Incertidumbre

Notas de clase II•

Índice

• Nota de Clase elaborada para su utilización en el curso de Microeconomía II a cargo del Prof. Bour

Cooperación entre individuos

Dos individuos ("J" y "K") tienen, cada uno, una riqueza W_B en el escenario bueno (que ocurre con probabilidad p_J a "J" y p_K a "K") y una riqueza w_M en el escenario malo ($W_B>w_M$). No existen otros escenarios. Tienen la posibilidad de cooperar de la siguiente manera: si los dos experimentan el escenario bueno, ambos tienen W_B; si los dos experimentan el escenario malo, ambos tienen w_M; pero si uno de ellos experimenta el malo y el otro el bueno, se "reparten" la riqueza en cantidades iguales: cada uno de ellos obtiene $(W_B + w_M)/2$. Si los sucesos que ocurren a uno y otro son independientes, puede demostrarse que en el caso en que los individuos sean aversos al riesgo,
ambos preferirán cooperar a no hacerlo. Tomemos como ejemplo dos individuos que tiene una función de utilidad U(W) sobre su riqueza; y consideremos que los sucesos que ocurren a uno y otro son independientes. Esto nos remite a una de las reglas básicas de la probabilidad: si dos sucesos **a** y **b** son independientes, se verifica que:

$$P(a/b) = P(a)$$

Esto es: la probabilidad de que ocurra **a** sabiendo que ocurrió **b** es igual a la probabilidad de que ocurra **a**. Una importante implicancia de lo antedicho es la forma particular de la regla de la intersección cuando dos sucesos son independientes. La ocurrencia conjunta de dos sucesos **a** y **b** es el producto entre la probabilidad de que ocurra **a** sabiendo que ocurrió **b** y la probabilidad de que ocurra **b**:

$$P(a \cap b) = P(a/b) \cdot P(b)$$

Para los sucesos independientes,

$$P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$$

Definamos los siguientes sucesos y sus probabilidades:

a= a J le ocurre el suceso bueno (**a^C**= a J le ocurre el suceso malo)

b= a K le ocurre el suceso bueno (**b^C**= a K le ocurre el suceso malo)

$P(a)=p_J$; $P(b)=p_K$; $P(a^C)=(1-p_J)$; $P(b^C)=(1-p_K)$

$P(a \cap b)=p_J \cdot p_K$; $P(a^C \cap b^C)=(1-p_J)\cdot(1-p_K)$

$P(a \cap b^C)=p_J \cdot (1-p_K)$; $P(a^C \cap b)=(1-p_J)\cdot p_K$

Para el caso particular en que las probabilidades para ambos individuos son iguales, $p_J = p_K = p$. Entonces, se procederá a comparar la utilidad que le brinda a un individuo la ausencia de cooperación y la existencia de la misma:

$$p \cdot U(W_B) + (1-p)\cdot U(w_M) \quad ? \quad p^2 \cdot U(W_B) + 2\cdot p \cdot (1-p)\cdot U\left(\frac{W_B + w_M}{2}\right) + (1-p)^2 \cdot U(w_M)$$

Dividiendo miembro a miembro por $p \cdot (1\text{-}p)$,

$$\frac{1}{1-p}\cdot U(W_B) + \frac{1}{p}\cdot U(w_M) \quad ? \quad \frac{p}{1-p}\cdot U(W_B) + 2\cdot U\left(\frac{W_B + w_M}{2}\right) + \frac{1-p}{p}\cdot U(w_M)$$

Re*agrupando,*

$$\left(\frac{1}{1-p} - \frac{p}{1-p}\right)\cdot U(W_B) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1-p}{p}\right)\cdot U(w_M) \quad ? \quad 2\cdot U\left(\frac{W_B + w_M}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot U(W_B) + \frac{1}{2}\cdot U(w_M) \quad ? \quad U\left(\tfrac{1}{2}\cdot W_B + \tfrac{1}{2}\cdot w_M\right)$$

Se observa claramente que lo anterior nos remite a la desigualdad de Jensen; un individuo averso al riesgo preferirá cooperar, mientras que un amante preferirá no hacerlo. Para un averso al riesgo, la desigualdad se cumple en este sentido:

$$\frac{1}{2}\cdot U(W_B) + \frac{1}{2}\cdot U(W_M) \quad < \quad U(\tfrac{1}{2}\cdot W_B + \tfrac{1}{2}\cdot W_M)$$

Ejemplo: Venancio tiene una plantación de tomates en Junín. Si llueve una determinada cantidad de cm^3 en el mes, sabe que puede colocar su producción a un valor de $ 10.000. Sin embargo, si no llueve esa cantidad, la producción se desvaloriza en un alto porcentaje, pudiendo colocarla sólo a $1.000. No existen otros escenarios. Ladislao también tiene una plantación de tomates con las mismas posibilidades que la de Venancio, pero que está ubicada en Córdoba. Considerando que la probabilidad de sequía es de 0,5, y los sucesos que pueden ocurrir a ambos individuos son independientes, analizar si les conviene cooperar sabiendo que poseen una función de utilidad logarítmica sobre su riqueza.

