Métodos Exactos de Optimización en Microeconomía
Enrique Bour, Febrero de 2011[1].

Hay muchos problemas económicos que tienen la estructura siguiente: (i) se minimiza una función lineal sujeta a una restricción no lineal; (ii) se maximiza una función lineal sujeta a una restricción no lineal; o bien (iii) se maximiza una función no lineal sujeta a una restricción lineal. Como ejemplos, se tiene: (i) el problema de minimización de costos del productor (o el problema de minimización del gasto del consumidor); (ii) el problema de maximización de beneficios del productor, y (iii) el problema de maximización de la utilidad del consumidor. Todos estos problemas de optimización condicionada desempeñan un papel clave en la teoría económica. Al final de este documento son repasados algunos conceptos centrales.

En los libros más usados de teoría microeconómica y economía matemática (como los de Jehle, G.A. y Reny, P.J. *Advanced Microeconomic Theory* (2nd edition), Wiley, New York, 2001; Mas-Colell, A., Whinston, M.D. y Green, J.R. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York, 1995; Simon, C.P. y Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton, New York, 1993; y Takayama, A. *Mathematical Economics* (2nd edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1996) que hacen énfasis en la precisión y el rigor, el tratamiento del problema fundamental de maximización de la utilidad parece mostrar deficiencias en tres aspectos: amplitud de cobertura, métodos de solución completos y coherentes así como corrección desde el punto de vista matemático. Las mismas deficiencias aparecen en otros libros con orientación menos formal (como Luenberger, D.G. *Microeconomic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1995 y Varian, H.R. *Microeconomic Analysis* (3rd edition), Norton, New York, 1992). En consecuencia, el lector buscará inútilmente un método para derivar funciones de demanda marshallianas que cumplan con: a) que sean completas y coherentes, basadas en principios generalmente aceptados de razonamiento matemático correcto (a partir de, por ejemplo, los teoremas de Kuhn-Tucker y de Weierstrass), b) que sean operativamente útiles de ser aplicadas al menos a las siguientes cinco instancias de funciones de utilidad sobre el conjunto de consumo estándar X^l_+, donde $l \in N$ representa al número de bienes; 1) la función de utilidad Cobb-Douglas, $l>2$, 2) la función de utilidad CES, $l>2$, 3) la función de utilidad lineal con coeficientes positivos, $l\geq 2$, 4) la función de utilidad $u(x_1,x_2) = x_1^2(x_2+1)$ o cualquier otra similar que conduzca a soluciones de esquina, y 5) la función de utilidad de Leontief, $l\geq 2$.

Cabe notar que hay buenos motivos para incluir al menos más de dos bienes en la lista anterior. En efecto, si $l=2$ todos los problemas anteriores de maximización de la utilidad podrían reducirse inmediatamente a un problema de optimización escalar sobre un intervalo; pues las funciones de utilidad correspondientes son estrictamente crecientes, lo que implica que toda solución óptima tendrá presupuesto balanceado por el siguiente Teorema 1(a). Se trata de un problema elemental, que puede ser resuelto mediante el uso del signo de la derivada, apoyado tal vez mediante programas de cómputo algebraico. Lo cual explica por qué el caso $l>2$ fue elegido en los ejemplos

---

[1] Basado en Erik J. Balder, Exact and Useful Optimization Methods for Microeconomic Theory, SSRN, May 2008. Como introducción, véase W. Erwin Diewert, Convex Sets and Concave Functions, January 2008.

clásicos 1)-2) para verificar la utilidad operativa de los métodos que ahora veremos. Si se quiere aplicar el método de solución a los casos 3)-4) el método debe ser capaz de calcular soluciones múltiples y soluciones de esquina (un tema habitual en un curso de microeconomía estándar como el de Besanko, D. y Braeutigam, D.R. *Microeconomics* (2nd. ed.), Wiley, New York, 2005). Por último se debe tener en cuenta que el caso 5) corresponde a una función de utilidad no diferenciable, que presenta un desafío bastante atípico.

Los resultados de optimalidad derivan del teorema de Kuhn-Tucker[2], estándar en microeconomía. En gran medida, la estandarización procede de una propiedad especial de las funciones de utilidad en microeconomía: a saber, que son estrictamente crecientes. Antes es necesario recordar que las funciones clásicas Cobb-Douglas y CES requieren que el modelo esté definido en el ortante no-negativo R^l_+, siendo posiblemente no diferenciables en la frontera. Finalmente, el Teorema 1(*d*) usa aparentemente una nueva adaptación de la noción de cuasi-concavidad estricta, denominada (*S*)-*cuasiconcavidad*.

En resumen, se presenta una mejora de la literatura usual microeconómica sobre maximización de la utilidad mediante un teorema de Kuhn-Tucker que explota la monotonía estricta de las funciones de utilidad microeconómicas mediante el concepto de (*S*)-cuasiconcavidad. El método de solución resultante es riguroso y versátil.

1 Resultados usuales de optimalidad en microeconomía

Llamamos *función de utilidad* a una función continua $u: R^l_+ \rightarrow R$. Sea Ω un conjunto abierto contenido en R^l_+ (y por consiguiente en R^l_{++}); se supone que la función u es diferenciable en Ω. Luego, en la sección **3** se elegirá como Ω al ortante estrictamente positivo R^l_{++} de manera de tratar los casos 1)-4), pero para el caso de Leontief 5) el espacio Ω será elegido de modo diferente. Se supondrá que *u es estrictamente creciente sobre* R^l_+, esto es, que para todo x, x' en R^l_+ debe cumplirse que, si $x_i > x_i'$ para todo $i=1,2,\ldots,n$, luego $u(x)>u(x')$. Para el vector de precios $p \in R^l_{++}$ e $y \in R_+$ (ingreso), el *problema de maximización de utilidad del consumidor* es como sigue:

(1) maximizar $u(x)$ sobre todos los $x \in R^l_+$ tales que $p.x \leq y$.

