el ingreso, precio y elasticidades-ingreso de la demanda:

1. ***Agregación de Engel**: $\sum_{i=1}^{n} s_i \eta_i = 1$.*

2. ***Agregación de Cournot**: $\sum_{i=1}^{n} s_i \varepsilon_{ij} = - s_j$, $j=1,\ldots, n$.*

Demostración *Recordamos que la restricción de presupuesto exige*

(P.1) $y= \mathbf{p}\, \mathbf{x}\,(\mathbf{p}, y)$ *para todo* $\mathbf{p}$ *e* y.



Ernst Engel (1821-1896), famoso por las curvas de Engel y la ley de Engel

La agregación de Engel expresa que las elasticidades-ingreso ponderadas por las participaciones siempre deben sumar la unidad. Para probar (1), diferenciamos m. a m. (1) con respecto al ingreso y:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \partial x_i/y.$$

Ahora multiplicamos y dividimos cada elemento de la suma por $x_i y$, y reacomodamos:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} (p_i\, x_i/y)\, (\partial x_i/\partial y)\, (y/x_i).$$

Sustituyendo las definiciones:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} s_i \eta_i .$$

Antoine Augustin Cournot (1801-1877) Punto de partida del análisis económico moderno. *Cournot* *14m*

La agregación de Cournot dice que las elasticidades precio propias y cruzadas ponderadas por las participaciones siempre deben sumar de una manera particular. Para probar 2, examinamos el efecto del cambio de un precio único, p_j. Diferenciando ambos miembros de (P.1) con respecto a p_j se obtiene

$$0= [\textstyle\sum_{i\neq j}^{n} p_i\, \partial x_i/\partial p_j]+x_j +p_j(\partial x_j/\partial p_j),$$

donde se ha derivado con respecto el término j-ésimo en forma separada de los restantes para enfatizar que debe usarse la regla del producto al diferenciar el término $p_j x_j(\mathbf{p},y)$. Luego, combinamos y reordenamos:

$$-x_j = \sum_{i=1}^{n} p_i\, (\partial x_i/\partial p_j).$$

Ahora multiplicamos m. a m. por p_j/y:

$$-p_j\, x_j/y = \sum_{i=1}^{n} (p_i/y)\, (\partial x_i/\partial p_j)\, p_j;$$

multiplicamos y dividimos cada sumando por x_i, y se obtiene:

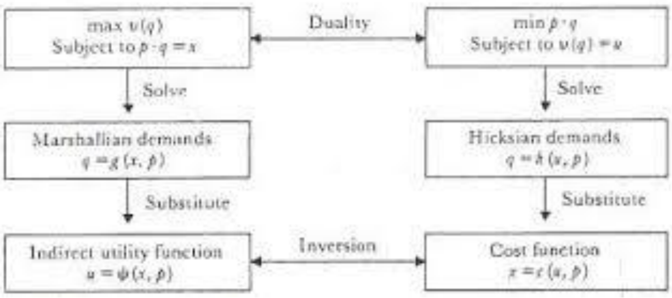
$$-p_j x_j/y = \sum_{i=1}^{n} (p_i x_i /y)\, (\partial x_i/\partial p_j)\, (p_j /x_i).$$

La demostración queda completa sustituyendo por las definiciones:

$$- s_j = \sum_{i=1}^{n} s_i\, \varepsilon_{ij} \qquad j=1,\dots, n. \;\blacksquare$$

7) <u>Un ayuda-memoria de la teoría de la demanda</u>

Los teoremas 4.10 al 4,17, en conjunto, nos dan un recuento de algunas de las implicancias lógicas del comportamiento maximizador de utilidad. La homogeneidad nos dice cómo la demanda debe responder a un cambio general, equi-proporcionado en todos los precios e ingreso, y la igualdad presupuestaria requiere que la demanda siempre agote la renta del consumidor. Las ecuaciones de Slutsky nos dan información cualitativa, o 'restricciones de signo', acerca de cómo el sistema de funciones de demanda debe responder a tipos muy generales de cambios de precios, así como nos da una visión analítica sobre los componentes no observables de respuesta de la demanda al cambio de un precio: los efectos ingreso y sustitución. Por último, las relaciones de agregación proporcionan información sobre cómo las cantidades demandadas - en primer lugar en respuesta a un cambio en el ingreso por sí solo, a continuación, en respuesta a un solo cambio en el precio - deben "colgar juntas" en todo el sistema de funciones de demanda. En la próxima clase, vamos a preguntarnos si existen otras implicancias de la teoría que hemos desarrollado.