La comparación es la siguiente (consideramos, de aquí en más, los valores tomados en miles de pesos):

$$0{,}5 \cdot \ln(10) + 0{,}5 \cdot \ln(1) = 1{,}1513$$

Utilidad de Venancio sin cooperar

Al cooperar, la probabilidad de que les llueva lo suficiente a ambos es 0,25 (viene de hacer 0,5·0,5). La probabilidad de que no les llueva a ambos es también 0,25; mientras que la probabilidad de que a uno le llueva y al otro no es 0,5 (viene de 0,5·0,5+0,5·0,5). Entonces,

$$0{,}25 \cdot \ln(10) + 0{,}5 \cdot \ln\left(\frac{10+1}{2}\right) + 0{,}25 \cdot \ln(1) = 1{,}428$$

Utilidad de Venancio cooperando

La diferencia radica en que la cooperación disminuye la varianza de la situación incierta; esto es algo que un individuo averso al riesgo valora mucho. Es importante aclarar que la ventaja de considerar la independencia de los sucesos radica en la posibilidad de calcular las probabilidades conjuntas sin mayores informaciones; pero es posible que sucesos no correlacionados perfectamente, por más que no sean independientes, generen ventajas en la cooperación.

Seguros

Otra posibilidad que tienen los individuos es la de asegurarse; es decir, reducir la riqueza en el escenario bueno (la prima del seguro se paga de todas formas) para incrementar su riqueza en el escenario malo (se percibe más de lo abonado). Es importante definir el concepto de *seguro actuarialmente justo*:

Un seguro es actuarialmente justo sí y solo sí el monto que cobra (la prima, notada con la letra "P") es igual al producto entre el monto que paga en caso de siniestro (lo que cobra el individuo, notado "C") y la probabilidad de que ocurra el escenario malo. En términos de la notación anterior, P=(1-p)·C.

En lugar de un monto fijo para asegurarse, puede existir la posibilidad de contratar una "cantidad" de seguro que maximiza la utilidad, a una tasa determinada. A continuación, se demostrará que si a un individuo averso al riesgo se le ofrece la posibilidad de contratar un seguro s a una tasa α (lo que paga el seguro por cada unidad contratada) que sea actuarialmente justa, éste contratará una cantidad s* que le permita asegurarse totalmente (es decir, tener lo mismo en el escenario bueno que en el malo):

Como el seguro es actuarialmente justo (considerando P=1), se verifica que:

$$s = (1 - p)\cdot\alpha\cdot s \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{1-p}$$

La utilidad esperada del individuo viene dada por:

$$U^e = p\cdot U(W_B - s) + (1-p)\cdot U(w_M - s + \alpha\cdot s)$$

$$U^e = p\cdot U(W_B - s) + (1-p)\cdot U(w_M - s + \frac{1}{1-p}\cdot s)$$

$$U^e = p\cdot U(W_B - s) + (1-p)\cdot U(w_M + \frac{p}{1-p}\cdot s)$$

Maximizando la utilidad esperada (tomando a s como variable de control),

$$\frac{\partial U^e}{\partial s} = -p \cdot U'(W_B - s) + (1-p) \cdot \frac{p}{1-p} \cdot U'(w_M + \frac{p}{1-p} \cdot s) = 0$$

$$p \cdot U'(W_B - s) = p \cdot U'(w_M + \frac{p}{1-p} \cdot s)$$

De lo cual se desprende que, para $s = s^*$,

$$W_B - s = w_M + \frac{p}{1-p} \cdot s \quad \text{(debe suponerse que } U'(x) \text{ es inyectiva)}$$

Es decir, la riqueza en ambos escenarios es la misma.

Comprobemos ahora que realmente prefiere asegurarse en esa cuantía a no hacerlo:

$$p \cdot U(W_B - s) + (1-p) \cdot (w_M - s + \alpha \cdot s) \qquad ? \qquad p \cdot U(W_B) + (1-p) \cdot U(w_M)$$

Retomando el paso anterior, averiguamos s^* :

$$W_B - s = w_M + \frac{p}{1-p} \cdot s$$

$$W_B - w_M = \frac{p}{1-p} \cdot s + s$$

$$W_B - w_M = \left(\frac{p}{1-p} + 1 \right) \cdot s$$

$$s^* = \frac{W_B - w_M}{\frac{p}{1-p} + 1} = \frac{W_B - w_M}{\frac{1}{1-p}} = (1-p) \cdot (W_B - w_M)$$