Este problema está bien definido porque $0 \in B = \{x \in R^l_+ : p.x \leq y\}$ donde B es el conjunto factible del problema, o conjunto de *presupuesto*. Denotaremos como $B_0 = \{x \in R^l_+ : p.x = y\}$, es decir el *(híper)-plano presupuestario*. Un vector x de R^l_+ tendrá presupuesto balanceado si $p.x = y$, es decir, si pertenece al hiperplano de presupuesto B_0. Se dirá que la función u tiene la propiedad (*S*) si para todo par $x, x' \in R^l_+$ siendo $x \neq x'$ y $u(x)=u(x')>u(0)$, se tiene que $u(½x+½x')>u(x)=u(x')$. Decimos que la función $u: R' \rightarrow R$ es (*S*)-*cuasicóncava* si es cuasicóncava en R^l_+ y tiene la propiedad (*S*). Resulta sorprendente que esta modificación natural de la noción de cuasiconcavidad estricta, que excluye ciertos puntos sub-óptimos (con $y>0$) y que solamente funciona con

[2] H. W. Kuhn, and A. W. Tucker, Nonlinear Programming, Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. (Univ. of Calif. Press, 1951), 481-492.

puntos x y x' que están en la misma curva de indiferencia, resulte novedosa; empero, ése es el caso. Está claro que una condición suficiente para que u sea (S)-cuasicóncava es que sea cuasicóncava en R^l_+ y estrictamente cuasicóncava cuando se la restringe al conjunto $\{x \in R^l_+ : u(x) > u(0)\}$. El teorema siguiente proporciona una condición suficiente para la S-cuasiconcavidad. El mismo demuestra también que la función de utilidad es (S)-cuasicóncava en los casos 1), 2) y 4).

3

Teorema 1 (a) *El problema de maximización de la utilidad (1) del consumidor tiene solución óptima. Además, toda solución óptima tiene presupuesto balanceado.*

(b) Si (1) posee una solución óptima x^* tal que $x^* \in \Omega$, entonces existe un $\lambda \geq 0$ tal que

(2) $$\nabla u(x^*) = \lambda\, p$$

(c) Si $x^* \in \Omega$ tiene presupuesto balanceado y (2) se cumple para algún $\lambda > 0$, entonces x^* es una solución óptima de (1), siempre que u sea cuasicóncava sobre R^l_{++}.

(d) Si u tiene la propiedad (S), luego (1) tiene una solución óptima única. En particular, si u es (S)-cuasicóncava, entonces todo $x^* \in \Omega$ con presupuesto balanceado que cumpla (2) con algún $\lambda > 0$, es la única solución óptima de (1).

Un ejemplo simple muestra que la anterior formulación es estricta: tómese $l=1$, $u(x) = (x-1)^3$, $y = 1$ y $p=1$. En este caso, la posibilidad de $\lambda=0$ no puede ser excluida en el punto c).

Lema 1 *Supóngase que u es cuasicóncava sobre R^l_+. Entonces, para todo $x \in \Omega$ y $x' \in R^l_+$*

$$u(x) \leq u(x') \text{ implica } \nabla u(x).(x'-x) \geq 0.$$

<u>Demostración</u>: Para $t \in [0,1]$ sea $\phi(t) = u(tx + (1-t)x')$. Luego $u(x) \leq u(x')$ implica $\phi(t) \geq u(x) = \phi(1)$. Ello significa que $\phi(t)$ alcanza en $t=1$ un mínimo en el intervalo $[0, 1]$. Como u es diferenciable en Ω, la función ϕ, composición de u y de una transformación lineal, es diferenciable a la izquierda de 1. Ambos hechos implican que $\phi'(1) \leq 0$. El resto se sigue aplicando la regla de la cadena. QED.

<u>Demostración del Teorema 1</u> (a) La existencia de una solución óptima x^* es consecuencia del teorema de Weierstrass, porque u es continua y B es un conjunto compacto no vacío. Para $y=0$ la identidad $B = B_0 = \{0\}$ hace que el balance presupuestario se cumpla en forma trivial. Para $y>0$, $x^* \notin B_0$ implica $p.x^* < y$. Fijando $x^0_i = x^*_i + t$ da lugar a una contradicción para $t>0$ suficientemente pequeño, ya que $x^0 \in B$ y $u(x^0) > u(x^*)$.

(b) La hipótesis $x^* \in \Omega$ implica que x^* también es solución óptima del problema de optimización auxiliar

(3) *maximizar $u(x)$ respecto a todos los $x \in \Omega$ bajo $p.x \leq y$,*

que tiene sólo una restricción de desigualdad. Por el teorema de Kuhn-Tucker que considera dominios abiertos de definición para sus funciones en lugar de todo R^l, *se sigue que existe* $\lambda \geq 0$ *tal que* $\nabla u(x^*)=\lambda p$ (además, implica que $\lambda=0$ si $x^* \notin B_0$, pero esto es irrelevante por *(a))*.