Un resumen de relaciones de dualidad en teoría de la demanda
Deaton, A., & Muellbauer, J. (1980). Economics and consumer behavior

A modo de repaso, les recomiendo estudiar el punto 13) del [capítulo IV](). Allí van a hallar un conjunto de 16 relaciones que surgen del análisis de este capítulo, con algunas leves diferencias de notación con respecto a lo que he presentado aquí. Estamos hablando de definiciones importantes que hay que retener y de teoremas fundamentales de teoría de la demanda.

Ejercicios

1. Un consumidor tiene <u>*preferencias lexicográficas*</u> sobre $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{R}_{2+}$ si la relación satisface $\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^2$ siempre que $x_1^1 > x_1^2$ o $x_1^1 = x_1^2$ y $x_2^1 \geq x_2^2$. (a) Traten de dibujar un mapa de indiferencia correspondiente a estas preferencias. (b) Estas preferencias ¿pueden ser representadas mediante una función de utilidad continua? ¿Por qué, o por qué no?

2. Supongan que las preferencias están representadas por la función de utilidad Cobb-Douglas, $u\ (x_1, x_2) = Ax_1^{\ \alpha}\ x_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, y $A > 0$. Suponiendo una solución interior, obtengan las funciones de demanda marshallianas.

3. Hemos señalado que $u\ (\boldsymbol{x})$ es invariante a transformaciones monótonas crecientes. Una transformación común es la transformación logarítmica, $ln\ (u\ (\boldsymbol{x}))$. Tomen la transformada logarítmica de la función de utilidad del ejercicio anterior; entonces, usando a ésta como función de utilidad, derivar las funciones de demanda marshallianas y verifiquen que son idénticas a las obtenidas en el ejercicio anterior.

4. Supongan que $u\ (\boldsymbol{x})$ representa las preferencias monótonas de algún consumidor sobre $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_{n+}$. Para cada una de las funciones $f\ (\boldsymbol{x})$ que siguen, establezcan si f también representa las preferencias de este consumidor. En cada caso, asegúrense de justificar su respuesta, ya sea con un argumento o un contraejemplo:

a) $f(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) + (u\ (\boldsymbol{x}))^3$
b) $f(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) - (u(\boldsymbol{x}))^2$
c) $f(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} x_i$

5. Un agente con vida infinita posee 1 unidad de una mercancía que consume durante toda su vida. La mercancía es perfectamente almacenable y no recibirá más de lo que tiene ahora. El consumo del producto en el período t se denota x_t, y su función de utilidad de por vida viene dada por $u(x_0, x_1, x_2,\ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\ ln\ (x_t)\quad (0<\beta<1)$. Calculen su nivel óptimo de consumo de cada período.

6. Utilicen una demostración alternativa de la identidad de Roy siguiendo el camino siguiente: (a) Usando la definición de v, muestren que si $\boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{p}^0,\ y^0)$, entonces $v(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}^0) \geq v(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^0.\boldsymbol{x}^0)\ \forall \boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$.

(b) Concluir que $f\ (\boldsymbol{p}) \equiv v\ (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^0)$ alcanza su mínimo en $\boldsymbol{R}_{n++}$ en el punto $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^0$.

(c) Supongan que f es diferenciable en $\boldsymbol{p}^0$. ¿Qué valor tiene su gradiente en $\boldsymbol{p}^0$?

(d) Demostrar la identidad de Roy usando (a)-(c).

7. Demostrar que las funciones de demanda hicksianas son homogéneas de grado cero en los precios.

8. En el caso de 2 bienes, demostrar que si uno de los bienes es inferior, entonces el otro es normal.

9. Supongan que u $(\mathbf{x})$ es una *función homogénea lineal*.

(a) Demostrar que la función de gasto es multiplicativamente separable en $\mathbf{p}$ y u, pudiendo escribirse bajo la forma $e\ (\mathbf{p}, u) = e\ (\mathbf{p}, 1).\ U$

(b) Demostrar que la utilidad marginal del ingreso depende de $\mathbf{p}$, pero es independiente de y.