Entonces, la utilidad esperada del individuo con el seguro es:

$$p{\cdot}U\left(W_B-(1-p)\cdot(W_B-w_M)\right)+(1-p){\cdot}U\left(w_M-(1-p)\cdot(W_B-w_M)+\frac{1}{1-p}\cdot(1-p)\cdot(W_B-w_M)\right)$$

Al observar detenidamente la expresión anterior, y efectuando algunas operaciones algebraicas, llegamos a que la utilidad esperada del individuo es:

$$p{\cdot}U\left(p{\cdot}W_B+(1-p){\cdot}w_M\right)+(1-p){\cdot}U\left(p{\cdot}W_B+(1-p){\cdot}w_M\right)$$

No debe sorprendernos; acabábamos de demostrar que el individuo, al asegurarse totalmente, obtiene la misma riqueza en el escenario bueno que en el malo. Por lo tanto, la comparación viene dada de la siguiente forma:

$$\underbrace{p\cdot U(p\cdot W_B+(1-p)\cdot w_M)+(1-p)\cdot U(p\cdot W_B+(1-p)\cdot w_M)}_{U^e\ con\ seguro}\quad ?\quad \underbrace{p\cdot U(W_B)+(1-p)\cdot w_M}_{U^e\ sin\ seguro}$$

Es sencillo ver que el primer miembro puede simplificarse:

$$U\left(p{\cdot}W_B+(1-p){\cdot}w_M\right)\qquad ?\qquad p{\cdot}U(W_B)+(1-p){\cdot}U(w_M)$$

Esto nos remite, nuevamente, a la desigualdad de Jensen: sabemos que el primer miembro será mayor al segundo sólo para funciones estrictamente cóncavas (las cuales identifican a los aversos al riesgo). Por lo tanto, si es averso al riesgo, el individuo contratará este seguro:

$$U\left(p{\cdot}W_B+(1-p){\cdot}w_M\right)\qquad >\qquad p{\cdot}U(W_B)+(1-p){\cdot}U(w_M)$$

<u>Ejemplo</u>: supongamos que Venancio no conoce a Ladislao (no puede cooperar de la forma vista anteriormente), pero si conoce una empresa aseguradora que le ofrece un seguro que paga $1,5 en caso de sequía por cada peso que se contrata. Averiguar si a Venancio le conviene contratarlo, y cuál es la cantidad que maximiza su utilidad esperada.

$$U^e = 0{,}5 \cdot \ln(10 - s) + 0{,}5 \cdot \ln(1 - s + 1{,}5 \cdot s)$$

Maximizando la utilidad esperada,

$$\frac{\partial U^e}{\partial s} = -\frac{0{,}5}{10 - s} + 0{,}5 \cdot \frac{0{,}5}{1 + 0{,}5 \cdot s} = 0$$

$$\frac{1}{4(1 + 0{,}5 \cdot s)} = \frac{1}{2(10 - s)}$$

$$4 + 2 \cdot s = 20 - 2 \cdot s \qquad \Rightarrow \qquad s^* = 4$$

La cantidad óptima es s*=4. Entonces, la utilidad esperada es:

$$U^e = 0{,}5 \cdot \ln(10 - 4) + 0{,}5 \cdot \ln(1 - 4 + 1{,}5 \cdot 4)$$

$$U^e = 0{,}5 \cdot \ln(6) + 0{,}5 \cdot \ln(3) = 1{,}4452$$

Recordando que la utilidad sin el seguro era 1,1513, observamos que le conviene contratar el seguro.

Supongamos ahora que el seguro que se le ofrece es actuarialmente justo. Es decir, α = 1/(1-p). En este caso, α = 2 (el seguro paga $2 por cada peso contratado). Veamos como difiere la cantidad contratada:

$$U^e = 0{,}5 \cdot \ln(10 - s) + 0{,}5 \cdot \ln(1 - s + 2 \cdot s)$$

Maximizando la utilidad esperada,

$$\frac{\partial U^e}{\partial s} = -\frac{0{,}5}{10 - s} + 1 \cdot \frac{0{,}5}{1 + 1 \cdot s} = 0$$

$$\frac{1}{2(1 + s)} = \frac{1}{2(10 - s)}$$

$$2 + 2 \cdot s = 20 - 2 \cdot s \qquad \Rightarrow \qquad s^* = 4{,}5$$

La cantidad óptima es s*=4,5 (nótese que es mayor que la cantidad óptima a la tasa anterior). Entonces, la utilidad esperada es:

$$U^e = 0{,}5 \cdot \ln(10 - 4{,}5) + 0{,}5 \cdot \ln(1 - 4{,}5 + 1{,}5 \cdot 4{,}5)$$

$$U^e = 0{,}5 \cdot \ln(5{,}5) + 0{,}5 \cdot \ln(5{,}5) = 1{,}7047$$

Este nivel de utilidad es mayor al correspondiente a la tasa anterior (ni hace falta decir que es mayor al obtenido sin seguro). Es relevante remarcar que la contratación del seguro actuarialmente justo implica la igualdad de la riqueza en los escenarios (en este caso, 5,5).