(c) Supóngase que $x^* \in B_0 \cap \Omega$ *no es óptimo. Luego, existirá* $x^0 \in B$ *tal que* $u(x^0)>u(x^*)$. *Por ende se cumplirá* $u((1-t)x^0)>u(x^*)$ *para* $t>0$ *suficientemente pequeño, por la continuidad de u. Por el Lema 1, la hipótesis de que u es cuasicóncava implica que*

$$\nabla u(x^*).(x - x^*) \geq 0 \text{ para todo } x \in R^l_+, \text{ con } u(x) \geq u(x^*).$$

Luego, de $\nabla u(x^*)=\lambda p$ *y* $\lambda>0$, *se sigue que* $p.((1-t)x^0-x^*) \geq 0$, *por lo cual* $p.x^0>(1-t)p.x^0 \geq y$ *dado el balance presupuestario de* x^0 *(obsérvese que* $p.x^0>0$ *ya que* $x^0 \neq 0$*). Ello está en contradicción con* $x^0 \in B$.

(d) En primer lugar, si $y=0$ *entonces* $B= \{0\}$, *de tal forma que la única solución óptima es* $x^*=0$. *Luego, si* $y>0$, *debe satisfacerse* $u(x^*)>u(x)$ *para toda solución óptima* x^*, *porque* $(t, t,..., t)$ *pertenece a B para un* $t>0$ *suficientemente pequeño y porque u es estrictamente monótona*[3]. *Ahora supóngase que* x^* *y* x^{**} *son dos soluciones óptimas diferentes de (1). En ese caso,* $u(x^*)=u(x^{**})=$ *valor óptimo de (1) y* $u(x^*)>u(0)$ *por el argumento previo. Definamos* $x^0 = \frac{1}{2}x^*+\frac{1}{2}x^{**}$; *luego* $x^0 \in B$ *y, por la propiedad (S), se tiene que* $u(x^0)>\frac{1}{2}u(x^*)+\frac{1}{2}u(x^{**})=u(x^*)$. *Esto contradice que* x^* *sea óptima. Por lo tanto, la solución óptima es única. La parte final del enunciado es consecuencia inmediata de combinar (c) con la unicidad.* QED.

Observación 1 Se obtiene una aplicación alternativa del teorema de Kuhn-Tucker si en lugar de operar con el conjunto abierto anterior $\Omega \subset R^l_+$, se utiliza un modelo con una función de utilidad definida y diferenciable sobre un conjunto abierto Ω' que *contiene* a R^l_+. La optimalidad de x^* en (1) podrá en tal caso ser expresada, de forma equivalente, como la optimalidad de x^* en el siguiente problema de optimización:

(4) *maximizar* $u(x)$ *sobre todos los* $x \in \Omega'$ *con* $p.x \leq y$ y $-x_i \leq 0$, $i= 1,..., l$.

Fue esta aplicación la elegida por Luenberger, D.G. (op. cit.), Mas-Colell, A., Whinston, M.D. y Green, J.R. (op. cit.), Simon, C.P. y Blume, L. (op. cit.), y Takayama, A. (op. cit.), pero al hacerlo así se construye un modelo que ya no es aplicable a todas las funciones de utilidad Cobb-Douglas o CES. Luenberger (p. 131 y sigtes.), Mas-Colell, A., Whinston, M.D. y Green, J.R. (p. 50 y sigtes.), Simon, C.P. y Blume, L. (en el Teorema 22.1, Ejemplo 22.1) y Varian, H. R. (op. cit, sección 2.2, cuando se discute la maximización del beneficio) cometen el error de formular de manera imprecisa o incorrecta las condiciones de optimalidad de primer orden y, en los casos de Luenberger, de Mas-Colell y otros y de Simon y Blume, a una aplicación incorrecta al caso Cobb-Douglas. Dejando esto de lado, la derivación de las condiciones de optimalidad es estándar, y puede ser hallada tanto en Simon y Blume como en Mas-

[3] Una función de una variable es *monótona* si es creciente, decreciente, no creciente o no decreciente.

Colell y otros: aplicando el teorema de Kuhn-Tucker a (4), que tiene $l+1$ restricciones de desigualdad, ahora se obtiene como condición de primer orden de optimalidad:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} \leq \lambda p_i, \text{ con igualdad si } x^*_i>0,\ i= 1,\ldots, l.$$

en lugar de la condición (2) y se cumple para todo x^* óptimo en Ω', conjunto que ahora incluye a la frontera de R^l_+. Para las funciones de utilidad encuadradas por este modelo –pero sólo para ellas- esta formulación proporciona resultados significativos y algo más nítidos. Estas observaciones no afectan lo que obtienen Jehle y Reny cuyos resultados de optimalidad presuponen que la solución óptima pertenecería a R^l_{++}, como ejemplifican con la aplicación del caso Cobb-Douglas en el ejercicio 1.20 de su libro. Pero no es suficiente para tratar los ejemplos de solución de puntos de esquina (3)-(4). Refleja un defecto común de todas estas referencias: con la excepción de Varian, ninguno parece tener una instancia totalmente resuelta de una solución de esquina.