10. Sea la función de utilidad $u\ (x_1, x_2) = (x_1)^{½} + (x_2)^{½}$.

(a) Computar las funciones de demanda, $x_i\ (p_1, p_2, y), i=1, 2$

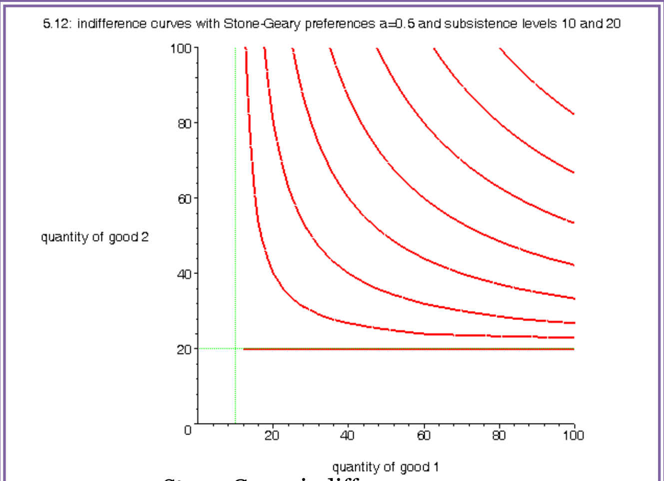
(b) Calcular el término de sustitución en la ecuación de Slutsky para los efectos sobre x_1 de cambios en p_2

(c) Clasificar a x_1 y x_2 como complementos o sustitutos (brutos)

11. La *función de utilidad de Stone-Geary* tiene la expresión siguiente:

$$u\ (\mathbf{x}) = \Pi_{i=1}^{n}\ (x_i - b_i)^{ai}\ ,\quad a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

Los coeficientes $b_i \geq 0$ son interpretados frecuentemente como "niveles de subsistencia" de los bienes respectivos (gráfico adjunto).



Stone-Geary indifference curves

(a) Obtener las funciones de gasto asociado y de utilidad indirecta. Nótese que la primera es lineal en la utilidad, mientras que la última es proporcional al monto de *ingreso discrecional*, $y - \sum_{1=1}^{n} p_i\, b_i$.

(b) Mostrar que a_i mide la porción de *ingreso discrecional* que será gastada en compras *discrecionales* del bien x_i, en exceso del nivel de subsistencia b_i.

12. Demuestren que la ecuación de Slutsky puede ser escrita en términos de elasticidades, de la siguiente forma: $_{ij} = {}^{h}{}_{ij} - s_j.\eta_j$, donde ${}^{h}{}_{ij}$ es la elasticidad de la demanda hicksiana de x_i con respecto al precio p_j, y los restantes términos corresponden a las definiciones del texto.

13. ¿Verdadero o falso?

(a) Cuando el cociente de los bienes consumidos x_i/x_j es independiente del nivel del ingreso para todos los i y los j, luego las elasticidades ingreso son todas unitarias.

(b) Cuando todas las elasticidades ingreso son constantes e iguales, todas deben ser igual a 1.

(c) Si la función de utilidad es homotética, la utilidad marginal del ingreso es independiente de los precios, y depende sólo del ingreso.

14. Un consumidor con ingreso y_o enfrenta precios $\boldsymbol{p^o}$ y logra una utilidad $u^o = v\ (\boldsymbol{p^o}, y^o)$. Cuando los precios cambian a $\boldsymbol{p^1}$ resulta afectado el *costo de vida*. Para apreciar el impacto de estos cambios de los precios, podemos definir un índice de costo de vida como el cociente

$$I\ (\boldsymbol{p^o}, \boldsymbol{p^1}, u^o) = e\ (\boldsymbol{p^1}, u^o)/e\ (\boldsymbol{p^o}, u^o).$$

a) Demostrar que $I\ (\boldsymbol{p^o}, \boldsymbol{p^1}, u^o)$ es > 1 (< 1) si el gasto necesario para mantener la utilidad del período base, u^o, aumenta (disminuye).

b) Supongan que el ingreso del consumidor también cambia desde y^o a y^1. Demostrar que el consumidor estará mejor (peor) en el período final siempre que y^1/y^o sea mayor (menor) que $I\ (\boldsymbol{p^o}, \boldsymbol{p^1}, u^o)$.