Beneficio de la aseguradora

Los beneficios esperados de la empresa aseguradora vienen dados por:

$$\pi^e = p \cdot s + (1 - p) \cdot (s - \alpha \cdot s)$$

Es decir: con probabilidad p (no ocurre el siniestro) cobra el monto de la prima; y con probabilidad (1-p) (el siniestro ocurre) también lo cobra, pero debe abonar una suma proporcional a la prima en la cuantía de la tasa estipulada (α) que, evidentemente, es mayor que la prima.

Nótese que si el seguro es actuarialmente justo, $\pi^e=0$:

$$\pi^e = p \cdot s + (1-p) \cdot (s - \frac{1}{1-p} \cdot s) = p \cdot s + (1-p) \cdot (-\frac{p}{1-p} \cdot s) = p \cdot s - p \cdot s = 0$$

<u>Ejemplo</u>: supongamos que Venancio contrató el seguro que pagaba \$1,5 por cada peso contratado. Recordemos que la cantidad óptima era s*=4, y veamos los beneficios esperados de la empresa aseguradora:

$$\pi^e = 0{,}5 \cdot 4 + (1 - 0{,}5) \cdot (4 - 1{,}5 \cdot 4) = 1$$

Los beneficios esperados de la aseguradora son de \$1.000.

En cambio, si el seguro hubiera sido actuarialmente justo, la cantidad hubiera sido 4,5, pero la tasa era α = 2. Por lo tanto,

$$\pi^e = 0{,}5 \cdot 4{,}5 + (1 - 0{,}5) \cdot (4{,}5 - 2 \cdot 4{,}5) = 0$$

Elección entre dos bienes

La elección de la cantidad de seguro que maximiza la utilidad esperada puede analizarse como un problema del consumidor, en el que tiene unas determinadas preferencias, y desea maximizar su utilidad sujeta a una restricción presupuestaria. En nuestro análisis, los dos bienes serían la riqueza en el escenario bueno y la riqueza en el escenario malo. Tomando la maximización de la utilidad de Venancio, veamos cual sería su mapa de curvas de indiferencia:

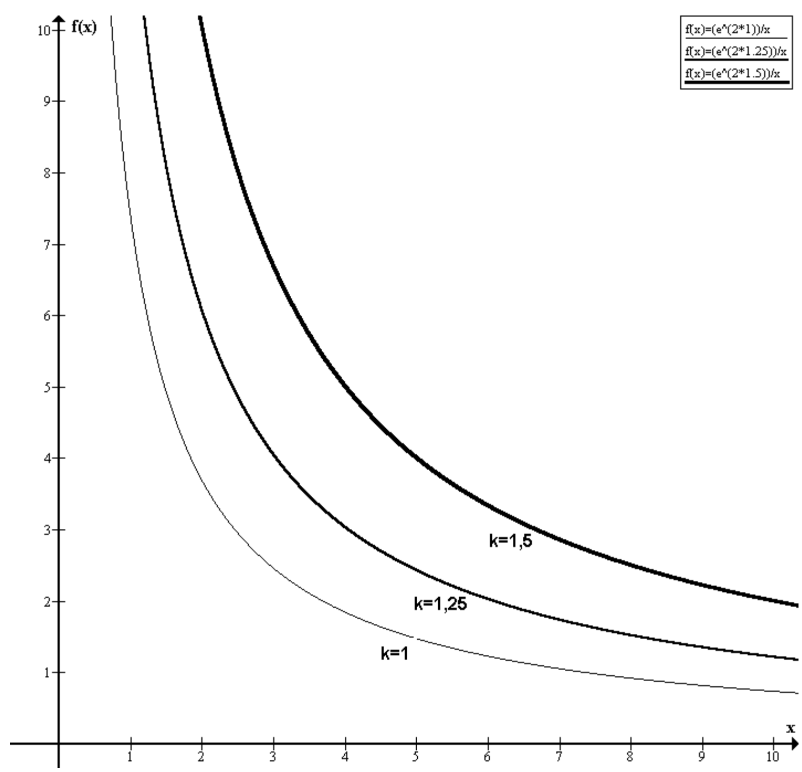
X: riqueza en el escenario bueno Y: riqueza en el escenario malo