Partiendo del Teorema 1(d) es evidente que la (S)-cuasiconcavidad puede ayudar a resolver el problema de optimización (1), pero que ello se debe en gran parte a la hipótesis de que la función de utilidad es estrictamente creciente: la propiedad (S) ignora las canastas situadas en los niveles más bajos de utilidad, es decir $u(0)$. Es obvio que la cuasiconcavidad estricta de u sobre R^l_+, como en el caso (2) de la CES, implica su (S)-cuasiconcavidad sobre R^l_+; empero, la recíproca no es cierta, como será demostrado en el Ejemplo 1*(i)* para el caso *(i)* de la Cobb-Douglas. Una condición suficiente obvia para la (S)-cuasiconcavidad, que generalmente funciona y está planteada en términos de propiedades estándar, es exigir que u sea cuasicóncava sobre R^l_+ y estrictamente cuasicóncava sobre $\{x\in R^l_+ : u(x)>u(0)\}$. Para el uso operativo se puede plantear una condición suficiente simple. A tal efecto, obsérvese que las propiedades de u del Teorema 1 dan lugar a que el rango de u sea un intervalo, a saber $[u(0),u_\infty)$, en donde $u_\infty=\sup_{x\in Rl+} u(x)$ (mediante esta notación se permite que u_∞ sea igual a $+\infty$). Para apreciarlo, definamos $\psi(t)=u(t, t,\ldots, t)$ para $t\geq 0$; se trata de una función continua, estrictamente creciente sobre R_+. Naturalmente, $u_\infty = \sup_{t\geq 0} \psi(t)$ y el supremo no puede ser alcanzado. Como para todo $x\in R^l_+$ el valor $u(x)$ se encuentra entre $\psi(0)$ y $\psi(t)$ para algún $t>0$ suficientemente grande (por la monotonía estricta y la continuidad de u), puede usarse el teorema del valor medio para el argumento.

Proposición 1 *Si el conjunto $\{x\in R^l_+ : u(x) > u(0)\}$ es convexo y si existe una función estrictamente creciente $h: (u(0), u_\infty)\to R$ tal que la compuesta $x\to h(u(x))$ sea estrictamente cóncava (o estrictamente cuasicóncava) sobre $\{x\in R^l_+ : u(x) > u(0)\}$, luego u es cuasicóncava sobre R^l_+ y estrictamente cuasicóncava sobre $\{x\in R^l_+ : u(x) > u(0)\}$. En particular, u es S-cuasicóncava.*

<u>Demostración</u> *En primer lugar, se mostrará que u es cuasicóncava. Sea $\alpha\in R$. Si $\alpha\leq u(0)$, entonces $\{u\geq\alpha\}=\{x\in R^l_+, u(x)\geq\alpha\}=R^l_+$. Si $\alpha>u(0)$, luego para cualquier x, $x'\in$*

$\{u>u(0)\}\subset\{u>u(0)\}$, $x\neq x'$, y para todo $t\in(0, 1)$ la propiedad dada de concavidad estricta (o de cuasiconcavidad estricta) implica $h(u(tx+(1-t)x'))>\text{mín}\{h(u(x)), h(u(x))\}\geq h(\alpha)$. Luego, $u(tx+(1-t)x')>\alpha$ por la monotonía estricta de h. Puede concluirse que el conjunto $\{u\geq\alpha\} = R^l_+$ para todo $\alpha\leq u(0)$ y que es estrictamente convexo para todo $\alpha>u(0)$. Por consiguiente, u es cuasicóncava sobre R^l_+. La cuasiconcavidad estricta buscada de u sobre $\{u>u(0)\}$ también se sigue de la conclusión previa. QED.

Ejemplo 1 *(i)* Las funciones de utilidad $u\colon R^l_+\rightarrow R$ de tipo Cobb-Douglas vienen dadas por $u(x) = \Pi^l_{i=1} x^{\alpha_i}_i$ con todos los exponentes $\alpha_i>0$. Son (S)-cuasicóncavas, pero $u(x_1, 0, 0,\ldots,0)=0$ muestra que no son estrictamente cuasicóncavas sobre R^l_+. Puede usarse la Proposición 1 para demostrar la (*S*)-cuasiconcavidad. Lo primero que hay que ver es que el conjunto $\{x\epsilon\ R^l_+,\ u(x)>u(0)\}=R^l_+$ es convexo. Sobre el intervalo $(u(0), u_\infty)=(0,+\infty)$ elegimos $h(t)=log(t)$, que es una función estrictamente creciente, con $h(u(x))=\sum_{i=1}^l \alpha_i\ log(x_i)$ sobre R^l_{++}. Cada función $x\rightarrow h(u(x))$ es estrictamente cóncava sobre R^l_{++} (simplemente porque $x\rightarrow log(x_i)$ lo es sobre $(0,+\infty)$), de modo que la función $x\rightarrow h(u(x))$, como es la suma de funciones estrictamente cóncavas, lo es también sobre R^l_{++}. Por lo tanto. *U* es *(S)*-cuasicóncava sobre R^l_+ según la Proposición 1.

(ii) Las funciones de utilidad del tipo CES vienen dadas por $u(x) =(\sum_{i=1}^l x_i^\rho)^{1/\rho}$, $0<\rho<1$. La Proposición 1 será aplicada para demostrar que estas funciones u son *(S)*-cuasicóncavas y aún estrictamente cuasicóncavas sobre R^l_+. En primer lugar, se tiene que el conjunto $\{x\in R^l_+\colon u(x)>u(0)\}=R^l_+\backslash\{0\}$ es convexo (ya que sólo deja de lado el origen, el argumento puede ser inmediatamente adaptado para implicar que u es aún estrictamente cuasicóncava sobre R^l_+). Sobre el intervalo abierto $(u(0), u_\infty) = (0,+\infty)$ se elige $h(t)=t^\rho$, que es una función estrictamente creciente; luego $x\rightarrow h(u(x))=\sum_{i=1}^l x_i^\rho$ es estrictamente cóncava en R^l_+ (porque $0<\rho<1$). Luego, están dadas las condiciones de la Proposición 1, y por consiguiente u es *(S)*-cuasicóncava sobre R^l_+.