$$U(X,Y) = 0{,}5 \cdot \ln(X) + 0{,}5 \cdot \ln(Y) = k$$

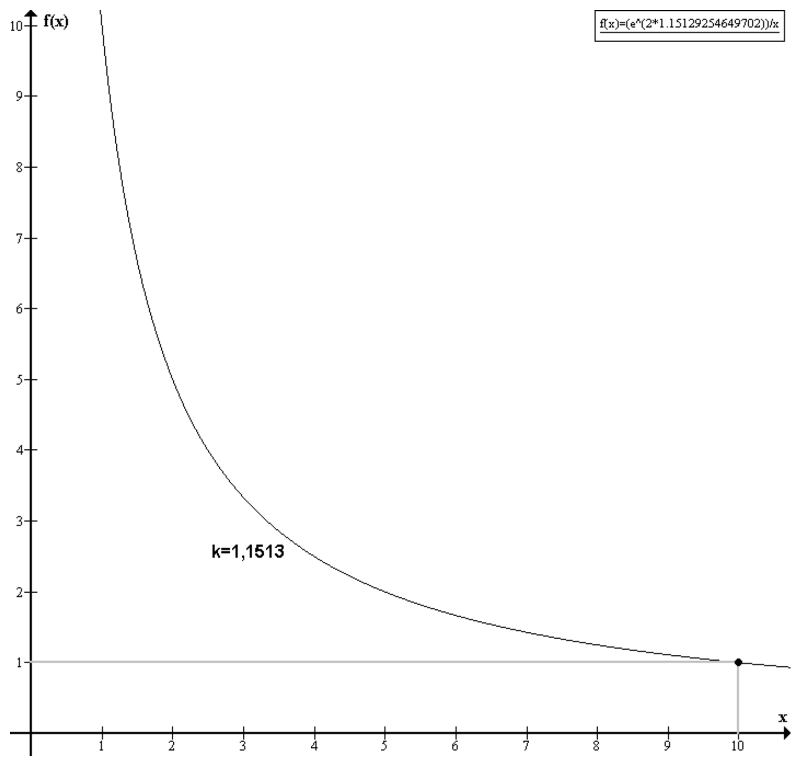
$$0{,}5 \cdot \ln(Y) = k - 0{,}5 \cdot \ln(X) \quad \Rightarrow \quad \ln(Y) = 2k - \ln(X)$$

$$e^{\ln(Y)} = e^{2k-\ln(X)} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{e^{2k}}{X}$$

Gráficamente, veamos que se trata de una hipérbola, que cumple convexidad estricta y monotonicidad fuerte:



En particular, podríamos observar la curva de indiferencia correspondiente al nivel de utilidad de la "dotación inicial" del individuo:



El seguro es el elemento que permite "pasar" riqueza de un escenario al otro (y, por ende, "moverse" de esa dotación inicial). Podemos afirmar que tanto el escenario bueno como el escenario malo son funciones de la cantidad de seguro adquirido. Considerando la tasa α=1,5,

$$X = f(s) = 10 - s$$

$$Y = g(s) = 1 - s + 1{,}5 \cdot s = 1 + 0{,}5 \cdot s$$

Como la cantidad de seguro es la misma en ambos escenarios,

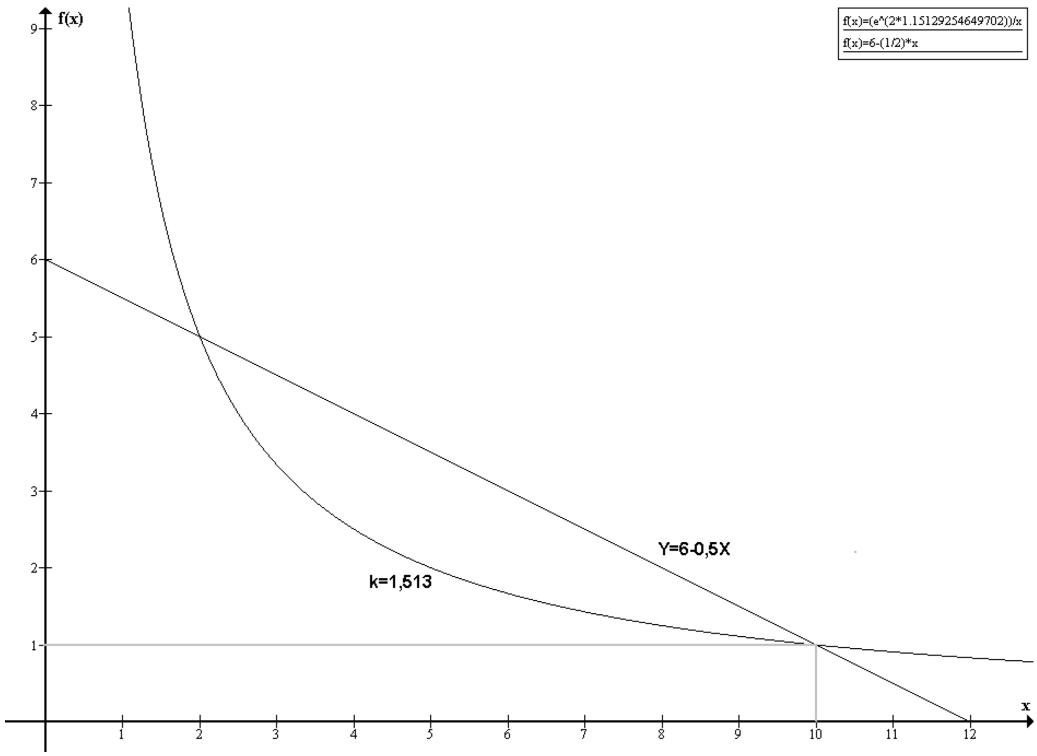
$$X = 10 - s \quad \Rightarrow \quad s = 10 - X$$

$$Y = 1 + 0{,}5 \cdot s \quad \Rightarrow \quad Y - 1 = 0{,}5 \cdot s \quad \Rightarrow \quad s = 2 \cdot Y - 2$$

$$\begin{cases} s = 10 - X \\ s = 2 \cdot Y - 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 10 - X = 2 \cdot Y - 2$$

$$12 - X = 2 \cdot Y \quad \Rightarrow \quad Y = 6 - \tfrac{1}{2} X$$

Lo que acabamos de obtener es una especie de recta presupuestaria. Al graficarla, observamos que, como era de esperar, pasa por la dotación inicial (10;1):



Sin embargo, no se verifica la condición de tangencia: la relación marginal de sustitución entre los dos estados debe ser igual al "precio" al que puede intercambiarse riqueza entre los mismos. Es claro que a este individuo le conviene asegurarse. De esto podríamos inferir que lo mejor que podría hacer es asegurarse totalmente (es decir, poseer lo mismo en el escenario bueno y el malo). Veamos que no es así. De esa forma, obtendría lo siguiente:

$$X = Y$$

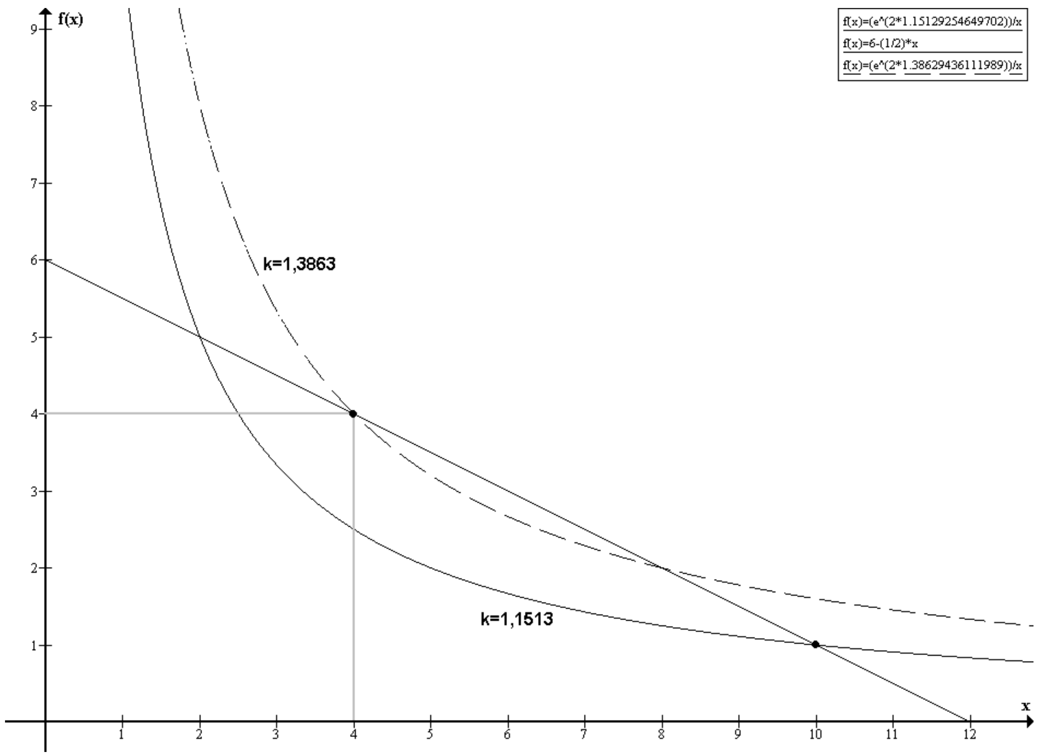
$$10 - s = 1 + 0{,}5 \cdot s$$

$$9 = 1{,}5 \cdot s \quad \Rightarrow \quad s = 6$$

Con lo cual, su utilidad esperada sería:

$$0{,}5 \cdot \ln(10 - 6) + 0{,}5 \cdot \ln(1 - 6 + 1{,}5 \cdot 6) \; = \; 0{,}5 \cdot \ln(4) + 0{,}5 \cdot \ln(4) \; = \; 1{,}3863$$