(iii) Sea $u\colon R^2_+\rightarrow R$, $u(x_1,x_2)=x_1^2(x_2+1)$, como en el caso *(iv)*. Esta función es *(S)*-cuasicóncava, pero $u(0, x_2)=0$ para todo $x_2\geq 0$ es un indicio de que no es estrictamente cuasicóncava sobre R^2_+. Lo apreciamos observando, en primer término, que el conjunto $\{x\in R^2_+\colon u(x)>u(0)\}=\{(x_1,x_2)\colon x_1>0,\ x_2\geq 0\}$ es convexo. Sobre el intervalo abierto $(u(0), u_\infty) = (0,+\infty)$ se elige $h(t)=log(t)$, que es una función estrictamente creciente; luego $x\rightarrow h(u(x))=2\log(x_1) +\log(x_2+1)$ es estrictamente cóncava en $\{(x_1,x_2)\colon x_1>0,\ x_2\geq 0\}$ (se repite el razonamiento de *(i))*. Luego, u es *(S)*-cuasicóncava por la Proposición 1.

Este ejemplo puede ser de uso directo para aplicar el Teorema 1 a los casos *(i)*, *(ii)* y *(iv)* de la lista. Pero aún puede decirse algo más: si $\sum_i\alpha_i\leq 1$ la función de utilidad de *(i)* del Ejemplo 1 es cóncava sobre R^l_+ y otro tanto es válido en *(ii)* para todo $\rho\in(0, 1)$.

Observación 2 Aliprantis, C.D., Brown, D.J. y Burkinshaw, O., en *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*, (Springer-Verlag, Berlín, 1989) analizan la maximización de la utilidad de una economía de intercambio puro, pero su enfoque se extiende sin dificultades al de un consumidor común. Cuando $l=2$ resuelven en forma correcta y completa los casos *(i)*, *(iii)* y *(iv)*, coherentemente, usando las condiciones de optimalidad de primer orden. El caso *(iii)* no es tratado, y el caso *(v)* es resuelto de modo *ad hoc*: el primero no parece estar lejos del método general presentado en el libro, pero el último sí.

Observación 3 *(i)* Si no se supone monotonicidad en el Teorema 1, el balance presupuestario de la solución óptima no podría mantenerse, pero buena parte del Teorema 1 continúa cumpliéndose si u es no-decreciente, según se detalla a continuación. En la parte *(a)* aún queda garantizada la existencia de, al menos, una solución óptima con presupuesto balanceado, y la parte *(b)* se sigue cumpliendo como quedó establecido. La parte *(c)* del Teorema mantiene su sentido si se vincula la posibilidad adicional de que $x^* \in B \setminus B_0$ con un multiplicador $\lambda=0$. En tal caso, la optimalidad de x^* puede ser garantizada si u, además de ser no-decreciente, es cóncava sobre R^l_+.[4] Finalmente, *(d)* carece de significación: para que tenga la propiedad *(S)*, una función no-decreciente u debe ser estrictamente creciente, lo que ya está contemplado por el Teorema 1 *(d)*.

(ii) Algunas funciones de utilidad tienen R^l_{++} como dominio natural de definición. Sea $u: R^l_{++} \rightarrow R$ una función de ese tipo y supóngase que u es continua y estrictamente creciente sobre R^l_{++}, así como diferenciable en el conjunto abierto $\Omega \subset R^l_{++}$. A fin de evitar una situación trivial, se requiere que $y>0$. Las partes *(b)-(d)* del Teorema 1 continúan siendo válidas, con la cuasiconcavidad sobre R^l_+ reemplazada por la cuasiconcavidad sobre R^l_{++} y la propiedad *(S)* redefinida de la siguiente forma: para todo par $x, x' \in R^l_{++}$ con $x \neq x'$ y $u(x)=u(x')$ se tiene que $u(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x')>u(x)=u(x')$. Como muestra el ejemplo $l=2$, $u(x_1, x_2)=x_1+x_2$, la parte *(a)* requiere ser ajustada: existe una solución óptima bajo la condición adicional de que el conjunto $C=\{x \in R^l_{++}, u(x) \geq v\}$ sea cerrado para todo $v \in u(R^l_{++})$. Es decir, dados p e y, fijamos $x^o \in R^l_{++}$ con $p.x^o \leq y$, fijando $v^o=u(x^o)$. Luego,

$$\sup_{x \in R^l_{++},\, px \leq y} u(x) = \sup_{x \in C_v,\, px \leq y} u(x)$$

y del lado derecho de la expresión se maximiza una función continua sobre un conjunto compacto no vacío.

3 Dócimas de operatividad

Vamos a analizar ahora el uso del Teorema 1 como una forma de satisfacer el criterio de operatividad para maximizar la utilidad. El objetivo es obtener soluciones completas de las funciones de demanda marshallianas, usando dicho teorema de forma coherente, para cada una de las siguientes funciones de utilidad:

(i) $u(x) = \Pi^{l}_{i=1} x^{\alpha_i}_i$ con todos los exponentes $\alpha_i>0$,

---

[4] El ejemplo $l=1$, $x^*=1$, $u(x)=(x-1)^3$, $y=2$, $p=1$ muestra que la mera cuasiconcavidad es insuficiente en este caso.