Gráficamente,



Observamos que sigue sin cumplirse la tangencia. La cantidad de seguro que permite asegurarse totalmente no llega al óptimo; por más que el individuo sea averso al riesgo, el seguro es demasiado "caro" (léase: no actuarialmente justo) para que le convenga asegurarse por completo. Según la maximización efectuada con anterioridad, sabemos que la cantidad óptima de seguro es s*=4. La utilidad esperada es la siguiente:

$$0{,}5 \cdot \ln(10-4) + 0{,}5 \cdot \ln(1-4+1{,}5 \cdot 4) \;=\; 0{,}5 \cdot \ln(6) + 0{,}5 \cdot \ln(3) \;=\; 1{,}4452$$

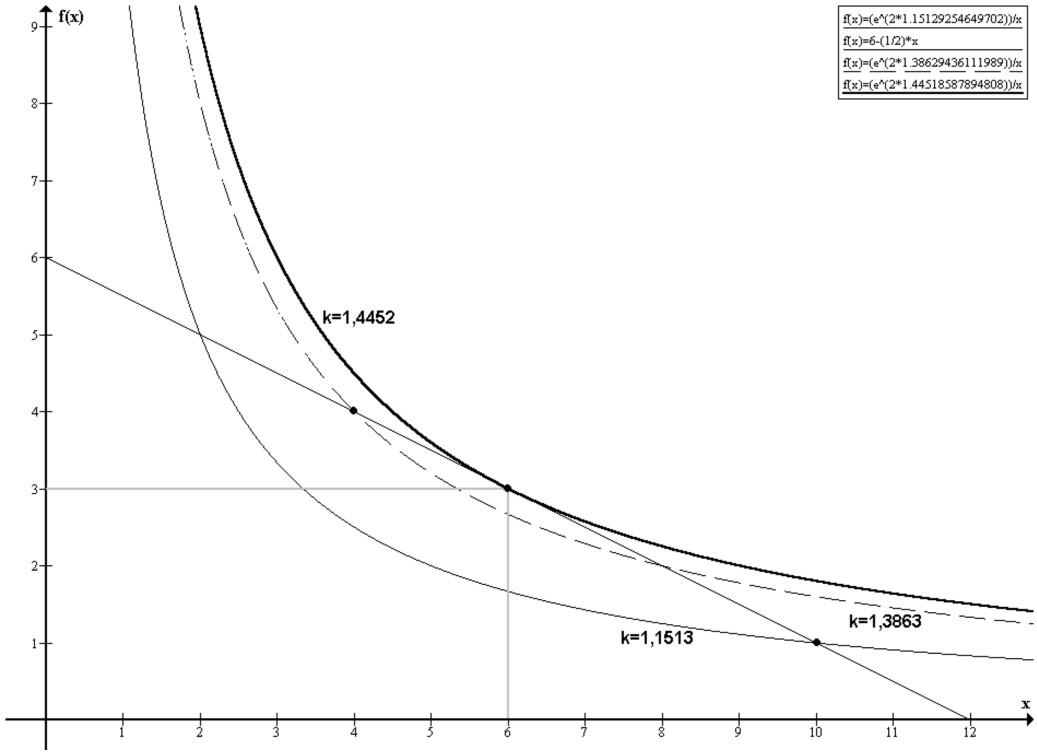
Podemos comprobar analíticamente que este nivel de utilidad verifica la condición de tangencia entre la RMS y la recta presupuestaria:

$$Y'_X = -\frac{e^{2\cdot(1{,}4452)}}{X^2}$$

Y reemplazando con el valor correspondiente al escenario bueno (X),

$$Y'_X = -\frac{e^{2\cdot(1{,}4452)}}{6^2} = -\tfrac{1}{2}$$

Gráficamente,



La maximización de la utilidad esperada sujeta a la restricción impuesta por el seguro brinda las cantidades óptimas de riqueza en cada escenario: \$6.000 en el escenario bueno y \$3.000 en el escenario malo, contratándose un seguro por \$4.000.