(ii) $u(x)=(\sum_{i=1}^{l} x_i^{\rho})^{1/\rho}$, $0<\rho<1$,

(iii) $u(x)=\sum_{i=1}^{l} a_i x_i$, con todos los coeficientes $a_i>0$,

(iv) $u(x_1,x_2) = x_1^2(x_2+1)$,

(v) $u(x) = \text{mín}_{1\leq i\leq l}\, b_i x_i$, con todos los coeficientes $b_i>0$.

Estas cinco funciones son continuas y estrictamente crecientes sobre R^l_+. En el caso *(v)* se supondrá $l\geq 2$, de manera de evitar superposición con el caso *(iii)*. El método de solución procede según los siguientes lineamientos. El Teorema 1*(a)* garantiza de entrada que existe una solución óptima de (1) y que está balanceada. Es útil introducir el término de *candidato al óptimo* para un vector $x^*\in\Omega\cap B_0$ que satisface la condición de optimalidad de primer orden (2). Luego se sigue del Teorema 1 *(a)-(b)* que la solución óptima de (1) debe ser candidato al óptimo, siempre que pertenezca a Ω. Entonces, si resulta que u es cuasicóncava, se aplica la parte *(c)* y todos los candidatos al óptimo (si los hay) son realmente soluciones óptimas. Si, además, u tiene la propiedad *(S)*, entonces tenemos la solución completa (pero sólo entonces, porque es necesario determinar *todas* las soluciones óptimas de (1)). En resumidas cuentas, si la función de utilidad es *(S)*-cuasicóncava, entonces hallar un candidato al óptimo permite saber que es la única solución óptima de (1). Si no existe un candidato al óptimo o si u no es cuasicóncava o no tiene la propiedad *(S)*, se requiere un examen cuidadoso de los valores que alcanza u en el conjunto cociente $B_0\setminus\Omega$, comparándolos con los valores máximos de todos los candidatos al óptimo encontrados (si los hay).

Las condiciones de optimalidad mencionadas en la Observación 1 también pueden ser usadas, pero sólo en casos como *(iii)* y *(iv)*, si las funciones de utilidad son diferenciables en todo R^l. Como se explicó antes, esto nos deja $l+1$ multiplicadores – hecho conocido en programación no lineal – y debería trabajarse con $I(x^*) = \{i=1,\dots,l;\ x_i^*=0\}$, que es el conjunto de índices extremos de una canasta $x^*\in B_0$.

Solución *(i)* Elegimos $\Omega=R^l_{++}$. Sea u: $R^l_+\rightarrow R$ dada por $u(x) = \prod_{i=1}^{l} x_i^{\alpha_i}$ con todos los exponentes $\alpha_i>0$. Por el Ejemplo 1*(i)* sabemos que u es *(S)*-cuasicóncava. Por consiguiente, si podemos hallar una $x^*\in B_0\cap\Omega$ que satisfaga (2), sabremos que será la solución óptima única. Buscando esa x^*, combinamos (2) con $p.x^*=y$ y verificamos si, en concreto, la x^* hallada pertenece a Ω. Se trata de una tarea algebraica simple (en particular, nótese que la posibilidad de $\lambda=0$ en (2) lleva a $x^*\notin\Omega$). Conduce a $x^*=\alpha_i y/(\alpha p_i)$, $i=1,\dots,l$. Esta solución resulta estrictamente positiva, de modo que se halló la única solución óptima.

Solución *(ii)* Se elige $\Omega=R^l_{++}$. La función de utilidad es $u(x)= (\sum_{i=1}^{l} x_i^{\rho})^{1/\rho}$, con $\rho\in(0,1)$. Por el Ejemplo 1*(ii)* sabemos que u es S-cuasicóncava. Luego si puede hallarse una $x^*\in B_0\cap\Omega$ que satisface (2), será la única solución óptima. Para hallar esa x^*, combinamos x^* con $p.x^*=y$ y verificamos si la solución pertenece a Ω (puede excluirse la posibilidad de que $\lambda=0$, ya que conduce a expresiones sin sentido). Nuevamente, se trata de una tarea algebraica simple, que proporciona la expresión estrictamente positiva $x_i^*=p_i^{r-1}y/(p_1^r+p_2^r+\ldots+p_l^r)$, $i=1,\ldots l$, $r=\rho/(\rho-1)$. Por consiguiente se halló la única solución óptima.

Solución *(iii)* Se resuelve (1) para la función de utilidad lineal $u(x)=\sum_{i=1}^{l} a_i x_i$, con todos los $a_i>0$, eligiendo, como antes, $\Omega=R^l_{++}$. Puede suceder exactamente sólo uno de los dos casos siguientes: Caso 1: a es un múltiplo escalar de p (por ejemplo, $a=\mu p$ para algún $\mu\in R$, $\mu>0$), o caso 2: a no es un múltiplo escalar de p.