Las rectas isoesperanza

Podríamos agregar un elemento más a nuestro análisis. Considerando el valor esperado de la riqueza, tenemos que:

$$E[W] = p \cdot X + (1 - p) \cdot Y$$

Reordenando,

$$E[W] - p \cdot X = (1 - p) \cdot Y$$

$$Y = \frac{E[W]}{(1 - p)} - \frac{p}{(1 - p)} \cdot X$$

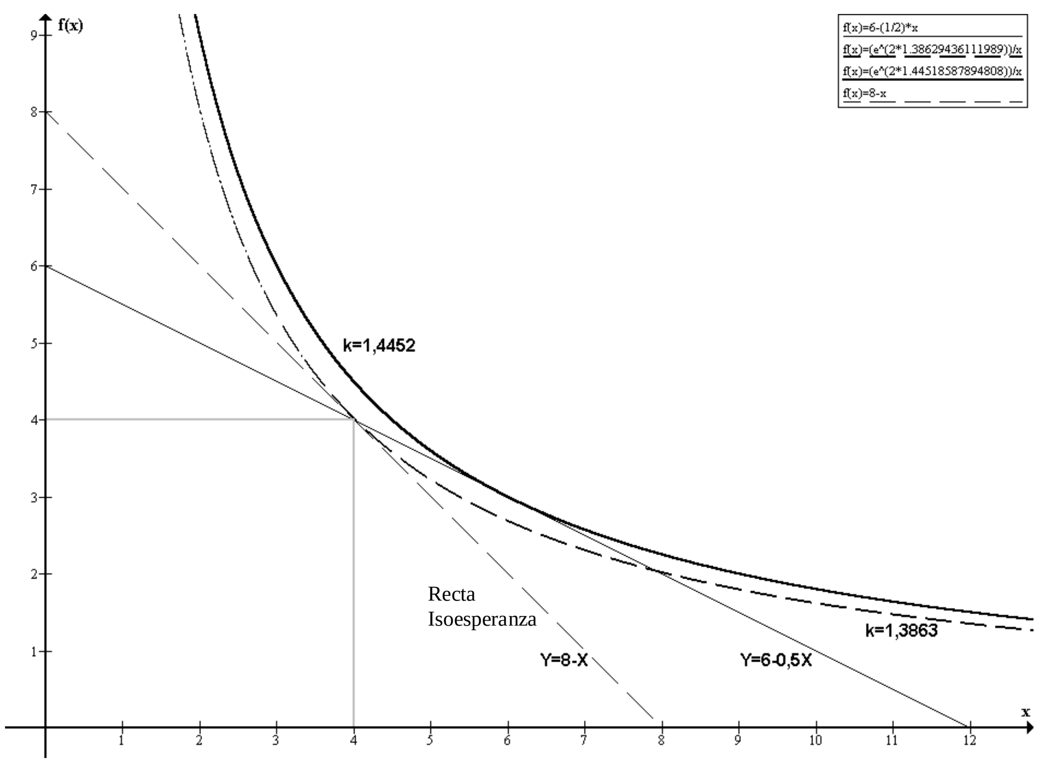
Tomando como variables a X e Y, para valores fijos de E[W], la expresión anterior describe lo que podríamos denominar *rectas isoesperanza*. Se trata de combinaciones de la riqueza en ambos escenarios que generan todas ellas un nivel constante de valor esperado. En nuestro ejemplo, las rectas isoesperanza podrían ser descriptas por la siguiente expresión:

$$Y = \frac{E[W]}{(1-0{,}5)} - \frac{0{,}5}{(1-0{,}5)} \cdot X \quad \Rightarrow \quad Y = 2 \cdot E[W] - X$$

Es interesante ver que en el punto donde la riqueza en el escenario bueno y en el escenario malo se igualan, la recta isoesperanza es tangente a la curva de indiferencia correspondiente al nivel de utilidad que implica asegurarse totalmente. En nuestro ejemplo,

$$Y'_X = -\frac{e^{2\cdot(1{,}3863)}}{4^2} = -1$$

Gráficamente,



Puede verificarse que cuando la pendiente de las rectas isoesperanza es igual a la pendiente de la restricción presupuestaria, el seguro es actuarialmente justo y el individuo se asegura totalmente (cuanto más difieren, menos se asegura el individuo).

Consigamos la pendiente de la restricción presupuestaria:

$$X = W_B - s \quad \Rightarrow \quad s = W_B - X \qquad\qquad \alpha > 1$$

$$Y = w_M - s + \alpha \cdot s \quad \Rightarrow \quad Y - w_M = (\alpha - 1) \cdot s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{Y}{(\alpha - 1)} + \frac{w_M}{(1 - \alpha)}$$

$$\frac{Y}{(\alpha - 1)} + \frac{w_M}{(1 - \alpha)} = W_B - X$$

$$\frac{Y}{(\alpha - 1)} = W_B + \frac{w_M}{(\alpha - 1)} - X$$

$$Y = (\alpha - 1) \cdot W_B + w_M + (1 - \alpha) \cdot X$$

La pendiente es (1-α). Ahora, igualemos este valor a la pendiente de las rectas isoesperanza que obtuvimos:

$$(1 - \alpha) = -\frac{p}{1 - p}$$

$$\alpha = 1 + \frac{p}{1 - p} = \frac{1 - p + p}{1 - p} = \frac{1}{1 - p}$$

Comprobamos que el seguro es actuarialmente justo; un individuo averso al riesgo se asegurará totalmente.