Caso 1: Por el Teorema 1*(b)*, para toda $x^*\in R^l_{++}$ óptima, existe $\lambda\geq 0$ tal que $a=\lambda p$. En este caso ello es cierto (tómese $\lambda=\mu>0$), de modo que toda $x^*\in B_0\cap\Omega$ es un candidato al óptimo. A continuación, como u es cuasicóncava, todo candidato al óptimo también es una solución óptima. Esto no es una novedad, porque todas las canastas candidatas a la optimalidad x^* satisfacen $a.x^*=\mu p.x^*$ y porque $a.x=\mu p.x\leq\mu y$ para todas las $x\in B_0$ para toda $x\in B_0$. Nos queda por inspeccionar al conjunto cociente $B_0\setminus\Omega$ (que en este caso se trata del conjunto de todos los x^* en B_0 con al menos una coordenada igual a cero). El valor $u(x^*)$ de cualquier $x^*\in B_0\setminus\Omega$ es $a.x^*=\mu p.x^*=\mu y$, idéntico al valor hallado previamente. Luego, se concluye que en el caso 1 el conjunto de todas las soluciones óptimas es B_0, es decir la unión de $B_0\cap\Omega$ y del conjunto cociente $B_0\setminus\Omega$.

Caso 2: Ahora la condición $a=\lambda p$ es incompatible con este caso. Luego no existen candidatos al óptimo, lo cual significa que la solución óptima (que sí existe) debe pertenecer al conjunto cociente $B_0\setminus\Omega$. Ahora bien, para cada x en B se tiene $a.x=\sum_i a_i p_i^{-1} p_i x_i\leq\alpha p.x\leq\alpha y$, en donde $\alpha=\max_i a_i/p_i$. Llamemos I al conjunto de índices i que cumplen con $a_i/p_i=\alpha$. I es un conjunto no vacío y es un subconjunto estricto de $\{1,\ldots,l\}$ (en caso contrario, se tendría $a=\alpha p$ que no puede ser cierto en el caso presente). Ahora bien, todo vector $(y/p_i)\,e_i$ $(i\in I)$ pertenece a B_0 y alcanza $a.(y/p_i)e_i=\alpha.y$[5]. Luego, puede concluirse que $\sup_{x\in B} a.x=\alpha y$. Podemos afirmar que el conjunto de soluciones óptimas es la intersección $B_0\cap\bigcap_{i\notin I}\{x\in R^l_+,\ x_i=0\}$, que es una cara de B_0. Se demuestra así: 1) Sea una x^* perteneciente a la intersección. Entonces $a.x^*=\sum_{i\in I} a_i x_i\sum_{i\in I} a_i p_i^{-1} p_i x_i^*=\alpha p.x^*=\alpha y$, de modo que x^* es óptima. 2) Sea x^* óptima. Luego $x^*\in B_0$ por el Teorema 1*(a)* y $\alpha y=a.x^*$ está dado, de modo que $\alpha y=\alpha\sum_{i\in I} p_i x_i^*+\sum_{i\notin I} a_i x_i^*$. Como $p.x^*=y$, esto implica $\sum_{i\notin I}(a_i-\alpha p_i)\,x_i^*=0$, de lo cual se desprende que $x_i^*=0$ para todo $i\notin I$ (obsérvese que $a_i-\alpha p_i<0$ para todo $i\notin I$). Esto demuestra las características deseadas del conjunto de soluciones óptimas del caso 2.

Solución *(iv)* Se resolverá para la función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1^2(x_2+1)$, tomando $\Omega=R^2_{++}$. Por el Ejemplo I*(iii)* ya se sabe que u es *(S)*-cuasicóncava. Luego, si hallamos $x^*\in B_0\cap\Omega$ que satisfaga (2), debe ser la única solución óptima. Se resuelven $p.x^*=y$ y (2), en donde la última condición implica $x_2^*=p_1(2p_2)^{-1}x_1^*-1$, y entonces se toma la solución, si existe, perteneciente a Ω. De las primeras dos ecuaciones también se tiene que $\lambda=0$ si y sólo si $(x_1^*, x_2^*)=(0, y/p_2)$, que es un vector que no pertenece a Ω. Luego

---

[5] El vector e_i es el vector unitario (0, 0,..., 1, ,..., 0) de R^l con componentes iguales a 0, excepto en la coordenada i-ésima.

se supondrá $\lambda>0$. Resolvemos las dos ecuaciones, lo que proporciona $x_1^*=\frac{2}{3}(y+p_2)/p_1$ y $x_2^*=-1+\frac{1}{3}(y+p_2)/p_2$. Ahora bien, como se requiere que $x^*\in\Omega$ para que sea un candidato al óptimo, se distinguirán dos casos[6]:

Caso 1: $y>2p_2$. Luego $x^*=(\frac{2}{3}(y+p_2)/p_1, -1+\frac{1}{3}(y+p_2)/p_2)$ pertenece a Ω. De aquí resulta un candidato al óptimo y por el argumento previo también debe ser la solución óptima única.

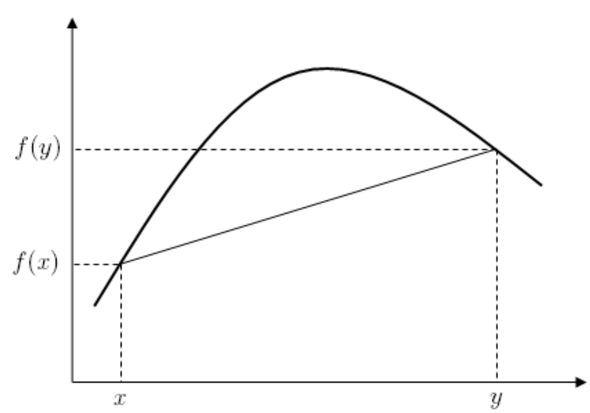
Caso 2: $y\leq 2p_2$. En este caso no hay condición de optimalidad. A partir de lo cual, sabemos que el mejor valor alcanzado por u sobre el conjunto cociente $B_0 \setminus \Omega$ será la solución óptima. Este conjunto cociente sólo tiene dos vectores, los puntos de esquina $(y/p_1, 0)$ y $(0, y/p_2)$. De ellos, sólo el primero proporciona el valor más elevado para u.

Combinando ambos casos, la función de demanda marshalliana está dada por

$$(x_1^*, x_2^*)\begin{cases} (2(y+p_2)/3p_1, (y-2p_2)/3p_2) & \text{si } y>2p_2, \\ (y/p_1, 0) & \text{si } y\leq 2p_2. \end{cases}$$

Una ilustración gráfica podría esclarecer el significado de la solución.

Solución *(v)*. Se resuelve para $u(x)=\text{mín}_{1\leq i\leq l}\, b_i x_i$, con coeficientes $b_i>0$, eligiendo Ω como el conjunto de todos los $x\in R^l_{++}$ tales que $b_i x_i\neq b_j x_j$ para todo $i\neq j$. Lo cual significa que, localmente, u tiene la forma $u(x)=b_k x_k$ en un entorno de todo punto x^* de Ω (el índice k es propio de x^*), de modo que no hay ninguna condición de optimalidad, porque para semejante x^* la condición (2) implica $b_k e_k=\lambda p$, que no tiene solución (recordar que $l\geq 2$). Luego la solución óptima, que sí existe, debe pertenecer al conjunto cociente $B_0 \setminus \Omega$. Para todo x en $B_0 \setminus \Omega$, pueden presentarse uno de dos casos: caso 1: $x\in R^l_{++}$ y se registra un empate bajo la forma de una igualdad $b_i x_i=b_j x_j$ para algún par $i\neq j$, o bien caso 2: alguna ordenada de x es nula. En tal caso, $u(x)=0$, implicando cierta suboptimalidad de x. Nos concentraremos en analizar los vectores en $B_0\cap R^l_{++}$ que registran empates. Para todo x en B se tiene $x_i\geq u(x)/b_i$ para algún subíndice i, lo que da $y\geq\sum_i p_i x_i\geq u(x)\sum_i p_i/b_i$, o sea $u(x)\leq y/\beta$, donde $\beta=\sum_i p_i/b_i>0$. En realidad, igual razonamiento muestra que $u(x)< y/\beta$ siempre que el conjunto de índices i en que $b_i x_i> u(x)$ sea no vacío. Luego $u(x^*)= y/\beta$ para $x^*\in B$, que es lo mismo que decir que x^* es óptimo, requiere $b_i x_i^*=b_j x_j^*=u(x^*)$ para todo i y j. La solución única viene dada



Un ejemplo de función cuasicóncava

[6] Nótese que $y>2p_2$ es equivalente a requerir que $x^*\in\Omega$.

por $x_i^* = b_i^{-1} y/\beta$, $i=1,\dots,l$; luego, se trata de la solución óptima.

4 Repaso: Funciones cóncavas y convexas, cuasicóncavas y cuasiconvexas

Una función $f(x)$ definida sobre $x \in S \subseteq R^n$ se dice <u>cóncava</u> sobre un conjunto convexo S si y sólo si para cualesquiera x, $y \in S$ y $0<\lambda<1$, se tiene que $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. En esta definición, f está definida sobre un conjunto convexo, de manera que podemos estar seguros que puntos como $\lambda x+(1-\lambda)y$ pertenecen a S. Observar que si λ es igual a 0 ó 1, la desigualdad débil es reemplazada automáticamente por una igualdad, de modo que podemos poner en la definición, en lugar de $0<\lambda<1$, $0\leq\lambda\leq 1$. Se puede obtener una interpretación geométrica sencilla de lo que es una función cóncava mediante la figura anterior. A medida que el escalar λ va desde 1 hasta 0, $f(\lambda x+(1-\lambda)y)$ traza el valor de f entre x e y. Por otra parte, cuando λ va desde 1 a 0, $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ es una función lineal de λ que une los puntos $(x,f(x))$ con $(y,f(y))$, es decir $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ traza la cuerda entre los puntos del gráfico de f. La desigualdad $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ dice que, si la función es cóncava, el grafo de f entre x e y yacerá por encima (o tal vez, será coincidente) con la cuerda que une a estos dos puntos del grafo. Esta propiedad debe cumplirse para todo par de puntos del grafo de f.

Una función $f(x)$ definida sobre $x \in S \subseteq R^n$ se dice <u>convexa</u> sobre un conjunto convexo S si y sólo si para cualesquiera x, $y \in S$ y $0<\lambda<1$, se tiene que $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Luego, una definición alternativa es la siguiente: una función $f(x)$ es convexa sobre un conjunto convexo S si y sólo si $-f$ es cóncava sobre el conjunto convexo S.

En análisis económico se supone habitualmente que las funciones de producción $f(x)$ tienen la propiedad de que el conjunto de insumos x que puede producir, al menos, el nivel de producto y, llamado el *conjunto de requerimientos de insumos* $L(y) \equiv \{x: f(x) \geq y\}$ (Varian, H.R., *Microeconomic Analysis,* 3rd ed., 1992) es un conjunto convexo para todo nivel de producto que pertenece al rango de f. A estas funciones se las denomina *cuasicóncavas*. Análogamente, son denominadas *cuasiconvexas* las funciones $f(x)$ con la propiedad de que $-f(x)$ son cuasicóncavas.

En el artículo de Diewert pueden encontrarse muchos ejercicios interesantes con este tipo de funciones, así como caracterizaciones más avanzadas.